

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 19 (1946-1947)

**Artikel:** Sur les groupes continus de transformations unitaires de l'espace de Hilbert: Une extension d'un théorème de M.H. Stone.  
**Autor:** Arnous, Edmont  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17332>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur les groupes continus de transformations unitaires de l'espace de Hilbert: Une extension d'un théorème de M.H. Stone

Par EDMOND ARNOUS, Leysin

L'objet de ce travail est de donner toute sa généralité à un important théorème de M. H. Stone [1] sur les groupes continus de transformations unitaires de l'espace de Hilbert, en démontrant la proposition suivante: soit:

$G$  un groupe abélien localement compact,  $\Gamma$  le groupe des caractères de  $G$ ,  $\chi_s(x)$  la valeur en  $x \in G$  du caractère  $s \in \Gamma$  de  $G$ .

Soit encore:

$R$  l'espace abstrait de Hilbert et  $(E_{A_\nu})$  une famille spectrale de  $R$ , dont l'indice  $A_\nu$  parcourt une tribu de parties de  $G$ . Alors, l'intégrale de Fourier-Stieltjes, étendue aux transformations de  $R$ :

$$U_s = \int \chi_s(x) \quad d. E_{A_\nu} \quad (1)$$

définit un groupe continu de transformations unitaires  $(U_s)_{s \in \Gamma}$  de  $R$ . Inversement, à tout groupe continu de transformations unitaires  $(U_s)_{s \in \Gamma}$  de  $R$ , correspond une famille spectrale  $(E_{A_\nu})$  de  $R$ , et une seule, vérifiant (1).

La démonstration de cette proposition cf. [2] reposera essentiellement sur un théorème célèbre de S. Bochner [3], étendu par A. Weil [4, § 30] aux groupes abéliens localement compacts: La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $\Phi(s)$  soit la transformée de Fourier-Stieltjes

$$\Phi(s) = \int \chi_s(x) \quad d \mu_{A_\nu}$$

d'une mesure de Radon  $\mu_{A_\nu}$  bornée sur  $G$ , est que  $\Phi(s)$  soit du type positif  $P^\infty$ .

Dans la première partie de ce travail, je préciserai le sens et la portée de ce théorème.

Dans la seconde partie, je rappellerai quelques notations et quelques propriétés de l'espace de Hilbert et je généraliserai la notion de famille spectrale.

---

[1]; les numéros figurant entre crochets, dans le courant du texte, renvoient à la bibliographie.

Enfin, dans la troisième partie, j'étendrai le théorème de Stone, en démontrant la proposition que j'ai énoncée en commençant. Il ne sera question ici, ni des applications à la théorie ergodique [5], ni des applications à la mécanique quantique.

\* \* \*

Si l'on veut bien faire saisir le sens et la portée du théorème de Bochner, il est nécessaire de placer auparavant l'intégrale de Fourier-Stieltjes dans son domaine naturel, celui des groupes abéliens localement compacts. Pour cela, le plus simple est sans doute, de commencer par construire ce domaine, c'est-à-dire de partir d'un ensemble  $G$ , de lui donner la structure voulue et d'y définir une mesure.

1. Commençons par lui donner une structure de groupe abélien, en choisissant, parmi toutes les lois de composition interne possibles, une loi associative et commutative, qui ait un élément neutre (l'élément unité du groupe) et associe à tout  $x \in G$  un symétrique  $x^{-1} \in G$ .

Donnons-lui ensuite une structure topologique compatible avec la loi du groupe, en choisissant un système de voisinages  $V$  de l'unité. Un tel système suffit à définir une topologie, puisqu'on engendre un système de voisinages de  $x$ , par translation, c'est-à-dire en formant les ensembles  $x \cdot V$ . Mais si l'on veut pouvoir définir utilement, tout à l'heure, une mesure sur  $G$ , il faut choisir une structure localement compacte [6, p. 64]. Autrement dit, la topologie doit être assez fine pour que deux éléments quelconques  $x$  et  $y$  distincts puissent toujours être enfermés dans deux voisinages sans point commun (en d'autres termes, l'espace doit être séparé), et tout élément  $x$  doit avoir un voisinage à l'intérieur duquel l'axiome du recouvrement de Borel-Lebesgue est valable (en d'autres termes, tout  $x$  doit avoir au moins un voisinage compact [bicompat d'Alexandroff]).

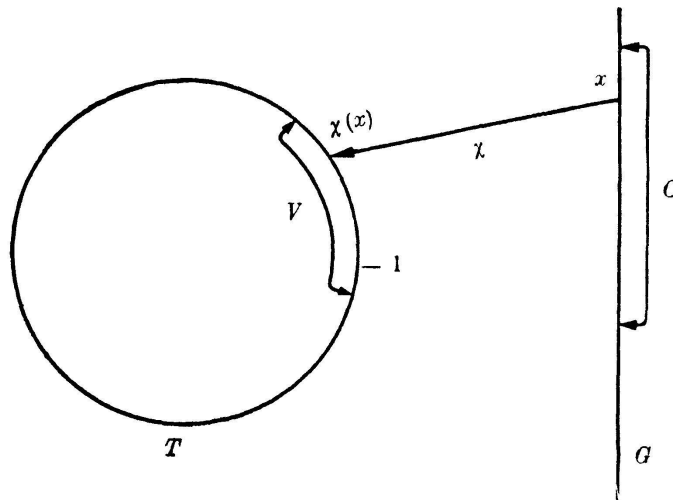
Le groupe additif des entiers, le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, le groupe additif de la droite numérique  $R^1$  et le plan  $R^1 \times R^1$ , sont des groupes abéliens localement compacts.

2. Ceci posé, soit  $T$  le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, et  $\Gamma$  l'ensemble des représentations  $x \rightarrow \chi(x) \in T$  de  $G$  dans  $T$ , c'est-à-dire l'ensemble des solutions continues et de module 1 de l'équation:

$$\chi(x \cdot y) = \chi(x) \chi(y). \quad (2)$$

Il est facile de définir aussi sur  $\Gamma$  une structure de groupe abélien localement compact.

Tout d'abord une structure de groupe abélien: Il suffit pour cela de choisir pour loi de composition interne, la multiplication, car  $\chi_1 \cdot \chi_2$  est solution de (2) en même temps que  $\chi_1$  et  $\chi_2$ .



Ensuite une structure topologique localement compacte: Il suffit de former pour tout voisinage  $V$  de l'unité de  $T$ , et toute partie compacte  $C$  de  $G$ , l'ensemble  $W$  des représentations  $\chi$  appliquant  $C$  dans  $V$ . Les  $W$  engendrent dans  $\Gamma$  un système de voisinages de l'unité. Comme certains de ces voisinages sont compacts [4, p. 100], ils définissent sur  $\Gamma$  une structure localement compacte. Le groupe  $\Gamma$ , muni de ces deux structures, s'appelle le *groupe dual* de  $G$  (par rapport à  $T$ ). Ce n'est pas autre chose en somme que le groupe des caractères des représentations linéaires bornées irréductibles de  $G$  dans  $T$ .

Dans la suite,  $s$  désignera un élément de  $\Gamma$  et  $\chi_s(x)$  la valeur en  $x \in G$  du caractère  $s \in \Gamma$  de  $G$ . C'est une fonction de module 1, continue sur  $G \times \Gamma$ . Le choix de la multiplication pour loi de composition interne sur  $\Gamma$  entraîne évidemment:

$$\chi_{st}(x) = \chi_s(x) \cdot \chi_t(x) \quad (3)$$

et par suite aussi,  $\chi_{s^{-1}} \chi_s = \chi_{s^{-1} \cdot s}$  étant égal à 1:

$$\overline{\chi_{s^{-1}}(x)} = \chi_s(x). \quad (4)$$

Le dual de  $R^1$  est  $R^1$  lui-même (à un isomorphisme près) avec  $\chi_s(x) = e^{2\pi i s x}$ . Le plan  $R^1 \times R^1$  est aussi son propre dual. Mais le dual du groupe additif des entiers est le groupe  $T$  avec  $\chi_s(x) = s^x$ .



3.  $G$  et  $\Gamma$  sont maintenant dotés d'une structure abélienne localement compacte.

Il reste encore à doter  $G$  d'une mesure. Il suffira de choisir une mesure bornée. Qu'entend-on par là ?

Une mesure bornée  $\mu$ , sur  $G$ , est une fonction d'ensembles, à valeurs réelles  $\geq 0$  et  $< +\infty$ , définie sur une famille de parties  $(A_\nu)$  de  $G$  dont l'indice  $\nu$  parcourt un ensemble quelconque. Pour conserver à cette fonction les propriétés essentielles de la mesure ordinaire, il est nécessaire que la famille  $(A_\nu)$  ne soit pas quelconque : Ainsi, chaque fois qu'elle contient  $A_\nu$  et  $A_{\nu'}$ , elle doit contenir leur différence, c'est-à-dire l'intersection de  $A_\nu$  et du complémentaire de  $A_{\nu'}$ ; chaque fois qu'elle contient une famille dénombrable de  $A_\nu$ , elle doit en contenir l'intersection et la réunion. Une telle famille est alors appelée *tribu* de parties.

Mais il est nécessaire aussi que  $\mu$  soit une fonction *complètement additive*, c'est-à-dire que  $\mu_A = \sum_\nu \mu_{A_\nu}$ , chaque fois que  $A$  est la réunion d'une famille dénombrable de  $A_\nu$ . Lorsque toutes ces conditions sont remplies, les ensembles  $A_\nu$  sont dits mesurables.

4. Mais il reste une grande liberté de choix dans l'ensemble des tribus et des mesures possibles. Nous allons restreindre ce choix en imposant à  $\mu$  de nouvelles conditions, intimement liées à la nature localement compacte du groupe.

Lorsqu'une fonction  $f(x)$  à valeurs  $\geq 0$  est mesurable, c'est-à-dire lorsque l'ensemble des points où  $f(x) \geq \alpha$  est mesurable, quelque soit  $\alpha > 0$ , les sommes de Lebesgue permettent de lui attacher une intégrale  $\int f(x) d\mu$  finie ou infinie. Si elle est finie,  $f(x)$  est dite intégrable. D'une façon générale, une fonction complexe, qui peut toujours s'écrire  $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$  avec  $f_n \geq 0$ , est dite intégrable, si les  $f_n$  sont intégrables.

Ceci posé, parmi toutes les tribus et les mesures possibles, notre choix se portera sur celles qui rendent intégrables toutes les fonctions continues, nulles en dehors d'un ensemble compact (fonctions de la classe  $L$ ). Les mesures soumises à cette condition sont appelées *mesures de Radon*.

Les mesures de Radon et leurs combinaisons linéaires à coefficients complexes (mesures complexes de Radon) jouent un rôle essentiel dans la théorie de l'intégrale de Fourier-Stieltjes.

5. En effet, dans le cadre qui vient d'être défini, l'intégrale de Fourier-Stieltjes prend la forme :

$$\Phi(s) = \int \chi_s(x) d\mu_{A_\nu} . \quad (5)$$

Or, il est essentiel d'être assuré de l'existence de  $\Phi(s)$ . En exigeant que  $\mu_{A_\nu}$  soit une mesure de Radon, on atteint justement un degré de généralité qu'il serait bien difficile de dépasser, tout en ayant la certitude que la fonction  $\chi_s(x)$ , bornée et continue, est intégrable.

Dès lors, un problème analogue se pose pour  $\Phi(s)$ . Quelles sont les conditions les plus larges qu'on puisse imposer à  $\Phi(s)$ , pour qu'il existe une mesure  $\mu_{A_\nu}$  vérifiant (5)? La réponse est justement donnée par le *théorème de Bochner*: La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $\Phi(s)$  définie sur  $\Gamma$  soit la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure de Radon  $\mu_{A_\nu}$  bornée sur  $G$ , est que  $\Phi(s)$  soit du type positif  $P^\infty$ , c'est-à-dire qu'elle soit continue et que

$$\sum_{m,n} C_m \overline{C_n} \Phi(s_n^{-1} \cdot s_m) \geq 0 \quad (6)$$

quels que soient  $s_m$  et  $s_n \in \Gamma$  et les constantes  $C_m$  et  $C_n$  en nombre fini. De plus, la mesure  $\mu_{A_\nu}$  correspondant à  $\Phi(s) \in P^\infty$  est unique.

On saisit la généralité et la portée de ce théorème. On jugera au § 13 du degré de simplicité et de maniabilité de la forme hermitienne (6).

\* \* \*

Avant d'étendre le théorème de Stone aux groupes abéliens localement compacts, il est nécessaire de rappeler un certain nombre de notations et de propriétés de l'espace de Hilbert, et de généraliser convenablement la notion de famille spectrale.

6. Soit donc  $R$  l'espace de Hilbert. C'est un espace muni de trois structures:

Tout d'abord d'une structure de groupe abélien à opérateurs:  $R$  est en effet un module par rapport au corps des nombres complexes. On désignera ses éléments par  $f, g, \dots$  et les nombres complexes par  $c_1, c_2, \dots$ ; on notera additivement, par  $f + g$ , la loi de composition interne, et multiplicativement, par  $cf$ , la loi de composition externe.

C'est ensuite un espace muni d'une structure topologique et d'une structure uniforme. Comme on sait, on définit ces deux structures à l'aide d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une fonction à valeurs complexes, définie sur  $R \times R$ , qu'on note  $(f, g)$  et qui jouit des quatre propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} (cf, g) &= c(f, g) & (f_1 + f_2, g) &= (f_1, g) + (f_2, g) \\ (f, g) &= \overline{(g, f)} & (f, f) &> 0 \text{ si } f \neq 0 \text{ et } (f, f) = 0 \text{ si } f = 0 \end{aligned}$$

et par suite aussi, des deux propriétés:

$$(f, cg) = \bar{c}(f, g) \quad (f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2).$$

De façon précise, et  $\|f\|$  désignant la norme de  $f$ , c'est-à-dire la quantité  $(f, f)^{\frac{1}{2}}$ , on définit la topologie de  $R$  en prenant pour système fondamental de voisinages de l'unité, les boules formées par les  $f \in R$  tels que  $\|f\| < a$  pour  $a > 0$ , et la structure uniforme de  $R$ , en prenant pour système fondamental d'entourages, les entourages formés par les couples  $f, g$  tels que  $\|f - g\| < a$  pour  $a > 0$ .

Il est bien évident que l'intersection de ces entourages est la diagonale de  $R \times R$ . Autrement dit, l'espace uniforme ainsi défini est séparé, et par suite, s'il n'était pas complet, il serait possible de le compléter, et d'une seule manière [6, p. 102]. Mais  $R$  sera supposé complet. Par contre, il ne sera pas nécessairement séparable, afin qu'il puisse avoir un nombre de dimensions supérieur au dénombrable et représenter, par exemple, l'espace des fonctions presque périodiques.

7. Telles sont les propriétés essentielles de l'espace sur lequel vont opérer les deux familles de transformations dont il est question dans l'énoncé du théorème de Stone. Que sont maintenant ces deux familles? Ce sont des familles de transformations partout définies sur  $R$ , linéaires et bornées.

La première est une *famille spectrale*  $(E_{A_\nu})$ , dont l'indice parcourt une tribu de parties de  $G$ . Que faut-il entendre par là? Il faut entendre une famille de transformations soumises, pour tout  $f \in R$ , aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} (E_{A_\nu} f, f) &\text{ est réel} & (E_{A_\nu} \text{ est hermitien}) \\ E_{A_\nu \cap A_{\nu'}} &= E_{A_\nu} \cdot E_{A_{\nu'}} & (7) \\ \mu_{A_\nu}(f) &= \|E_{A_\nu} f\|^2 \text{ est une mesure de Radon bornée,} \\ \mu_G(f) &= \|f\|^2 \end{aligned}$$

où  $A_\nu \cap A_{\nu'}$  représente l'intersection de  $A_\nu$  et  $A_{\nu'}$ . La deuxième condition entraîne que  $E_{A_\nu}$  est idempotent ( $E_{A_\nu} = E_{A_\nu}^2$  si  $\nu = \nu'$ ) et par suite que  $E_{A_\nu}$  est un projecteur. Comme d'autre part on retombe sur la définition classique des familles spectrales, en prenant pour  $A_\nu$  les intervalles de la droite numérique, la généralisation est bien légitime (pour d'autres généralisations, voir [7]).

La seconde famille est un *groupe continu de transformations unitaires*. Comme on sait, on entend par là une famille de transformations  $(U_s)$  soumises, pour tout  $f \in R$ , aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned}
U_s^* U_s &= U_s U_s^* = 1 & (U_s \text{ est unitaire}) \\
U_{st} &= U_s \cdot U_t & ([U_s] \text{ est un groupe}) \\
\Phi(s) &= (U_s f, f) \text{ est continue en } s, \\
U_1 &= 1,
\end{aligned} \tag{8}$$

où  $U_s^*$  désigne l'adjoint de  $U_s$ . Ces conditions entraînent évidemment que  $U_s^* = U_{s^{-1}}$ .

8. Ceci précisé, et pour terminer cette seconde partie, voici une propriété importante qui sera bientôt utile.

Une fonction  $L(f)$ , définie sur  $R$  et à valeurs complexes, est une *forme linéaire* si, quels que soient  $f$  et  $g$  de  $R$  et les constantes de  $c_1$  et  $c_2$ :

$$L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2).$$

De plus, elle est *bornée* s'il existe, pour tout  $f \in R$ , un nombre  $M$  tel que:

$$|L(f)| \leq M \|f\|.$$

Les formes linéaires bornées jouissent d'une propriété remarquable (théorème de Fréchet [8]): elles peuvent s'écrire sous forme de produit scalaire. Autrement dit, il existe un élément et un seul  $g^* \in R$  tel que:

$$L(f) = (f, g^*).$$

De même, une fonction  $L(f, g)$ , définie sur  $R \times R$  et à valeurs complexes, sera une forme bilinéaire bornée, si elle est linéaire par rapport à  $f$  et  $g$  et s'il existe, quels que soient  $f$  et  $g$  de  $R$ , un nombre  $M$  tel que:

$$|L(f, g)| \leq M \|f\| \cdot \|g\|.$$

Mais alors, pour tout  $g$  donné, il existe un élément  $g^* \in R$  et un seul, tel que, pour tout  $f \in R$ :

$$L(f, g) = (f, g^*).$$

Il suffit maintenant de poser  $g^* = E g$ , pour conclure qu'à toute forme bilinéaire bornée  $L(f, g)$  correspond une transformation  $E$  partout définie, linéaire, bornée, et une seule, et telle que:

$$L(f, g) = (f, E g).$$

Si de plus  $L(f, g)$  est une forme hermitienne, c'est-à-dire si, quels que soient  $f$  et  $g$  de  $R$ :

$$L(f, g) = \overline{L(g, f)} ,$$

alors  $E$  est une transformation hermitienne.

Nous avons maintenant en main tous les éléments voulus pour donner rapidement toute sa généralité au théorème de Stone.

\* \* \*

Tout d'abord le théorème direct.

**9. Existence de  $U_s$ .** Si  $(E_{A_\nu})$  est une famille spectrale,

$$L_s(f, g) = \int \chi_s(x) d \cdot (E_{A_\nu} f, g)$$

est une forme bilinéaire partout définie. Elle est aussi bornée. En effet,  $|\chi_s(x)| = 1$  entraîne

$$|L_s(f, g)| \leq |(E_G f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| .$$

Il existe donc une transformation  $U_s$  partout définie, linéaire et bornée, et une seule, telle que

$$L_s(f, g) = (U_s f, g) .$$

**10. Les  $U_s$  forment un groupe.**

En effet (3) permet d'écrire maintenant

$$(U_{st} f, g) = \int \chi_s(x) \chi_t(x) d(E_{A_\nu} f, g)$$

ou encore,  $\chi_s(x)$  et  $\chi_t(x)$  étant continus et bornés :

$$(U_{st} f, g) = \int \chi_s(x) d_\nu \int \chi_t(y) d_{\nu'} (E_{A_\nu \cap A_{\nu'}} f, g)$$

c'est-à-dire finalement, en vertu de (7):

$$(U_{st} f, g) = \int \chi_s(x) d_\nu \int \chi_t(y) d_{\nu'} (E_{A_\nu} E_{A_{\nu'}} f, g) .$$

Calculons maintenant  $(U_s U_t f, g)$ :

$$\begin{aligned} (U_s U_t f, g) &= \int \chi_s(x) d_\nu (E_{A_\nu} U_t f, g) = \\ &= \int \chi_s(x) d_\nu \int \chi_t(y) d_{\nu'} (E_{A_\nu} E_{A_{\nu'}} f, g) . \end{aligned}$$

Ainsi

$$(U_{st} f, g) = (U_s U_t f, g) .$$

**11.**  $U_s$  est unitaire. En effet, (4) entraîne

$$(U_s f, g) = \int \overline{\chi_{s^{-1}}(x)} d(g, E_{A_\nu} f) = \overline{(U_{s^{-1}} g, f)} = (f, U_{s^{-1}} g)$$

et par suite  $U_s^* = U_{s^{-1}}$ . Dès lors

$$U_s^* \cdot U_s = U_{s^{-1}s} = U_1 = \int dE_{A_\nu} = E_G = 1 = U_s U_s^* .$$

**12.** Le groupe est continu

puisque  $\chi_s(x)$  est continu.

Voici maintenant la réciproque. La démonstration s'inspirera, dans ses grandes lignes, de celle de Bochner [1]. Elle reposera en effet essentiellement sur la remarque suivante:

**13.**  $\Phi(s) = (U_s f, f)$  est du type positif  $P^\infty$ .

En effet,  $\Phi(s)$  est continue, par hypothèse, et d'autre part:

$$\sum_{m,n} C_m \overline{C_n} (U_{s_n^{-1}} U_{s_m} f, f) = (\sum_m C_m U_{s_m} f, \sum_n C_n U_{s_n} f) \geq 0 .$$

La forme hermitienne (6) se révèle donc très maniable, et cela suffit à assurer le succès de la méthode.

**14.** Existence de  $E_{A_\nu}$ . C'est ici qu'il faut utiliser le théorème de Bochner. Il permet d'affirmer l'existence d'une mesure de Radon bornée  $\mu_{A_\nu}(f)$  et d'une seule, telle que

$$(U_s f, f) = \int \chi_s(x) d\mu_{A_\nu}(f) .$$

L'artifice classique

$$\begin{aligned} (U_s f, g) &= \left( U_s \frac{f+g}{2}, \frac{f+g}{2} \right) - \left( U_s \frac{f-g}{2}, \frac{f-g}{2} \right) \\ &+ i \left( U_s \frac{f+ig}{2}, \frac{f+ig}{2} \right) - i \left( U_s \frac{f-ig}{2}, \frac{f-ig}{2} \right) \end{aligned}$$

permet immédiatement de calculer  $(U_s f, g)$ :

$$(U_s f, g) = \int \chi_s(x) d\mu_{A_\nu}(f, g) \tag{9}$$

où  $\mu_{A_\nu}(f, g)$  est la mesure complexe de Radon

$$\mu_{A_\nu}(f, g) = \mu_{A_\nu} \left( \frac{f-g}{2} \right) - \mu_{A_\nu} \left( \frac{f+g}{2} \right) + i \mu_{A_\nu} \left( \frac{f+ig}{2} \right) - i \mu_{A_\nu} \left( \frac{f-ig}{2} \right) .$$

Il est bien clair que  $\mu_{A\nu}(f, g)$  est une forme bilinéaire, partout définie. Elle est aussi bornée. En effet  $U_1 = 1$  entraîne

$$\int d \cdot \mu_{A\nu}(f, g) = \mu_G(f, g) = (f, g)$$

et par suite

$$|\mu_A(f, g)| \leq |\mu_G(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Dès lors, le théorème de Fréchet permet d'affirmer l'existence d'un opérateur partout défini, linéaire et borné  $E_{A\nu}$ , et d'un seul, tel que

$$\mu_{A\nu}(f, g) = (E_{A\nu}f, g).$$

**15.**  $E_{A\nu}$  est hermitien.

En effet  $\overline{\chi_{s^{-1}}(x)} = \chi_s(x)$  entraîne

$$(U_s f, g) = \overline{(U_{s^{-1}} g, f)} = \int \chi_s(x) d\overline{\mu_{A\nu}(g, f)}.$$

Mais  $(U_s f, g)$  ne peut se mettre que d'une seule manière sous la forme (9). Ainsi

$$\overline{\mu_{A\nu}(g, f)} = \mu_{A\nu}(f, g).$$

**16.** Relation  $E_{A\nu} \cap_{A\nu'} = E_{A\nu} E_{A\nu'}$ .

Comparons les deux expressions de  $(U_{st} f, g)$ :

$$\begin{aligned} (U_{st} f, g) &= \int \chi_s(x) \chi_t(x) d(E_{A\nu} f, g) \\ &= \int \chi_s(x) d_{\nu} \int \chi_t(y) d_{\nu'}(E_{A\nu} \cap_{A\nu'} f, g) \end{aligned}$$

et, d'après (8)

$$(U_{st} f, g) = (U_s U_t f, g) = \int \chi_s(x) d_{\nu}(E_{A\nu} U_t f, g).$$

$(U_{st} f, g)$  ne peut, lui aussi, se mettre sous la forme (9) que d'une seule manière. Par suite

$$(E_{A\nu} U_t f, g) = \int \chi_t(x) d_{\nu'}(E_{A\nu} \cap_{A\nu'} f, g).$$

Or

$$(E_{A\nu} U_t f, g) = \int \chi_t(x) d_{\nu'}(E_{A\nu'}, E_{A\nu} f, g).$$

Alors, toujours pour la même raison:

$$(E_{A\nu} \cap_{A\nu'}, f, g) = (E_{A\nu} E_{A\nu'}, f, g).$$

Si en particulier  $\nu = \nu'$ ,  $E_{A\nu} = E_{A\nu}^2$ .

17.  $\|E_{A\nu} f\|^2$  est une mesure de Radon bornée.

C'est bien évident maintenant, puisque

$$\|E_{A\nu} f\|^2 = (E_{A\nu} f, f) = \mu_{A\nu}(f) .$$

La démonstration est ainsi complète.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] *M. H. Stone*, Proc. Nat. Acad. Sc., 16, 1930, 172—175; Ann. of Math., 33, 1932, 643—648.  
*J. v. Neumann*, Ann. of Math., 33, 1932, 567—573.  
*S. Bochner*, Sitzgber. preuß. Akad. Wiss., 1933, 371—376.  
*F. Riesz*, Acta Szeged, 6, 1933, 184—198.  
*B. v. Sz. Nagy*, Math. Ann., 112, 1936, 286—296.  
*H. Nakano*, Ann. of Math., 42, 1941, 665-667.  
*B. v. Sz. Nagy*, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Kap. XI, Berlin, Springer, 1942.
- [2] *E. Arnous*, C. R. Acad. Sc. Paris, 222, 1946, 7 janv.
- [3] *S. Bochner*, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932, pp. 74 bis 76.
- [4] *A. Weil*, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1940.
- [5] *E. Hopf*, Ergodentheorie (Ergebn. d. Math., t. 5, fasc. 2), Berlin, Springer, 1937.
- [6] *N. Bourbaki*, Eléments de Mathématiques, livre III, chap. I, Paris, 1940.
- [7] *H. Nakano*, Proc. Phys. Math. Soc. Jap., 21, 1939, 724.  
*Wecken*, Math. Ann., 116, 1939, 422—455.
- [8] *M. Fréchet*, Trans. Amer. Soc., 8, 1907, 433—446.  
*F. Riesz*, Acta Szeged, 7, 1934, 34—38.

Reçu le 4 février 1946.