

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	19 (1946-1947)
<b>Artikel:</b>	Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern.
<b>Autor:</b>	Varga, O.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-17352">https://doi.org/10.5169/seals-17352</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern

Von O. VARGA, Debrecen

Unter den speziellen Riemannschen Räumen verdienen wohl zunächst die von konstanter Krümmung (nichteuklidische Räume) Beachtung. Ziel der vorliegenden Note besteht in der Charakterisierung jener Finslerschen Räume, die in der Theorie dieser Räume<sup>1)</sup> eine entsprechende Rolle spielen wie die nichteuklidischen Räume und natürlich eine einfache Verallgemeinerung derselben sind.

Wir betrachten — entsprechend der Cartanschen Theorie<sup>2)</sup> — den Finslerschen Raum als Mannigfaltigkeit von Linienelementen. Der gesuchte Raum soll dann auf folgende Weise bestimmt werden: Wir betrachten einen Finslerschen Raum, in dem es einen absoluten Parallelismus der Linienelemente gibt. Dann können wir in dem Raume oder einem Teil desselben ein Feld von parallelen Linienelementen auszeichnen und diesem einen nichteuklidischen Raum der Krümmung  $K$  zuordnen. Verschiedenen Feldern von parallelen Linienelementen sollen verschiedene nichteuklidische Räume derselben Krümmung zugeordnet werden. Die verschiedenen nichteuklidischen Räume stehen natürlich in einem Zusammenhang, der dem Finslerschen Raum von vornherein gegeben ist<sup>3)</sup>. Stellt man dann die Forderung, daß die Vektorübertragung stets dieselbe ist, wie man auch die Linienelemente parallel überträgt, so erhält man den gewöhnlichen nichteuklidischen Raum.

Da man den Finslerschen Raum durch seine Krümmungstensoren und den Prozeß der invarianten Ableitung vollständig charakterisieren kann, soll in den folgenden Ausführungen gezeigt werden, welche Eigenschaft dieser Tensoren für unsere verallgemeinerten nichteuklidischen Räume charakteristisch ist.

Schließlich wird gezeigt, daß es zum Aufbau dieser Räume genügt, von einer affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeit von Linienelementen<sup>4)</sup> auszugehen, wenn in dieser ein absoluter Parallelismus der Linienelemente existiert und ferner von den beiden Torsionstensoren der eine symmetrisch, der andere Nulltensor ist.

---

<sup>1)</sup> P. Finsler (1), siehe Schriftenverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

<sup>2)</sup> E. Cartan (3).

<sup>3)</sup> Eine solche Charakterisierung eines verallgemeinerten nichteuklidischen Raumes entspricht den Prinzipien in O. Varga (3).

<sup>4)</sup> O. Varga (1).

## § 1. Die metrischen Grundformeln der Finslerschen Geometrie

Im  $n$ -dimensionalen Finslerschen Raum, der auf Koordinaten  $x^1, x^2, \dots, x^n$  bezogen ist, sei das Bogenelement  $ds$  durch

$$ds = L(x, dx) \quad (1)$$

bestimmt. Von der Funktion  $L(x, dx)$  setzen wir voraus, daß sie positiv homogen von 1-ter Dimension in den  $dx^i$  ist, und daß die quadratische Form

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [L^2(x, x')]}{\partial x'^i \partial x'^k} t^i t^k$$

der Hilfsvariablen  $t^1, t^2, \dots, t^n$  positiv definit ist. Ferner setzen wir voraus, daß die Ableitungen, soweit sie gebraucht werden, stets existieren und stetig sind.

Entsprechend der Cartanschen Theorie der Finslerschen Räume erweitern wir den Raum zu einer  $(2n - 1)$ -dimensionalen Linienelementmannigfaltigkeit, indem wir zu jedem Punkt  $x^i$  sämtliche hindurchgehende orientierte Richtungen  $x'^1, x'^2, \dots, x'^n$  betrachten. Dabei kommt es selbstverständlich nur auf das Verhältnis der letzteren Größen an. Ein Linienelement soll kurz mit  $(x^i, x'^i)$  oder noch einfacher  $(x, x')$  bezeichnet werden. Sämtliche Größen sind erst in bezug auf ein Linienelement definiert und müssen daher in den  $x'^i$  von nullter Dimension homogen sein.

Die Maßbestimmung im Linienelement  $(x, x')$  wird durch den ersten Fundamentaltensor

$$g_{ik}(x, x') = \frac{1}{2} \frac{\partial (L^2)}{\partial x'^i \partial x'^k} \quad (2)$$

festgelegt, indem dann die Länge eines Vektors  $\xi^i$  und der Cosinus des Winkels zweier Vektoren  $\xi^i$  und  $\eta^i$  desselben Linienelementes durch

$$l^2 = g_{ik} \xi^i \xi^k \quad (3)$$

und

$$\cos(\xi, \eta) = \frac{g_{ik} \xi^i \eta^k}{\sqrt{g_{ik} \xi^i \xi^k} \sqrt{g_{ik} \eta^i \eta^k}} \quad (4)$$

bestimmt sind.

Der Einheitsvektor, der dieselbe Richtung wie sein Linienelement besitzt, hat

$$l^i = \frac{x'^i}{L(x, x')} \quad (5)$$

zu kontravarianten und

$$l^i = \frac{\partial L}{\partial x'^i} \quad (6)$$

zu kovarianten Komponenten.

## § 2. Die lineare Übertragung und der Parallelismus

Die Übertragung eines Vektors  $\xi^i$  vom beliebigen Linienelement  $(x, x')$  zum Nachbarlinienelement  $(x + dx, x' + dx')$  wird durch das invariante Differential mit kontravarianten Komponenten

$$D\xi^i = d\xi^i + C_{kl}^i \xi^k dx'^l + \Gamma_{kl}^i \xi^k dx^l \quad (7)$$

und kovarianten Komponenten

$$D\xi_i = d\xi_i - C_{il}^r \xi_r dx'^l - \Gamma_{il}^r \xi_r dx^l \quad (7')$$

bestimmt. Die Übertragungsparameter bestimmen sich dabei aus der Grundfunktion  $L(x, dx)$  gemäß

$$\left. \begin{aligned} C_{il}^k &= g^{kr} C_{ir} \\ C_{ikl} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x'^l} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 (L^2)}{\partial x'^i \partial x'^k \partial x'^l} \\ \Gamma_{ik}^r &= g^{rl} \Gamma_{ilk} \\ \Gamma_{ilk} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) + C_{ikr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^l} - C_{ikr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^i} \\ G^r &= G_i g^{ir} \\ G_i &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 (L^2)}{\partial x'^i \partial x^r} x'^r - \frac{\partial (L^2)}{\partial x^i} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wie in der Riemannschen Geometrie sind auch im vorliegenden Falle die  $\Gamma_{ik}^r$  kein Tensor, wohl ist dies aber von

$$A_{ikl} = L C_{ikl} \quad (9)$$

der Fall. Aus (8) und (9) ergibt sich die häufig benutzte Beziehung

$$A_{ijk} l^k = L C_{ijk} l^k = 0 . \quad (10)$$

Aus (7) und (8) erhält man für das invariante Differential des Einheitsvektors

$$\omega^i(d) \equiv Dl^i = dl^i + \frac{1}{L} \frac{\partial G^i}{\partial x'^k} dx^k . \quad (11)$$

Unter Einführung der Pfaffschen Formen  $\omega^i$  können wir das invariante Differential (7) auch auf die Gestalt

$$D\xi^i = d\xi^i + A_{kl}^i \xi^k \omega^l + \Gamma_{kl}^{*i} \xi^k dx^l = d\xi^i + \omega_k^i(d) \xi^k \quad (12)$$

bringen, wobei

$$\Gamma_{ik}^{*r} = \Gamma_{ik}^r - C_{is}^r \Gamma_{hk}^s x'^h \quad (13)$$

und

$$\omega_k^i(d) = A_{ki}^i \omega^l + \Gamma_{kl}^{*i} dx^l \quad (14)$$

gesetzt wurde. Wegen (8) können die  $\Gamma_{ik}^{*r}$  auf die für spätere wichtige Form

$$\Gamma_{ikl}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right) + C_{ikr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^l} - C_{ilr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^k} - C_{ikr} \frac{\partial G^r}{\partial x'^i} \quad (15)$$

gebracht werden. Der Vektor  $\xi^i$  wird vom Linienelement  $(x, dx)$  zum Nachbarlinienelement parallel übertragen, falls für sein invariantes Differential

$$D\xi^i = 0 \quad (16)$$

gilt. Die Parallelübertragung des Linienelementes, das wir ja statt durch  $(x, x')$  auch durch  $(x, l)$  geben können, wird daher durch

$$\omega^i(d) = 0 \quad (17)$$

charakterisiert. Die Parallelübertragung von  $l^i$  ist wie (11) zeigt, nur vom Nachbelpunkt  $(x + dx)$  abhängig. Wird der Vektor  $\xi^i$  von seinem Linienelement  $(x, x')$  zu dem benachbarten und parallelen Linienelement  $(x + dx, x' + dx')$  übertragen, so erhält man demnach wegen (12) und (17) für das invariante Differential

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma_{kl}^{*i} \xi^k dx^l \quad (18)$$

Die Bildung des invarianten Differentials kann auch auf Tensoren aus-

gedehnt werden, wenn man die dem Riccikalkül zugrunde liegenden Festsetzungen trifft, daß das invariante Differential eines Skalars mit dem gewöhnlichen Differential übereinstimmt und daß ferner der Operator  $D$  angewandt auf Tensorprodukte und Summen gleichartiger Tensoren die gleichen Regeln befolgt, wie das gewöhnliche Differential. Man erhält so für das invariante Differential des Tensors  $T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s}$  die Beziehung

$$DT_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s} = dT_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s} - \omega_{i_1}^j(d) T_{j \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s} \dots - \omega_{i_r}^j(d) T_{i_1 \dots j}{}^{k_1 \dots k_s} \dots + \omega_j^{k_1}(d) T_{i_1 \dots i_r}{}^{j \dots k_s} \dots + \omega_j^{k_s}(d) T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots j} \quad (19)$$

Die Parallelübertragung in Finslerschen Räumen hat die wichtige Eigenschaft, metrisch zu sein, d. h. sie erhält die Länge und den Winkel von Vektoren. Analytisch kommt dies durch

$$Dg_{ik} = 0 \quad (20)$$

zum Ausdruck.

Im folgenden benötigen wir noch den Prozeß der kovarianten Ableitung eines Tensors. Dazu zerlegen wir das invariante Differential (19) nach den Pfaffschen Formen  $\omega^i(d)$  und  $dx^i$ . Es gibt sich dann bei Beachtung von (11) bis (19)

$$DT_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s} = T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s}{}_{/j} dx^j + j + T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s}{}_{;j} \omega^j(d), \quad (21)$$

wobei

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s}{}_{/j} &= \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s}}{\partial x^j} - \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s}}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial G^m}{\partial x'^j} \\ &- \Gamma_{i_1 j}^{*m} T_{m \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s} \dots - \Gamma_{i_r j}^{*m} T_{i_1 \dots m}{}^{k_1 \dots k_s} \\ &+ \Gamma_{m j}^{*k_1} T_{i_1 \dots i_r}{}^{m \dots k_s} \dots + \Gamma_{m j}^{*k_s} T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots m} \end{aligned} \quad (22)$$

und

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s}{}_{;s} &= L \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s}}{\partial x'^j} - A_{i_1 j}^m T_{m \dots i_r}{}^{k_1 \dots k_s} \dots \\ &\dots - A_{i_r j}^m T_{i_1 \dots m}{}^{k_1 \dots k_s} + A_{m j}^{k_1} T_{i_1 \dots i_r}{}^{m \dots k_s} \dots \\ &\dots + A_{m j}^{k_s} T_{i_1 \dots i_r}{}^{k_1 \dots m}. \end{aligned} \quad (23)$$

(22) ist derjenige Tensor, der das invariante Differential bestimmt, wenn das Linienelement parallel übertragen wird, (23) derjenige, der die Änderung des Tensors bei bloßer Drehung des Linienelementes angibt. Dies geht aus (21) und der Bedeutung der  $\omega^i$  und  $dx^i$  unmittelbar hervor.

### § 3. Die Krümmung und Torsion

Um die Krümmung und Torsion des Raumes einfach beschreiben zu können, erweist es sich als zweckmäßig, die Cartansche  $\omega$ -Symbolik der äußeren Produkte und äußerer Ableitungen Pfaffscher Formen zu verwenden. Wir schicken zunächst das wenige voraus, das hier von diesem Kalkül verwendet wird<sup>5)</sup>.

Sind  $d_1, d_2, \dots, d_p$  miteinander vertauschbare Differentiationssymbole, so wird das äußere Produkt der Differentiale  $dx^{k_1}, dx^{k_2}, \dots, dx^{k_p}$  durch den Ausdruck

$$[dx^{k_1} dx^{k_2} \dots dx^{k_p}] = \begin{vmatrix} d_1 x^{k_1} \dots d_p x^{k_1} \\ \dots \dots \dots \\ d_1 x^{k_p} \dots d_p x^{k_p} \end{vmatrix} \quad (24)$$

definiert. Das äußere Produkt wechselt somit sein Vorzeichen, wenn zwei Differentiale vertauscht werden. Das äußere Produkt von Pfaffschen Formen wird nun dadurch erklärt, daß man bei Beachtung der Reihenfolge der Formen diese formal ausmultipliziert, die Produkte der Differentiale aber als äußere Produkte betrachtet. Es ergibt sich so

$$\begin{aligned} [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p] &= a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{pk_p} [dx^{k_1} \dots dx^{k_p}] \\ &= \begin{vmatrix} \omega_1(d_1) \dots \omega_1(d_p) \\ \dots \dots \dots \\ \omega_p(d_1) \dots \omega_p(d_p) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

wobei die  $\omega_i$  durch

$$\omega_i = a_{ik} dx^k \quad (26)$$

erklärte Pfaffsche Formen sind. Im häufig auftretenden Falle  $p = 2$  kommt demnach

$$[\omega \pi] = \omega(d) \pi(\delta) - \omega(\delta) \pi(d). \quad (25')$$

Die äußere Ableitung der Pfaffschen Form  $\omega$  wird durch

$$(\omega)' = \frac{\partial a_k}{\partial x^r} [dx^r dx^k] = [da_k dx^k] \quad (27')$$

definiert und entsprechend für eine äußere Form  $p$ -ten Grades

---

<sup>5)</sup> Für eine weitergehende Begründung sei etwa auf *E. Cartan* (1), (2) und *E. Kähler* (1) verwiesen.

$$\omega = a_{k_1 \dots k_p} [dx^{k_1} \dots dx^{k_p}] \quad (27)$$

$$(\omega)' = [da_{k_1 \dots k_p} dx^{k_1} \dots dx^{k_p}] .$$

Hieraus ergeben sich sofort folgende Regeln :

$$[\omega \pi]' = [(\omega)' \pi] - [\omega (\pi)'] , \quad (28)$$

$$(A \omega)' = A(\omega)' + [dA \cdot \omega] .$$

In (28) ist  $A$  eine Funktion, die nur von den Veränderlichen, aber nicht von den Differentialen derselben abhängt.

Sind  $D$  und  $\Delta$  die invarianten Differentiale, die den vertauschbaren Differentialen  $d$  und  $\delta$  entsprechen, so ist die Torsion des Raumes durch das Koeffizientensystem der Form

$$(\Delta D - D\Delta) x^i = \Omega^i \quad (29)$$

definiert. Man kann für (29) auf Grund der Definition (12) des invarianten Differentials und (25) die Form  $\Omega^i$  als äußere Form 2-ten Grades

$$\Omega^i = [dx^k \omega_k^i] = A_{kh}^i [dx^k \omega^h] \quad (29')$$

darstellen. Die Torsion ist also durch den symmetrischen Tensor  $A_{kh}^i$  bestimmt.

Die Krümmung des Raumes wird durch das Koeffizientensystem der Form

$$(\Delta D - D\Delta) \xi^i = \Omega_k^i \xi^k \quad (30)$$

definiert, wobei  $\xi^i$  ein beliebiger Vektor ist. Eine entsprechende Rechnung, die von (29') zu (29) führt, erlaubt es auch hier, die  $\Omega_k^i$  mittels einer äußeren Form darzustellen. Man erhält so :

$$\Omega_i^k = [\omega_i^s \omega_s^k] - (\omega_i^k)' . \quad (31)$$

Wir können die äußere Form (31) entsprechend (29) auf eine Gestalt bringen, in der ihre Differentiale auftreten, entsprechend der Zerlegung:

$$\Omega_i^k = \frac{1}{2} S_{ihj}^k [\omega^h \omega^j] + P_{ihj}^k [dx^h \omega^j] + \frac{1}{2} R_{ihj}^k [dx^h dx^j] . \quad (32)$$

Es muß aber bemerkt werden, daß diese Zerlegung wegen der Beziehung

$$l^i \omega_i = 0$$

nicht eindeutig ist. Sie wird es, wenn wir die Forderung

$$\begin{aligned} P_{ihj}^k l^j &= P_{ih0}^k = 0, \\ S_{ihj}^k l^j &= S_{ih0}^k = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

stellen<sup>6</sup>). Entsprechend der Schreibweise in (33) wollen wir die Überschiebung einer Größe mit dem Einheitsvektor  $l^i$  durch Setzen einer Null andeuten.

#### § 4. Finslersche Räume mit absolutem Parallelismus von Linienelementen

Damit wir in der Finslerschen Mannigfaltigkeit ein Linienelement  $(x, x')$  [genauer  $(x^i, l^i)$ ] beliebig, d. h. unabhängig vom Weg parallel verschieben können, müssen die Differentialgleichungen (17) der Parallelübertragung

$$\omega^i = 0$$

vollständig integriert sein. Nach dem Theorem von Frobenius<sup>7</sup>) ist dazu notwendig und hinreichend, daß auf Grund von (17)

$$(\omega^i)' = 0 \quad (34)$$

wird. Überschieben wir (32) mit  $l^i$ , wobei wir die linke Seite durch (31) ersetzen, so kommt zunächst

$$\begin{aligned} l^i [\omega_i^s \omega_s^k] - l^i (\omega_i^k)' &= \frac{1}{2} S_{ohj}^k [\omega^h \omega^j] + P_{ohj}^k [dx^h \omega^j] \\ &\quad + \frac{1}{2} R_{ohj}^k [dx^h dx^j]. \end{aligned} \quad (35)$$

Wegen

$$l^i \omega_i^k = \omega^k - dl^k$$

und der Rechenregel (28) hat man dann

$$l^i [\omega_i^s \omega_s^k] - l^i (\omega_i^k)' = [\omega^s \omega_s^k] - (\omega^k)'.$$

Auf der rechten Seite von (35) verschwindet der erste Posten, da die Berechnung der rechten Seite von (31)

---

<sup>6</sup>) Vgl. hiezu den Satz über alternierende Formen in den  $\omega^i$  bei *O. Varga* (2), insbesondere S. 203—206.

<sup>7</sup>) Vgl. etwa *E. Cartan* (4) S. 193.

$$S_{ihj}^k = A_{ij}^p A_{ph}^k - A_{ih}^p A_{pj}^k \quad (36)$$

ergibt und (10) gilt. Man erhält demnach aus (35) :

$$(\omega^k)' = [\omega^s \omega_s^k] - P_{ohj}^k [dx^h \omega^j] - \frac{1}{2} R_{ohj}^k [dx^h dx^j]. \quad (35')$$

(35') zeigt nun, daß die Frobeniussche Bedingung dann und nur dann erfüllt ist, wenn

$$R_{ohj}^k = 0 \quad (36')$$

wird. (36') ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein absoluter Parallelismus der Linienelemente existiert<sup>8)</sup>. Wir wollen die wichtigen Differentialgleichungen (17) und Integrabilitätsbedingungen noch in ausführlicherer Form anschreiben. Beachtet man die Definitionsgleichung (11) der  $\omega^i$  und die Beziehungen (8), so erhält man die mit (17) äquivalenten Gleichungen

$$dx'^i = \frac{dL}{L} x'^i - \Gamma_{pr}^{*i} x'^p dx^r = \frac{dL}{L} x'^i - \frac{\partial G^i}{\partial x'^r} dx^r. \quad (17')$$

Durchführung der Rechnungen auf der rechten Seite von (31) ergibt

$$\begin{aligned} R_{ihj}^k &= \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*k}}{\partial x'^s} \frac{\partial G^s}{\partial x'^r} - \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^{*k}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{*k}}{\partial x'^s} \frac{\partial G^s}{\partial x'^h} \right) \\ &+ C_{is}^k \left( \frac{\partial^2 G^s}{\partial x'^h \partial x^j} - \frac{\partial^2 G^s}{\partial x'^j \partial x^h} - \frac{\partial^2 G^s}{\partial x'^h \partial x'^p} \frac{\partial G^p}{\partial x'^j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 G^s}{\partial x'^j \partial x'^p} \frac{\partial G^p}{\partial x'^h} \right) + \Gamma_{ih}^{*s} \Gamma_{sj}^{*h} - \Gamma_{ij}^{*s} \Gamma_{sh}^{*k} \end{aligned} \quad (37)$$

Überschieben wir (37) mit  $l^i$ , so ergibt sich

$$R_{ohj}^k = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial^2 G^k}{\partial x'^h \partial x^j} - \frac{\partial^2 G^k}{\partial x'^j \partial x^h} - \frac{\partial^2 G^k}{\partial x'^h \partial x'^p} \frac{\partial G^p}{\partial x'^j} + \frac{\partial^2 G^k}{\partial x'^j \partial x'^p} \frac{\partial G^p}{\partial x'^h} \right). \quad (37')$$

Wir können demnach  $R_{ihj}^k$  auch so darstellen :

$$\begin{aligned} R_{ihj}^k &= \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*k}}{\partial x'^s} \frac{\partial G^s}{\partial x'^j} - \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^{*k}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{*k}}{\partial x'^s} \frac{\partial G^s}{\partial x'^h} \right) \\ &+ \Gamma_{ih}^{*s} \Gamma_{sj}^{*k} - \Gamma_{ij}^{*s} \Gamma_{sh}^{*k} + A_{is}^k R_{ohj}^s. \end{aligned} \quad (37'')$$

<sup>8)</sup> Siehe E. Cartan (3) S. 38.

In einem Finslerschen Raum mit absolutem Parallelismus der Linienelemente gilt demnach für den Krümmungstensor

$$R_{ihj}^k = \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^{*k}}{\partial x'^s} \frac{\partial G^s}{\partial x'^j} - \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^{*k}}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{*k}}{\partial x'^s} \frac{\partial G^s}{\partial x'^h} \right) + \Gamma_{ik}^{*s} \Gamma_{sj}^{*k} - \Gamma_{ij}^{*s} \Gamma_{sh}^{*k}. \quad (37'')$$

Die Bedingung für die vollständige Integrabilität von (17), (17') ist demnach durch

$$\frac{\partial^2 G^k}{\partial x'^h \partial x^j} - \frac{\partial^2 G^k}{\partial x'^j \partial x^h} - \frac{\partial^2 G^k}{\partial x'^h \partial x'^p} \frac{\partial G^p}{\partial x'^j} + \frac{\partial^2 G^k}{\partial x'^j \partial x'^p} \frac{\partial G^p}{\partial x'^h} = 0. \quad (36)$$

bestimmt.

## § 5. Zuordnung der nichteuklidischen Räume der Krümmung $K$

Es sei

$$x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n) \quad (38)$$

eine Lösung von (17), die in dem Raum oder einem Teile desselben definiert ist. Dabei können in einem Punkt  $x_0^i$  die Anfangswerte  $x_0^{i'}$  beliebig vorgeschrieben werden.

In dem betrachteten Gebiet definiert der Feldvektor (38) ein Feld von parallelen Linienelementen. In diesem Felde werden sämtliche Größen Ortsfunktionen, insbesondere gilt dies für den Maßtensor

$$g_{ik}(x^1, \dots, x^n, x^{1'}(x), \dots, x^{n'}(x)) \equiv \bar{g}_{ik}(x^1, \dots, x^n). \quad (39)$$

Wir stellen nun die Forderung, daß  $\bar{g}_{ik}$  der Maßtensor eines nichteuklidischen Raumes der Krümmung  $K$  sei. Wir führen die bekannte Forderung an, der in diesem Falle die  $\bar{g}_{ik}$  genügen müssen. Bezeichnen wir die aus den  $\bar{g}_{ik}$  abgeleiteten Christoffelschen Symbole mit  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ , so gilt

$$\bar{R}_{ihj}^k = \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ih}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ij}^k}{\partial x^h} + \bar{\Gamma}_{ih}^s \bar{\Gamma}_{sj}^k - \bar{\Gamma}_{ij}^s \bar{\Gamma}_{sh}^k \equiv K(\delta_j^k \bar{g}_{ih} - \delta_h^k \bar{g}_{ij}). \quad (40)$$

Wir wollen nun untersuchen, welche Relationen die Beziehungen (40) im Finslerschen Raum nach sich ziehen. Dazu müssen wir feststellen, wie sich die  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$  und deren Ableitungen durch Größen der Finslerschen Geo-

metrie ausdrücken. Aus der Bedeutung der Christoffelschen Symbole und der Gestalt (39) des Fundamentaltensors  $\bar{g}_{ik}$  folgt zunächst

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ilk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{il}}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \frac{\partial x'^m}{\partial x^l} \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^m}{\partial x^l}.\end{aligned}$$

Beachten wir, daß der Feldvektor (38) der Differentialgleichung (17') genügt, daß ferner für die Ableitungen  $\frac{\partial g_{il}}{\partial x'^m}$  die erste Relationengruppe (8) gilt und berücksichtigen weiter (10) und (15), so ergibt sich

$$\bar{\Gamma}_{ilk}(x^1, x^2, \dots, x^n) \equiv \Gamma_{ilk}^*(x^1, \dots, x^n, x'^1(x), \dots, x'^n(x)). \quad (42).$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation bei nochmaliger Berücksichtigung von (17') und hieraus, daß die  $\Gamma_{ilk}^*$  von nullter Dimension homogen in den  $x'^i$  sind.

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}_{ilk}}{\partial x^r} = \frac{\partial \Gamma_{ilk}^*}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{ilk}^*}{\partial x'^m} \frac{\partial^{hm}}{\partial x'^r}. \quad (43)$$

Wegen der Beziehungen (42) und (43) gilt demnach auf Grund von (39) und (40) identisch in  $x^1, \dots, x^n$ ,

$$\begin{aligned}R_{ihj}^k(x^1 \dots x^n, x'^1(x) \dots x'^n(x)) \equiv K[\delta_j^k g_{ih}(x^1 \dots x^n, x'^1(x) \dots x'^n(x)) \\ - \delta_h^k g_{ij}(x^1 \dots x^n, x'^1(x) \dots x'^n(x))].\end{aligned} \quad (44)$$

Beachten wir nun, daß wir entsprechend der Bemerkung zu (38) die Werte der  $x'^i$  willkürlich wählen können, so folgt, daß die Beziehung (44) auch eine Identität in den  $x^i$  und  $x'^i$  wird, d. h. es gilt

$$R_{ihj}^k = K(\delta_j^k g_{ih} - \delta_h^k g_{ij}) \quad (45)$$

identisch in  $x^i, x'^i$ .

*Die Tensorrelationen (36) und (45) sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein Finslerscher Raum ein in unserem Sinne verallgemeinerter nichteuklidischer Raum wird.*

Wir zeigen nun noch — wie einleitend bemerkt — daß für den Fall, in dem die Parallelübertragung unabhängig von dem Linienelement ist,

falls dasselbe parallel mitübertragen wird, der Raum in den gewöhnlichen nichteuklidischen Raum übergeht. In unserer Deutung heißt dies, daß alle irgendeiner Richtung zugeordneten nichteuklidischen Räume zusammenfallen, falls die Parallelübertragung dieser die gleiche ist. Die Parallelübertragung bei parallel mitgeführtem Linienelement genügt wegen (18) der Gleichung

$$d\xi^i + \Gamma_{kl}^{*i} \xi^k dx^l = 0 . \quad (18')$$

Soll dieselbe unabhängig von  $x'^i$  sein, so muß

$$\frac{\partial \Gamma_{kl}^{*i}}{\partial x'^r} = 0 . \quad (46)$$

Wählt man in (45)  $\delta = k$  aber  $h \neq k$ , dann folgt, daß die  $g_{ik}$  nur Funktionen des Ortes sind w. z. b. w.

## § 6. Aufbau des Raumes

### ausgehend von einer affin-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit

Im Vorangehenden wurde gezeigt, durch welche Bedingungen ein Finslerscher Raum zu einem verallgemeinerten nichteuklidischen wird. Zum Aufbau des Raumes müssen wir aber nicht von einem Finslerschen Raum ausgehen. Es soll nun gezeigt werden, wie man, ausgehend von einer affin-zusammenhängenden Mannigfaltigkeit von Linienelementen <sup>9)</sup>, diesen Raum bestimmen kann. Eine  $(2n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit von Linienelementen heißt dabei affin-zusammenhängend, wenn das invariante Differential eines Vektors  $\xi^i$  im Linienelement  $(x, x')$  beim Übergang zum Nachbarlinienelement  $(x + dx, x' + dx')$  von der Gestalt

$$D\xi^i = d\xi^i + C_{kl}^i(x, x') \xi^k dx^l + \Gamma_{kl}^i(x, x') \xi^k dx'^l \quad (47)$$

ist. Durch

$$D\xi^i = 0 \quad (48)$$

ist die Parallelübertragung des Vektors  $\xi^i$  erklärt. Aus der Forderung, daß das invariante Differential eines Linienelementes  $(x, x')$  mit dem gewöhnlichen Differential zusammenfällt, falls dieses sich nur um seinen Mittelpunkt dreht, folgt

$$C_{kl}^i x'^k = 0 . \quad (49)$$

---

<sup>9)</sup> Der Begriff einer solchen tritt zuerst auf bei *O. Varga* (1).

Die Parallelübertragung von Linienelementen ist durch

$$dx'^i = -\Gamma_{kl}^i x'^k dx^l \quad (50)$$

bestimmt. Das invariante Differential eines Vektors hat für den Fall, daß das Nachbarlinienelement im obigen Sinne parallel übertragen wird, die Gestalt

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma_{kl}^{*i} \xi^k dx^l \quad (51)$$

und der Parallelismus ist durch

$$d\xi^i = \Gamma_{kl}^{*i} \xi^k dx^l \quad (52)$$

bestimmt. In (51) wurde dabei

$$\Gamma_{kl}^{*i} = \Gamma_{kl}^i - C_{kr}^i x'^m \Gamma_{ml}^r$$

gesetzt.

Der affinzusammenhängende Raum besitzt eine Krümmung und Torsion, die entsprechend wie oben durch (28) und (30) erklärt wird. Die Torsion wird dann durch die beiden Tensoren

$$C_{kl}^k, \quad T_{rl}^h = \frac{1}{2} (\Gamma_{kl}^{*h} - \Gamma_{lk}^{*h}) \quad (53)$$

bestimmt.

Die Krümmungstensoren sind die Koeffizienten der äußeren Form

$$\begin{aligned} (\Delta D - D\Delta) \xi^k &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ilm}^k [\pi^l \pi^m] + \Pi_{ilm}^k [dx^l \pi^m] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} R_{ilm}^k [dx^l dx^m] \right\} \xi^i . \end{aligned} \quad (54)$$

In (54) ist  $\pi^l(d)$  das invariante Differential der Richtung  $x'^i$ . Soll die Parallelübertragung der Linienelemente unabhängig vom Weg sein, so müssen ihre Differentialgleichungen (50) vollständig integrabel sein. Wie oben findet man als Bedingung für die vollständige Integrabilität

$$\sum_{ilm}^i \equiv x'^r \sum_{rlm}^i = 0 . \quad (55)$$

Wir setzen nun noch voraus, daß von den beiden Torsionstensoren der erste symmetrisch

$$C_{kl}^i = C_{lk}^i , \quad (56)$$

der zweite Nulltensor sei d. h.

$$\Gamma_{kl}^{*i} = \Gamma_{lk}^{*i} . \quad (57)$$

Wir ordnen nun jedem Feld von parallelen Linienelementen wie oben einen nichteuklidischen Raum der gleichen konstanten Krümmung  $K$  zu. Dies heißt, daß wir :

*erstens jedem Linienelement  $(x, x')$  eine positiv definite quadratische Maßbestimmung zugeordnet haben ;*

*zweitens fordern wir, daß die Übertragung metrisch sei.*

Dadurch wird der affin zusammenhängende Raum von Linienelementen zu einem euklidisch zusammenhängenden Raum von Linienelementen. In diesem drücken sich die Übertragungsparameter, wie unmittelbar einzusehen ist, genau so durch die  $g_{ik}$  aus, wie im obigen Fall. Die Grundfunktion  $L(x, x')$  unseres verallgemeinerten nichteuklidischen Raumes ist durch

$$L^2(x, x') \equiv g_{ik}(x, x') x'^i x'^k \quad (58)$$

bestimmt.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- E. Cartan* (1) *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann & Cie. 1922.  
 (2) *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann*. Paris, Gauthier-Villars, 1928.  
 (3) *Les espaces de Finsler*, Actualités scientifiques et industrielles 79, Paris, Hermann & Cie. 1934.  
 (4) *La théorie des groupes finis et continus et la géometrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, fasc. XVIII des Cahiers scientifiques, Paris 1938, Gauthiers-Villars.
- P. Finsler* (1) *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Diss. Göttingen 1918.
- E. Kähler* (1) *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Hamb. math. Einzelschriften 16. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1934.
- O. Varga* (1) *Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affin-zusammenhängenden Räume von Linienelementen*, Lotos, Prag, Bd. 84, S. 1—4, 1936.  
 (2) *Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen*, Deutsche Mathematik, Jahrg. 6, S. 192—212.  
 (3) *Linienelementträume, deren Zusammenhang durch eine beliebige Transformationsgruppe bestimmt ist*, Acta scientiarum mathematicarum, Szeged, Tom. XI, S. 55—62, 1946.

(Eingegangen den 17. Oktober 1946.)