

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	19 (1946-1947)
Artikel:	Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert.
Autor:	Nagy, Béla de S de
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-17351

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert

Par BÉLA de Sz. NAGY, Szeged

Le calcul des perturbations, créé par Lord Rayleigh et M. E. Schrödinger, et dont on fait souvent usage sans la Mécanique quantique, a pour objet de calculer les valeurs propres et les éléments propres d'une transformation autoadjointe $A(\varepsilon)$ de l'espace de Hilbert¹⁾, dépendant du paramètre ε sous la forme d'une série entière : $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$, à condition qu'on les connaisse pour la transformation „non-perturbée“ A_0 , correspondant à $\varepsilon = 0$. λ_0 étant une valeur propre de A_0 et f_0 un élément propre normé correspondant, on fait l'hypothèse que la valeur propre $\lambda(\varepsilon)$ et l'élément propre normé $f(\varepsilon)$ perturbés peuvent être cherchés également sous la forme des séries entières de ε , commençant par λ_0 et f_0 : $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$ et $f(\varepsilon) = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$. Les coefficients λ_k et f_k peuvent alors être calculés, l'un après l'autre, à l'aide des équations récurrentes

$$\begin{aligned} A_0 f_0 &= \lambda_0 f_0, & (f_0, f_0) &= 1, \\ A_0 f_1 + A_1 f_0 &= \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0, & (f_0, f_1) + (f_1, f_0) &= 0, \\ A_0 f_2 + A_1 f_1 + A_2 f_0 &= \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0, & (f_0, f_2) + (f_1, f_1) + (f_2, f_0) &= 0, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

équations qu'on obtient en comparant les coefficients des puissances de ε dans les identités

$$\begin{aligned} (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots)(f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots) &= \\ = (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots)(f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots) \end{aligned}$$

et

$$(f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots, f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots) = 1.$$

La première démonstration rigoureuse de cette hypothèse est due à M. F. Rellich²⁾. Ses théorèmes portent sur les valeurs propres de multipli-

¹⁾ Pour une introduction à la théorie de l'espace de Hilbert, nous renvoyons par exemple au livre de l'auteur: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. V. fasc. 5 (Springer-Verlag, Berlin 1942).

²⁾ F. Rellich, Störungstheorie der Spektralzerlegung, I. Math. Annalen 113 (1936) 600—619; II. Ibidem 113 (1936) 677—685; III. Ibidem 116 (1939) 555—570; IV. Ibidem 117 (1940) 356—382; V. Ibidem 118 (1942) 462—484. (La partie II étudie les perturbations continues, mais non analytiques.) Voir encore la note de E. Hölder, Über die Vielfachheiten gestörter Eigenwerte, Math. Annalen 113 (1936) 620—629.

cité finie, mais ils ne donnent aucun renseignement sur les valeurs propres de multiplicité infinie ou sur la partie continue du spectre.

Notre résultat principal est le théorème I, qui s'applique à une partie quelconque isolée du spectre. En l'appliquant au cas particulier d'une valeur propre isolée de multiplicité finie, on obtient une nouvelle démonstration du théorème principal de Rellich (théorème III). Cette démonstration a, entre autres, l'avantage de ne pas faire appel au théorème de Puiseux et au théorème de Weierstrass sur les zéros des fonctions analytiques de plusieurs variables, dont M. Rellich a fait usage.

Pour les valeurs propres simples (théorème II) ou multiples, mais dont se détachent, déjà en première approximation, des valeurs propres perturbées simples (théorème IV), nous obtenons des renseignements même sur la rapidité de convergence des séries en question, plus précis que ceux obtenus par M. Rellich par une voie tout à fait différente.

Une première rédaction de ce Mémoire, en langue hongroise, a été présentée en 1943 à l'Académie hongroise³⁾.

§ 1. Quelques définitions et théorèmes auxiliaires

Dans ce qui suit, ε désigne toujours une quantité réelle, variant dans un voisinage de 0. Nous disons que *le nombre* $\lambda(\varepsilon)$, *l'élément* $f(\varepsilon)$ de l'espace de Hilbert \mathfrak{H} et *la transformation linéaire bornée* $T(\varepsilon)$ de \mathfrak{H} en lui-même, dépendant de ε , sont *réguliers* sur l'intervalle $|\varepsilon| < \varrho$, si elles y peuvent être représentées par des séries entières convergentes de ε : $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$, $f(\varepsilon) = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$, $T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots$, les coefficients λ_k , f_k , T_k étant respectivement des nombres, des éléments de \mathfrak{H} et des transformations linéaires bornées de \mathfrak{H} en lui-même. Tel étant le cas, on a

$$\overline{\lim}_k |\lambda_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{\varrho} , \quad \overline{\lim}_k \|f_k\|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{\varrho} \text{ et } \overline{\lim}_k \|T_k\|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{\varrho} ,$$

ou, ce qui revient au même, à tout r positif plus petit que ϱ on peut trouver des constantes M , M' , M'' (dépendant de r) de façon qu'on ait

$$|\lambda_k| \leq \frac{M}{r^k} , \quad \|f_k\| \leq \frac{M'}{r^k} \quad \text{et} \quad \|T_k\| \leq \frac{M''}{r^k} .$$

³⁾ Imprimée dans les comptes rendus de la Classe des Sciences: Matematikai és Természettudományi Értesítő 61 (1942) 755—774.

En effet, les séries entières en question étant convergentes pour $\varepsilon = r$, on a nécessairement : $r^k \lambda_k \rightarrow 0$, $r^k f_k \rightarrow 0$ et $r^k T_k \rightarrow 0$, et, à plus forte raison, $|r^k \lambda_k| \leq M$, $\|r^k f_k\| \leq M'$ et $\|r^k T_k\| \leq M''$ ⁴⁾.

1. *Lorsque $\lambda(\varepsilon)$, $\lambda'(\varepsilon)$ sont des nombres, $f(\varepsilon)$, $f'(\varepsilon)$ des éléments de \mathfrak{H} et $T(\varepsilon)$, $T'(\varepsilon)$ des transformations linéaires bornées de \mathfrak{H} , réguliers sur l'intervalle $|\varepsilon| < \varrho$, alors $\lambda(\varepsilon) \lambda'(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon) f(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon) T(\varepsilon)$, $(f(\varepsilon), f'(\varepsilon))$, $T(\varepsilon) f(\varepsilon)$ et $T(\varepsilon) T'(\varepsilon)$ sont aussi réguliers sur le même intervalle, et leurs séries s'obtiennent par multiplication formelle des séries des facteurs.*

C'est une conséquence immédiate du fait que, r étant un nombre positif arbitraire plus petit que ϱ , les séries des facteurs sont majorées, pour $|\varepsilon| < r$, par des séries géométriques convergentes de la forme $\sum_k |\varepsilon|^k \frac{M}{r^k}$.

Le théorème suivant dont nous ne ferons pas usage dans la suite, a pour but de montrer que les transformations autoadjointes $A(\varepsilon)$ que nous allons étudier, sont précisément celles dont le domaine est indépendant de ε . Ce théorème est dû à M. Rellich⁵⁾; qu'il nous soit permis de le reproduire avec sa démonstration.

2. *Soit $A(\varepsilon)$ une transformation symétrique de \mathfrak{H} , bornée ou non, dépendant du paramètre ε , mais dont le domaine \mathfrak{D} (partout dense dans \mathfrak{H}) est indépendant de ε . De plus, $A(0)$ soit autoadjointe. Pour tout f de \mathfrak{D} soit $A(\varepsilon)f$ un élément régulier sur $|\varepsilon| < \varrho$. Alors il y a des transformations symétriques $A_0 = A(0)$, A_1, A_2, \dots , définies sur le domaine \mathfrak{D} , ainsi que des constantes $p, a, b \geq 0$, telles que $A(\varepsilon)f = A_0 f + \varepsilon A_1 f + \varepsilon^2 A_2 f + \dots$ et $\|A_k f\| \leq p^{k-1} (a \|f\| + b \|A_0 f\|)$ pour $k = 1, 2, \dots$, pour tout élément f de \mathfrak{D} et pour $|\varepsilon| < \varrho$.*

Soit A_k la transformation qui fait correspondre à l'élément f de \mathfrak{D} le coefficient de ε^k dans la série entière de $A(\varepsilon)f$; elle est évidemment linéaire et symétrique. On a $A(\varepsilon)f = A_0 f + \varepsilon A_1 f + \varepsilon^2 A_2 f + \dots$ pour f de \mathfrak{D} et pour $|\varepsilon| < \varrho$. $A_0 = A(0)$ étant autoadjointe, $R = (A_0 + iI)^{-1}$ existe et transforme l'espace \mathfrak{H} dans la variété linéaire \mathfrak{D} . Les transformations $B(\varepsilon) = A(\varepsilon)R$ et $B_k = A_k R$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) sont donc définies partout dans \mathfrak{H} ; pour $|\varepsilon| < \varrho$ on a $B(\varepsilon) = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots$. Montrons que les B_k sont bornées.

⁴⁾ Comme nous n'avons pas exigé que la série de $T(\varepsilon)$ converge au sens uniforme, c'est-à-dire en norme, on a $r^k T_k \rightarrow 0$, mais non nécessairement $\|r^k T_k\| \rightarrow 0$. Nous faisons usage du fait qu'une suite convergente de transformations linéaires bornées admet une borne commune.

⁵⁾ L. c. ²⁾ V. § 2.

Soit h un élément quelconque de \mathfrak{H} et soit h_n une suite tirée de \mathfrak{D} , convergeant vers h . Pour tout f de \mathfrak{H} on a $(B_k f, h) = \lim_n (B_k f, h_n) =$

$$\lim_n (A_k R f, h_n) = \lim_n (f, R^* A_k h_n), \text{ d'où l'on voit que la suite } R^* A_k h_n$$

$(n = 0, 1, \dots)$ est faiblement convergente. Soit h^* sa limite faible, alors $(B_k f, h) = (f, h^*)$; h est donc dans le domaine de B_k^* (et $B_k^* h = h^*$). Les transformations B_k , B_k^* , et avec elles aussi la transformation symétrique $B_k^* B_k$, sont donc définies pour tous les éléments de \mathfrak{H} . D'après un théorème connu de Hellinger et Toeplitz, une transformation symétrique dont le domaine est l'espace entier, est bornée. Donc $B_k^* B_k$, et avec elle B_k , sont bornées.

$B(\varepsilon)$ étant donc une transformation bornée régulière sur $|\varepsilon| < \varrho$, à tout r ($0 < r < \varrho$) correspond un $M = M(r)$ de façon que $\|B_k\| \leq \frac{M}{r^k}$ ($k = 0, 1, \dots$). Il en vient que

$$\|A_k f\| = \|B_k(A_0 + iI)f\| \leq \frac{M}{r^k} \|(A_0 + iI)f\| \leq \frac{M}{r^k} (\|A_0 f\| + \|f\|)$$

pour tout f de \mathfrak{D} , ce qui achève la démonstration.

Le théorème suivant jouera un rôle important dans la démonstration des théorèmes I—IV :

3. Soient P et Q les projections (orthogonales) sur les sous-espaces \mathfrak{M} et \mathfrak{N} de \mathfrak{H} , et soit $\|Q - P\| < 1$. La transformation

$$U = Q(I + PHP)^{-\frac{1}{2}}P = Q \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (PHP)^\nu P$$

où $H = Q - P$, est partiellement isométrique ayant le domaine initial \mathfrak{M} et le domaine final \mathfrak{N} , c'est-à-dire que $U^* U = P$ et $U U^* = Q$. Par conséquent, \mathfrak{M} et \mathfrak{N} ont la même dimension ⁶).

Tout d'abord, la condition $\|PHP\| \leq \|H\| < 1$ assure l'existence de $(I + PHP)^{-\frac{1}{2}}$, ainsi que la convergence de son développement. L'équation $U^* U = P$ vient immédiatement de

$$U^* U = P(I + PHP)^{-\frac{1}{2}} Q Q(I + PHP)^{-\frac{1}{2}} P,$$

en observant que P est permutable avec $(I + PHP)^{-\frac{1}{2}}$ et que

$$PQQP = PQP = P(P + H)P = P + PHP = P(I + PHP).$$

⁶) Le dernier énoncé a été démontré déjà dans le livre cité de l'auteur, p. 58.

Quant à la seconde équation, observons d'abord que

$$U U^* = Q (I + P H P)^{-\frac{1}{2}} P P (I + P H P)^{-\frac{1}{2}} Q$$

annule tous les éléments orthogonaux à \mathfrak{N} . D'autre part, elle laisse invariants tous les éléments de la forme $g = U f$: $U U^* g = U U^* U f = U (U^* U) f = U P f = U f = g$. Ces éléments g forment un sous-espace de \mathfrak{H} , contenu dans \mathfrak{N} . La démonstration de l'équation $U U^* = Q$ sera achevée, dès que nous aurons montré que ce sous-espace coïncide avec \mathfrak{N} . Or, en cas contraire, il y aurait un élément $h \neq 0$ de \mathfrak{N} , tel que $(h, U f) = 0$ pour tous les f de \mathfrak{H} . Mais alors $(U^* h, f) = 0$ pour tout f , donc $U^* h = 0$, $P(I + P H P)^{-\frac{1}{2}} Q h = 0$ et

$$Ph = PQh = (I + PHP)^{\frac{1}{2}} (I + PHP)^{-\frac{1}{2}} PQh = 0 .$$

Les relations $Q h = h$ et $P h = 0$ entraînent que $H h = h$, en contradiction avec $\|H\| < 1$.

§ 2. La perturbation d'une partie isolée quelconque du spectre

Dans ce § nous allons démontrer le

Théorème I. Soient A_0, A_1, A_2, \dots des transformations linéaires symmétriques de \mathfrak{H} , ayant le même domaine \mathfrak{D} ; de plus, A_0 soit auto-adjointe et l'on ait $\|A_k f\| \leq p^{k-1} (a \|f\| + b \|A_0 f\|)$ ($k = 1, 2, \dots$) pour tout f de \mathfrak{D} ; p, a et b étant des constantes réelles non négatives.

a) La série $A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$ converge pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p}$ et a pour somme une transformation symétrique $A(\varepsilon)$ ayant le domaine \mathfrak{D} . Du moins pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p+b}$, $A(\varepsilon)$ est même autoadjointe. Soit alors $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}(\varepsilon)$ sa représentation spectrale.

b) Supposons que l'intervalle $\Delta = [\mu_1, \mu_2]$ renferme une partie isolée du spectre de A_0 , ou, d'une manière plus précise, qu'il existe deux intervalles ouverts de longueur d , $0 < d \leq \mu_2 - \mu_1$, ayant comme centres μ_1 et μ_2 et ne contenant aucun point du spectre de A_0 . Alors, pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p+a}$, les intervalles de longueur $d(\varepsilon) = d \left(1 - \frac{|\varepsilon| \alpha}{1 - |\varepsilon| p} \right)$ autour des centres μ_1 et μ_2 , ne contiennent aucun point du spectre de $A(\varepsilon)$; ici on a posé

$$\alpha = \frac{2a}{d} + 2b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d} + \frac{\delta}{2d} \right), \quad \lambda_0 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \text{ et } \delta = \mu_2 - \mu_1 - d .$$

Les transformations $P_A(\varepsilon) = E_{\mu_2}(\varepsilon) - E_{\mu_1}(\varepsilon)$ et $A(\varepsilon)P_A(\varepsilon)$ sont régulières : $P_A(\varepsilon) = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots$, $A(\varepsilon)P_A(\varepsilon) = \lambda_0 P_A(\varepsilon) + B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots$, et les coefficients satisfont aux inégalités

$$\|P_k\| \leq \left(1 + \frac{2\delta}{\pi d}\right) \alpha(p + \alpha)^{k-1}, \quad \|B_k\| \leq \frac{\delta + d}{2} \left(1 + \frac{2\delta}{\pi d}\right) \alpha(p + \alpha)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

La dimension du sous-espace $\mathfrak{M}_A(\varepsilon) = P_A(\varepsilon)\mathfrak{H}$ est indépendante de ε .

Démonstration. a) Comme

$$\left\| \sum_{k=m}^n \varepsilon^k A_k f \right\| \leq \sum_{k=m}^n |\varepsilon|^k p^{k-1} (a \|f\| + b \|A_0 f\|) \quad (0 < m < n),$$

la série $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k f$ converge sur l'intervalle $|\varepsilon| < \frac{1}{p}$, quel que soit f de \mathfrak{D} ; $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$ est donc une transformation symétrique, ayant le domaine \mathfrak{D} .

Soit z un point dans le plan complexe G , ayant une distance positive l_z au spectre de A_0 . La transformation $R_z = (A_0 - zI)^{-1}$ est alors partout définie et bornée :

$$\|R_z\| \leq \frac{1}{l_z}. \quad (1)$$

Comme R_z transforme l'espace entier dans \mathfrak{D} , les produits $A_k R_z$ ($k = 0, 1, \dots$) ont pour domaine l'espace entier. Il s'ensuit de la représentation intégrale

$$A_0 R_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda - z} dE_{\lambda}(0)$$

que

$$\|A_0 R_z\| = \max_{\lambda} \left| \frac{\lambda}{\lambda - z} \right| = m_z,$$

λ parcourant le spectre de A_0 . Pour $k = 1, 2, \dots$ et pour tout f de \mathfrak{H} on a

$$\|A_k R_z f\| \leq p^{k-1} (a \|R_z f\| + b \|A_0 R_z f\|) \leq p^{k-1} \left(\frac{a}{l_z} + b m_z \right) \|f\|,$$

donc

$$\|A_k R_z\| \leq p^{k-1} \left(\frac{a}{l_z} + b m_z \right) \quad (2)$$

et

$$\|(A(\varepsilon) - A_0) R_z\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k R_z \right\| \leq \frac{|\varepsilon|}{1 - |\varepsilon|p} \left(\frac{a}{l_z} + b m_z \right).$$

Soit η une valeur arbitraire fixée de ε telle que $|\eta| < \frac{1}{p+b}$; pour r suffisamment grand on aura encore $|\eta| < \frac{1}{p+b+\frac{a}{r}}$. Pour $z = \pm ir$ on a $l_z \geq r$ et $m_z \leq 1$, donc

$$\|(A(\eta) - A_0) R_{\pm ir}\| \leq \frac{|\eta|}{1 - |\eta| p} \left(\frac{a}{r} + b \right) < 1.$$

Il s'ensuit que la transformation $T = I + (A(\eta) - A_0) R_{\pm ir}$ admet une inverse partout définie et bornée ; il en est alors de même pour le produit $T(A_0 \mp irI) = A(\eta) \mp irI$. La transformée cayleyenne de $H = \frac{1}{r} A(\eta)$, c'est-à-dire $V_H = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ est partout définie et ses valeurs remplissent l'espace entier. Cela entraîne que \mathfrak{H} , et avec elle aussi $A(\eta)$, sont autoadjointes.

b) Soit C le lieu des points du plan complexe \mathbf{G} qui ont la distance $\frac{d}{2}$ à l'intervalle $[\mu_1 + \frac{d}{2}, \mu_2 - \frac{d}{2}]$ de l'axe réel. C'est une courbe fermée, composée de deux segments de longueur δ et de deux demi-cercles de rayon $\frac{d}{2}$, sa circonférence est donc $2\delta + \pi d$.

Dans ce qui suit, z veut désigner toujours un nombre complexe situé sur la courbe C . Alors $l_z \geq \frac{d}{2}$,

$$m_z = \max_{\lambda} \left| 1 + \frac{1}{\lambda - z} (\lambda_0 + (z - \lambda_0)) \right| \leq 1 + \frac{2}{d} \left(|\lambda_0| + \frac{\delta + d}{2} \right),$$

donc $\frac{a}{l_z} + b m_z \leq \alpha$. Donc, par (1) et (2),

$$\|R_z\| \leq \frac{2}{d} \quad \text{et} \quad \|A_k R_z\| \leq p^{k-1} \alpha \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Un calcul formel fournit :

$$\begin{aligned} R_z(\varepsilon) &= (A(\varepsilon) - zI)^{-1} = [(A_0 - zI) + (A(\varepsilon) - A_0)]^{-1} = \\ &= [(I + (A(\varepsilon) - A_0) R_z)(A_0 - zI)]^{-1} = R_z [I + (A(\varepsilon) - A_0) R_z]^{-1} = \\ &= R_z \sum_{\nu=0}^{\infty} [-(A(\varepsilon) - A_0) R_z]^{\nu} = R_z \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k R_z \right]^{\nu}. \end{aligned} \quad (4)$$

Les coefficients de ce développement sont, en vertu de (3), majorés en norme par ceux de l'expression

$$\frac{2}{d} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p^{k-1} \alpha \right]^{\nu}.$$

Or cette expression converge pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p + \alpha}$ et a pour somme

$$F(\varepsilon) = \frac{2}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon \alpha}{1 - \varepsilon(p + \alpha)} \right).$$

Pour ces valeurs de ε , notre calcul est donc justifié ; de plus, le dernier membre de (4) peut être arrangé suivant les puissances de ε :

$$R_z(\varepsilon) = R_{z0} + \varepsilon R_{z1} + \varepsilon^2 R_{z2} + \cdots, \quad (5)$$

et les coefficients R_{zk} sont majorés en norme par ceux de la série entière de $F(\varepsilon)$, donc

$$||R_{z0}|| \leq \frac{2}{d}, \quad ||R_{zk}|| \leq \frac{2}{d} \alpha (p + \alpha)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

et

$$||R_z(\varepsilon)|| \leq \frac{2}{d} \left(1 + \frac{|\varepsilon| \alpha}{1 - |\varepsilon|(p + \alpha)} \right). \quad (7)$$

La relation évidente

$$R_{z_2}(\varepsilon) - R_{z_1}(\varepsilon) = (z_2 - z_1) R_{z_1}(\varepsilon) R_{z_2}(\varepsilon)$$

montre, vu aussi que $R_z(\varepsilon)$ admet la borne (7) indépendante de z , que $R_z(\varepsilon)$ est une fonction continue de z . En particulier, $R_{z0} = R_z(0)$ est continue en z . Il en est de même pour les autres coefficients R_{zk} . Supposons que cela est établi pour $k < n$. $T_z(\varepsilon) = \varepsilon^{-n} \left[R_z(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k R_{zk} \right]$ est alors une fonction continue de z pour toute valeur fixe $\varepsilon \neq 0$. D'après (6) :

$$||T_z(\varepsilon) - R_{zn}|| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon^{k-n} R_{zk} \right\| \leq \frac{2}{d} \alpha \frac{|\varepsilon| (p + \alpha)^n}{1 - |\varepsilon| (n + \alpha)},$$

donc $T_z(\varepsilon)$ converge, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, vers R_{zn} , et cela uniformément en z (sur C). Par conséquent, aussi R_{zn} est une fonction continue de z .

Envisageons les transformations

$$P_d(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C R_z(\varepsilon) dz, \quad P_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C R_{zk} dz \quad (k = 1, 2, \dots);$$

les intégrales étant définies d'une manière évidente. Il s'ensuit de (5) et (6) que, pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p + \alpha}$,

$$P_A(\varepsilon) = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots \quad \text{et} \quad \|P_k\| \leq \frac{2\delta + \pi d}{2\pi} \frac{2\alpha}{d} (p + \alpha)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Comparons l'inégalité (7) avec la formule

$$R_z(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} dE_{\lambda}(\varepsilon).$$

Il s'ensuit que les points de l'axe réel λ , pour lesquels

$$\left| \frac{1}{\lambda - z} \right| > \frac{2}{d} \left(1 + \frac{|\varepsilon| \alpha}{1 - |\varepsilon| (p + \alpha)} \right),$$

ou, ce qui revient au même, pour lesquels

$$|\lambda - z| < \frac{d}{2} \left(1 - \frac{|\varepsilon| \alpha}{1 - |\varepsilon| p} \right) = \frac{d(\varepsilon)}{2},$$

forment un ensemble de mesure 0 par rapport à $E_{\lambda}(\varepsilon)$. En particulier, les intervalles

$$|\lambda - \mu_1| < \frac{d(\varepsilon)}{2} \quad \text{et} \quad |\lambda - \mu_2| < \frac{d(\varepsilon)}{2}$$

ne contiennent aucun point du spectre de $A(\varepsilon)$.

Cela nous permet à intervertir l'ordre des intégrations dans la formule

$$P_A(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} dE_{\lambda}(\varepsilon),$$

ce qui donne, vu que

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{\lambda - z} dz = \begin{cases} 1 & \text{pour } \lambda \text{ intérieur à } C, \\ 0 & \text{pour } \lambda \text{ extérieur à } C, \end{cases}$$

la relation $P_A(\varepsilon) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} dE_{\lambda}(\varepsilon) = E_{\mu_2}(\varepsilon) - E_{\mu_1}(\varepsilon)$. $P_A(\varepsilon)$ est donc la projection au „sous-espace propre“ $\mathfrak{M}_A(\varepsilon)$ de $A(\varepsilon)$, correspondant à la partie du spectre de $A(\varepsilon)$ contenue dans l'intervalle $\Delta = [\mu_1, \mu_2]$.

Envisageons maintenant la relation

$$\begin{aligned}(A(\varepsilon) - \lambda_0 I) R_z(\varepsilon) &= I + (z - \lambda_0) R_z(\varepsilon) \\ &= I + (z - \lambda_0)(R_{z0} + \varepsilon R_{z1} + \varepsilon^2 R_{z2} + \dots) ;\end{aligned}$$

on en obtient en intégrant sur C :

$$(A(\varepsilon) - \lambda_0 I) P_A(\varepsilon) = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots$$

où

$$B_0 = (A_0 - \lambda_0 I) P_A(0) \quad \text{et} \quad B_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C (z - \lambda_0) R_{zk} dz ,$$

donc

$$|B_k| \leq \frac{2\delta + d\pi}{2\pi} \frac{\delta + d}{2} \frac{2\alpha}{d} (p + \alpha)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots) .$$

Quant à la dimension du „sous-espace propre“ $\mathfrak{M}_A(\varepsilon)$, il suffit d'observer, grâce au théorème auxiliaire 4, que $\|P_A(\eta) - P_A(\varepsilon)\| < 1$ pour $|\eta - \varepsilon|$ assez petit, quelle que soit la valeur fixée η , telle que $|\eta| < \frac{1}{p + \alpha}$. Or cela s'ensuit immédiatement de la régularité de $P_A(\varepsilon)$ dans cet intervalle.

Le théorème I se trouve démontré.

§ 3. Cas d'une valeur propre simple

Nous obtenons du théorème I presque immédiatement le

Théorème II. *Soit $A(\varepsilon)$ comme dans le théorème I, mais les hypothèses dans b) soient spécialisées comme il suit: Soit λ_0 une valeur simple propre de A_0 et soit φ_0 un élément propre normé correspondant. Supposons que l'intervalle $\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$ ne contienne pas d'autres points du spectre de A_0 . Posons*

$$\alpha = \frac{2a}{d} + 2b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d} \right) .$$

Alors, pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p + \alpha}$, le spectre de $A(\varepsilon)$ consiste, dans l'intervalle

$$|\lambda - \lambda_0| < d - \frac{d}{2} \frac{|\varepsilon| \alpha}{1 - |\varepsilon| p} ,$$

d'une seule valeur propre $\lambda(\varepsilon)$, de multiplicité 1, et la distance de $\lambda(\varepsilon)$ à λ_0 ne dépasse pas la valeur $\frac{\alpha}{2} \frac{|\varepsilon| \alpha}{1 - |\varepsilon| p}$.

$\lambda(\varepsilon)$ est régulier, du moins sur l'intervalle $|\varepsilon| < \frac{1}{p+2\alpha}$, et les coefficients de sa série entière $\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$ satisfont aux inégalités

$$|\lambda_k| \leq \frac{d\alpha}{2} (p + 2\alpha)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots) .$$

On a $\lambda_1 = (A_1 \varphi_0, \varphi_0)$. Il existe un élément propre $\varphi(\varepsilon)$ correspondant à $\lambda(\varepsilon)$, régulier sur l'intervalle $|\varepsilon| < \frac{1}{p+2\alpha}$ et tel que $\|\varphi(\varepsilon)\| = 1$, $(\varphi(\varepsilon), \varphi_0) \geq 0$. Les coefficients de sa série entière $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$ satisfont aux inégalités :

$$\|\varphi_k\| \leq (p + 2\alpha)^k \quad (k = 1, 2, \dots)^7)$$

Partons du théorème I, en y posant

$$\mu_1 = \lambda_0 - \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \lambda_0 + \frac{d}{2}$$

(alors $\delta = 0$ et α a la valeur donnée dans le théorème II). Il s'ensuit que, pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p+\alpha}$, la dimension du sous-espace propre $\mathfrak{M}_A(\varepsilon) = P_A(\varepsilon)\mathfrak{H}$ correspondant à l'intervalle $\Delta = [\mu_1, \mu_2]$, est indépendante de ε , donc égale à celle de $\mathfrak{M}_A(0)$, c'est-à-dire à 1. Le spectre de $A(\varepsilon)$ consiste donc dans Δ d'une seule valeur propre $\lambda(\varepsilon)$, de multiplicité 1. Les segments

$$\left| \begin{array}{l} |\lambda - \mu_1| \\ |\lambda - \mu_2| \end{array} \right\} < \frac{d}{2} \left(1 - \frac{|\varepsilon| \alpha}{1 - |\varepsilon| p} \right)$$

ne contenant aucun point du spectre de $A(\varepsilon)$, la distance de $\lambda(\varepsilon)$ à λ_0 ne peut pas dépasser la valeur donnée dans le théorème.

$\psi(\varepsilon) = P_A(\varepsilon) \varphi_0$ étant un élément propre correspondant à $\lambda(\varepsilon)$, on a

$$((A(\varepsilon) - \lambda_0 I) \psi(\varepsilon), \varphi_0) = ((\lambda(\varepsilon) - \lambda_0) \psi(\varepsilon), \varphi_0) ,$$

d'où

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda_0 = \frac{((A(\varepsilon) - \lambda_0 I) P_A(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)}{(P_A(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)} .$$

Or, nous savons du théorème I que $P_A(\varepsilon) = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots$ et $(A(\varepsilon) - \lambda_0 I) P_A(\varepsilon) = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots$ où $B_0 = (A_0 - \lambda_0 I) P_0$

⁷⁾ Dans une forme moins précise, ce théorème a été déjà démontré par Rellich, I. c. ²), IV. § 2. En partant des formules explicites pour les coefficients λ_k et φ_k , il n'établit la convergence des séries en question que pour $|\varepsilon| < \frac{1}{8(p+a)}$.

$= A_0 P_0 - \lambda_0 P_0 = 0$ et $\|P_k\| \leq \alpha(p + \alpha)^{k-1}$, $\|B_k\| \leq \frac{d\alpha}{2}(p + \alpha)^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$). En désignant la différence $P_A(\varepsilon) - P_0$ par $H(\varepsilon)$, nous obtenons par un calcul formel :

$$\begin{aligned}\lambda(\varepsilon) - \lambda_0 &= \frac{((A(\varepsilon) - \lambda_0 I) P_A(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)}{1 + (H(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)} = \\ &= ((A(\varepsilon) - \lambda_0 I) P_A(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0) \sum_{\nu=0}^{\infty} [-(H(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)]^\nu = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (B_k \varphi_0, \varphi_0) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[- \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (P_k \varphi_0, \varphi_0) \right]^\nu.\end{aligned}$$

Les coefficients de ce développement sont majorés par ceux du développement

$$\frac{d\alpha}{2} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon(p + 2\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{d\alpha}{2} (p + \alpha)^{k-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \alpha (p + \alpha)^{k-1} \right]^\nu,$$

valable pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p + 2\alpha}$. Pour ces valeurs de ε , notre calcul est donc légitime. De plus, le développement de $\lambda(\varepsilon) - \lambda_0$ peut être arrangé suivant les puissances de ε :

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda_0 = \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots,$$

et $|\lambda_k|$ ne peut pas dépasser le k -ième coefficient de la série entière de la fonction majorante, c'est-à-dire $\frac{d\alpha}{2} (p + 2\alpha)^{k-1}$.

Pour obtenir un élément propre normé, posons

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon) &= \frac{\psi(\varepsilon)}{(\psi(\varepsilon), \psi(\varepsilon))^{\frac{1}{2}}} = \frac{P_A(\varepsilon) \varphi_0}{(P_A(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{P_A(\varepsilon) \varphi_0}{[1 + (H(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)]^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (H(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)^\nu \cdot P_A(\varepsilon) \varphi_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (P_k \varphi_0, \varphi_0) \right]^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l P_l \varphi_0.\end{aligned}$$

Les coefficients de ce développement sont majorés par ceux de l'expression

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \right| \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \alpha (p + \alpha)^{k-1} \right]^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \alpha (p + \alpha)^{l-1},$$

ayant pour

$$|\varepsilon| < \frac{1}{p + 2\alpha}$$

la somme

$$G(\varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon p}{\sqrt{1 - \varepsilon(p + \alpha)} \sqrt{1 - \varepsilon(p + 2\alpha)}} .$$

Donc, $\varphi(\varepsilon)$ est régulier sur $|\varepsilon| < \frac{1}{p + 2\alpha}$:

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots,$$

et $\|\varphi_k\|$ ne peut pas dépasser le k -ième coefficient de la série entière de la fonction $G(\varepsilon)$, et, à plus forte raison, celui de la fonction $\frac{1}{1 - \varepsilon(p + 2\alpha)}$, c'est-à-dire $(p + 2\alpha)^k$. Comme

$$(\varphi(\varepsilon), \varphi_0) = \frac{(P_A(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)}{(P_A(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)^{\frac{1}{2}}} = (P_A(\varepsilon) \varphi_0, \varphi_0)^{\frac{1}{2}} = \|P_A(\varepsilon) \varphi_0\| ,$$

on a $(\varphi(\varepsilon), \varphi_0) \geq 0$.

Enfin, en comparant les coefficients de ε dans les deux membres des équations identiques $(\varphi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)) = 1$ et $(A(\varepsilon) \varphi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)) = \lambda(\varepsilon)$, nous obtenons: $(\varphi_1, \varphi_0) + (\varphi_0, \varphi_1) = 0$ et $(A_1 \varphi_0, \varphi_0) + (A_0 \varphi_1, \varphi_0) + (A_0 \varphi_0, \varphi_1) = \lambda_1$, d'où il vient (ayant vu que $(A_0 \varphi_1, \varphi_0) = (\varphi_1, A_0 \varphi_0) = \lambda_0 (\varphi_1, \varphi_0)$ et $(A_0 \varphi_0, \varphi_1) = \lambda_0 (\varphi_0, \varphi_1)$) que $\lambda_1 = (A_1 \varphi_0, \varphi_0)$, ce qui achève la démonstration.

§ 4. Cas d'une valeur propre de multiplicité finie

Voici une nouvelle démonstration du théorème fondamental de M. Rellich⁸⁾, basée sur notre théorème I. Il s'agit du

Théorème III. Soit $A(\varepsilon)$ comme dans le théorème I, mais les hypothèses dans b) soient spécialisées comme suit: Soit λ_0 une valeur propre de A_0 de multiplicité finie m , et supposons que l'intervalle $\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$ ne contienne pas d'autres points du spectre de A_0 . Il existe alors m valeurs numériques réelles $\lambda^{(i)}(\varepsilon)$ et m éléments $\varphi^{(i)}(\varepsilon)$ de \mathfrak{H} , fonctions régulières de ε sur un certain intervalle $|\varepsilon| < \rho$:

$$\lambda^{(i)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(i)} + \varepsilon^2 \lambda_2^{(i)} + \dots, \quad \varphi^{(i)}(\varepsilon) = \varphi_0^{(i)} + \varepsilon \varphi_1^{(i)} + \varepsilon^2 \varphi_2^{(i)} + \dots$$

$$(i = 1, 2, \dots, m) ,$$

et cela de façon que les $\lambda^{(i)}(\varepsilon)$ sont des valeurs propres de $A(\varepsilon)$ et que les $\varphi^{(i)}(\varepsilon)$ sont des éléments propres correspondants formant, pour toute valeur

⁸⁾ L. c. ²⁾ I (théorème 2) et III (théorème 3).

donnée de ε , un système orthonormal. A tout η , $0 < \eta < \frac{d}{2}$, on peut faire correspondre un $r = r(\eta) > 0$, de sorte que, pour $|\varepsilon| < r$, le spectre de la transformation autoadjointe $A(\varepsilon)$ consiste, dans l'intervalle $\lambda_0 - d + \eta < \lambda < \lambda_0 + d - \eta$, précisément des points $\lambda^{(i)}(\varepsilon)$, chaque valeur propre étant comptée autant de fois que l'indique sa multiplicité.

On a $(A_1 \varphi_0^{(i)}, \varphi_0^{(i)}) = \lambda_1^{(i)}$ et $(A_1 \varphi_0^{(i)}, \varphi_0^{(j)}) = 0$ pour $i \neq j$. C'est-à-dire que, P_0 désignant la projection sur le sous-espace \mathfrak{M}_0 (de dimension m) des éléments propres de A_0 correspondant à la valeur propre λ_0 , la transformation $P_0 A_1 P_0$ aura les $\varphi_0^{(i)}$ pour éléments propres correspondant respectivement aux valeurs propres $\lambda_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Nous raisonnons par récurrence par rapport à m .

Pour $m = 1$, le théorème est évidemment contenu dans le théorème II. Supposons qu'il se trouve déjà démontré pour les valeurs propres de multiplicités inférieures à m .

Le théorème I (avec $\mu_1 = \lambda_0 - \frac{d}{2}$, $\mu_2 = \lambda_0 + \frac{d}{2}$, $\delta = 0$) fournit tout d'abord l'existence d'une quantité positive ϱ , de sorte que pour $|\varepsilon| < \varrho$: 1) $A(\varepsilon)$ est une transformation autoadjointe, 2) la projection $P_A(\varepsilon)$ sur le „sous-espace propre“ $\mathfrak{M}_A(\varepsilon)$ correspondant à la partie du spectre de $A(\varepsilon)$ contenue dans l'intervalle $\Delta = [\lambda_0 - \frac{d}{2}, \lambda_0 + \frac{d}{2}]$, ainsi que $A(\varepsilon)P_A(\varepsilon)$, sont des transformations bornées régulières, 3) $\mathfrak{M}_A(\varepsilon)$ a la dimension constante m , 4) à tout $\eta > 0$ correspond un $r = r(\eta) > 0$ de façon que, pour $|\varepsilon| < r$, le spectre de $A(\varepsilon)$ dans l'intervalle $\lambda_0 - d + \eta < \lambda < \lambda_0 + d - \eta$ est concentré dans l'intervalle $\lambda_0 - \eta < \lambda < \lambda_0 + \eta$.

$P_A(\varepsilon)$ étant régulière, on pourra choisir ϱ même de façon que pour $|\varepsilon| < \varrho$, la norme de $H(\varepsilon) = P_A(\varepsilon) - P_A(0) = P_A(\varepsilon) - P_0$ soit inférieure à 1, et que la transformation

$$U(\varepsilon) = P_A(\varepsilon) \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} (P_0 H(\varepsilon) P_0)^{\nu} P_0 = P_A(\varepsilon) \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k P_0 P_k P_0 \right]^{\nu} P_0$$

soit régulière. D'après le théorème auxiliaire 3, $U(\varepsilon)$ est partiellement isométrique ayant le domaine initial $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_A(0)$ et le domaine final $\mathfrak{M}_A(\varepsilon)$, donc $U^*(\varepsilon)U(\varepsilon) = P_0$, $U(\varepsilon)U^*(\varepsilon) = P_A(\varepsilon)$ et $U(0) = U^*(0) = P_0$. La régularité de $U(\varepsilon)$ entraînant celle de $U^*(\varepsilon)$, la transformation autoadjointe bornée $C(\varepsilon) = U^*(\varepsilon)A(\varepsilon)U(\varepsilon) = U^*(\varepsilon)A(\varepsilon)P_A(\varepsilon)U(\varepsilon)$ est aussi régulière sur l'intervalle $|\varepsilon| < \varrho$: $C(\varepsilon) = C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \dots$. $C(\varepsilon)$ transforme \mathfrak{M}_0 en lui-même et annule tous les éléments orthogonaux

à \mathfrak{M}_0 . Il en est de même, par conséquent, aussi pour les coefficients C_k . On a, en particulier, $C_0 = P_0 A_0 P_0 = \lambda_0 P_0$ et $C_1 = P_0 A_1 P_0$. La première équation est évidente, la seconde s'obtient en comparant les coefficients de ε dans les identités $U^*(\varepsilon) U(\varepsilon) = P_0$ et $C(\varepsilon) = U^*(\varepsilon) A(\varepsilon) U(\varepsilon)$, ce qui donne $U_1^* U_0 + U_0 U_1^* = U_1^* P_0 + P_0 U_1 = 0$ et $C_1 = U_1^* A_0 U_0 + U_0^* A_0 U_1 + U_0^* A_1 U_0 = U_1^* A_0 P_0 + P_0 A_0 U_1 + P_0 A_1 P_0 = \lambda_0 (U_1^* P_0 + P_0 U_1) + P_0 A_1 P_0 = P_0 A_1 P_0$.

Lorsque tous les coefficients C_k sont des multiples numériques de P_0 , $C_k = \lambda_k P_0$, alors $C(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) P_0$ avec $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$. Comme $U(\varepsilon) C(\varepsilon) = U(\varepsilon) U^*(\varepsilon) A(\varepsilon) U(\varepsilon) = P_A(\varepsilon) A(\varepsilon) U(\varepsilon) = A(\varepsilon) U(\varepsilon)$, il s'ensuit que $A(\varepsilon) U(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) U(\varepsilon) P_0 = \lambda(\varepsilon) U(\varepsilon)$. Quel que soit donc le système orthonormal $\varphi_0^{(i)}$ dans \mathfrak{M}_0 ($i = 1, 2, \dots, m$), les éléments $\varphi^{(i)}(\varepsilon) = U(\varepsilon) \varphi_0^{(i)}$ et les valeurs $\lambda^{(i)}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) satisfont aux exigences du théorème.

Passons maintenant au cas où il y a des coefficients C_k qui ne sont pas des multiples de P_0 ; soit C_s le premier d'entre eux, $s \geq 1$. Pour $k < s$ on a donc $C_k = \lambda_k P_0$.

Posons $D(\varepsilon) = C_s + \varepsilon C_{s+1} + \dots$. $D(0) = C_s$, regardée comme une transformation autoadjointe du sous-espace \mathfrak{M}_0 de dimension m en lui-même, n'est pas un multiple de l'identité, par conséquent elle admet au moins deux valeurs propres différentes. Désignons ses valeurs propres différentes par $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$; leurs multiplicités soient respectivement m_1, m_2, \dots, m_n ($m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$). Chaque valeur propre κ étant évidemment isolée et de multiplicité inférieure à m , on peut appliquer le théorème, par hypothèse faite, à chacune d'elles. Il s'ensuit l'existence de m valeurs réelles $\kappa^{(i)}(\varepsilon)$ et de m éléments orthonormaux $\psi^{(i)}(\varepsilon)$, réguliers dans un certain intervalle $|\varepsilon| < \varrho'$ ($\varrho' \leq \varrho$):

$$\kappa^{(i)}(\varepsilon) = \kappa_0^{(i)} + \varepsilon \kappa_1^{(i)} + \varepsilon^2 \kappa_2^{(i)} + \dots \quad \text{et} \quad \psi^{(i)}(\varepsilon) = \psi_0^{(i)} + \varepsilon \psi_1^{(i)} + \varepsilon^2 \psi_2^{(i)} + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

et tels que $\kappa_0^{(i)} = \kappa_1$ pour $i \leq m_1$, $\kappa_0^{(i)} = \kappa_2$ pour $m_1 < i \leq m_1 + m_2, \dots$, et que $D(\varepsilon) \psi^{(i)}(\varepsilon) = \kappa^{(i)}(\varepsilon) \psi^{(i)}(\varepsilon)$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Il en vient que

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) \psi^{(i)}(\varepsilon) &= \left[\sum_{k=0}^{s-1} \varepsilon^k \lambda_k P_0 + \varepsilon^s D(\varepsilon) \right] \psi^{(i)}(\varepsilon) = \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} \varepsilon^k \lambda_k \psi^{(i)}(\varepsilon) + \varepsilon^s \mu^{(i)}(\varepsilon) \psi^{(i)}(\varepsilon), \end{aligned}$$

donc, en posant

$$\lambda^{(i)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \cdots + \varepsilon^{s-1} \lambda_{s-1} + \varepsilon^s \kappa_0^{(i)} + \varepsilon^{s+1} \kappa_1^{(i)} + \cdots ,$$

on a $C(\varepsilon) \psi^{(i)}(\varepsilon) = \lambda^{(i)}(\varepsilon) \varphi^{(i)}(\varepsilon)$ et, par conséquent, $A(\varepsilon) U(\varepsilon) \psi^{(i)}(\varepsilon) = \lambda^{(i)}(\varepsilon) U(\varepsilon) \psi^{(i)}(\varepsilon)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Les valeurs $\lambda^{(i)}(\varepsilon)$ et les éléments $\varphi^{(i)}(\varepsilon) = U(\varepsilon) \psi^{(i)}(\varepsilon)$, réguliers sur $|\varepsilon| < \varrho$, satisfont donc aux exigences du théorème. L'assertion relative aux valeurs propres et éléments propres de $P_0 A_1 P_0$ est vérifiée par la construction même des $\lambda^{(i)}(\varepsilon)$ et $\varphi^{(i)}(\varepsilon)$.

§ 5. Cas d'une valeur propre multiple dont se détache, déjà en première approximation, une valeur propre perturbée simple

Le théorème III ne donne pas des renseignements sur le rayon de convergence et des estimations pour les coefficients des séries en question. Nous allons le perfectionner dans cette direction, du moins dans le cas particulier d'une valeur propre non perturbée multiple λ_0 dont se détache une valeur propre perturbée simple $\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \cdots$, différent, pour $\varepsilon \neq 0$, de toutes les autres valeurs propres provenant de λ_0 , et cela déjà en première approximation, c'est-à-dire dans le terme $\varepsilon \lambda_1$. Cela revient à supposer que λ_1 est une valeur propre simple de $P_0 A_1 P_0$, regardée comme une transformation du sous-espace propre \mathfrak{M}_0 . Voici le théorème, formulé de façon qu'il s'applique aussi à des valeurs propres λ_0 de multiplicité infinie :

Théorème IV. Soit $A(\varepsilon)$ comme dans le théorème I, mais les hypothèses dans b) soient spécialisées comme suit : Soit λ_0 une valeur propre de A_0 de multiplicité finie ou infinie, et telle que l'intervalle $\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$ ne contient d'autres points du spectre de A_0 . Soit P_0 la projection sur le sous-espace \mathfrak{M}_0 des éléments propres de A_0 correspondant à λ_0 . La transformation $P_0 A_1 P_0$, regardée comme une transformation de \mathfrak{M}_0 en lui-même, est auto-adjointe et bornée. Supposons qu'elle a une valeur propre simple λ_1 et que l'intervalle $\lambda_1 - d' < \lambda < \lambda_1 + d'$ ne contient d'autres points de son spectre ; enfin, soit φ_0 un élément propre normé de $P_0 A_1 P_0$, correspondant à λ_1 .

Dans ces hypothèses, il existe une valeur propre $\lambda(\varepsilon)$ de $A(\varepsilon)$, régulière pour $|\varepsilon| < \frac{1}{\sigma}$ où

$$\sigma + \left(1 + \frac{2\alpha d}{d'}\right) (p + 2\alpha) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{2\alpha}{d} + 2b \left(1 + \frac{|\lambda_0|}{d}\right) ,$$

et dont la série entière commence par $\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1$:

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots;$$

les autres coefficients satisfont aux inégalités

$$|\lambda_k| \leq \frac{d\alpha}{2} (p + 2\alpha) \sigma^{k-2} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Il existe un élément propre $\varphi(\varepsilon)$ correspondant à la valeur propre $\lambda(\varepsilon)$, régulier sur l'intervalle $|\varepsilon| < \frac{1}{\sigma}$,

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots,$$

tel que

$$\|\varphi(\varepsilon)\| = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{et} \quad \|\varphi_k\| \leq (k+1) \sigma^k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

En multipliant par un facteur numérique convenable de module 1, dépendant de ε , on en peut obtenir un élément propre $\tilde{\varphi}(\varepsilon)$, régulier au moins sur l'intervalle

$$|\varepsilon| < \frac{1}{\tau} \quad \text{où} \quad \tau = \left(2 + \frac{2\alpha d}{d'}\right)(p + 2\alpha),$$

et qui satisfait, outre aux conditions $\tilde{\varphi}(0) = \varphi_0$ et $\|\tilde{\varphi}(\varepsilon)\| = 1$, aussi à la suivante: $(\tilde{\varphi}(\varepsilon), \varphi_0) \geq 0$. Les coefficients de son développement $\tilde{\varphi}(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \tilde{\varphi}_1 + \dots$ satisfont aux inégalités: $\|\tilde{\varphi}_k\| \leq 2(2\tau)^k$ ($k = 1, 2, \dots$)⁹⁾.

Démonstration. Quel que soit f de \mathfrak{H} , $P_0 f$ est dans le domaine \mathfrak{D} de A_0 et $\|A_1 P_0 f\| \leq a \|P_0 f\| + b \|A_0 P_0 f\| \leq (a + b |\lambda_0|) \|f\|$; $A_1 P_0$ est donc partout définie et bornée. Il en est de même pour $P_0 A_1 P_0$.

D'après le théorème I, la projection $P_A(\varepsilon) = E_{\lambda_0 + \frac{d}{2}}(\varepsilon) - E_{\lambda_0 - \frac{d}{2}}(\varepsilon)$ est régulière pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p + \alpha}$: $P_A(\varepsilon) = P_0 + \varepsilon P_1 + \dots$ avec $\|P_k\| \leq \alpha(p + \alpha)^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$). De plus, on a:

$$(A(\varepsilon) - \lambda_0 I) P_A(\varepsilon) = \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots$$

avec

$$\|B_k\| \leq \frac{d\alpha}{2} (p + \alpha)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

⁹⁾ En se servant des formules explicites du calcul des perturbations, M. Rellich a obtenu ce théorème (l. c.²⁾ IV. § 3) sous une forme moins précise. Les quantités qui jouent, dans son théorème, le rôle de nos σ et τ , dépendent aussi de la multiplicité m de la valeur propre non perturbée et croissent indéfiniment avec m . Son théorème ne porte donc que sur les valeurs propres non perturbées de multiplicité finie.

Pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p + 2\alpha}$ on a donc $\|P_A(\varepsilon) - P_0\| < 1$ et on peut former la transformation partiellement isométrique

$$U(\varepsilon) = P_A(\varepsilon) [I + P_0(P_A(\varepsilon) - P_0)P_0]^{-\frac{1}{2}} P_0.$$

Elle est régulière ; et les coefficients de sa série entière sont majorés par ceux de la fonction

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{\varepsilon\alpha}{1 - \varepsilon(p + \alpha)}\right] \left[1 - \frac{\varepsilon\alpha}{1 - \varepsilon(p + \alpha)}\right]^{-\frac{1}{2}} &= \\ &= \frac{1 - \varepsilon p}{\sqrt{1 - \varepsilon(p + \alpha)} \sqrt{1 - \varepsilon(p + 2\alpha)}} , \end{aligned}$$

et, à plus forte raison, par ceux de la fonction $\frac{1}{1 - \varepsilon(p + 2\alpha)}$.

On a déjà vu que la série entière de la transformation régulière $U^*(\varepsilon)A(\varepsilon)U(\varepsilon)$ commence par $\lambda_0 P_0 + \varepsilon P_0 A_1 P_0$. Comme, d'autre part, $U^*(\varepsilon)\lambda_0 P_A(\varepsilon)U(\varepsilon) = \lambda_0 U^*(\varepsilon)U(\varepsilon) = \lambda_0 P_0$, on a

$$D(\varepsilon) = U^*(\varepsilon) \frac{(A(\varepsilon) - \lambda_0 I)P_A(\varepsilon)}{\varepsilon} U(\varepsilon) = P_0 A_1 P_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots .$$

D'une manière plus détaillée,

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &= P_0 [I + P_0(P_A(\varepsilon) - P_0)P_0]^{-\frac{1}{2}} \frac{(A(\varepsilon) - \lambda_0 I)P_A(\varepsilon)}{\varepsilon} [I + P_0(P_A(\varepsilon) - P_0)P_0]^{-\frac{1}{2}} P_0 = \\ &= P_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k P_0 P_k P_0 \right]^{\nu} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l B_{l+1} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k P_0 P_k P_0 \right]^{\nu} P_0 , \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que les coefficients D_k sont majorés par ceux de la série entière de la fonction

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \right| \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \alpha (p + \alpha)^{k-1} \right]^{\nu} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \frac{d\alpha}{2} (p + \alpha)^l \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \right| \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \alpha (p + \alpha)^{k-1} \right]^{\nu} &= \\ &= \frac{d\alpha}{2} \frac{1}{1 - \varepsilon(p + 2\alpha)} , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\|D_k\| \leq \frac{d\alpha}{2} (p + 2\alpha)^k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Pour cette transformation $D(\varepsilon)$ de \mathfrak{M}_0 en lui-même, les hypothèses du théorème II sont donc vérifiées avec $p' = p + 2\alpha$, $a' = \frac{d\alpha}{2}(p + 2\alpha)$, $b' = 0$, λ_1 et d' respectivement au lieu de p , a , b , λ_0 et d . Il s'ensuit donc que $D(\varepsilon)$ a une valeur propre simple $\lambda'(\varepsilon) = \lambda_1 + \varepsilon \lambda_2 + \dots$ et un élément propre normé correspondant $\varphi'(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi'_1 + \varepsilon^2 \varphi'_2 + \dots$, réguliers pour $|\varepsilon| < \frac{1}{p' + 2\alpha'}$ où

$$\alpha' = \frac{2a'}{d} + 2b' \left(1 + \frac{|\lambda_1|}{d'}\right) = \frac{2a'}{d'} = \frac{d\alpha}{d'}(p + 2a),$$

donc pour $|\varepsilon| < \frac{1}{\sigma}$. De plus,

$$|\lambda_k| \leq \frac{d\alpha}{2}(p' + 2\alpha')^{k-2} = \frac{d\alpha}{2}(p + 2\alpha)\sigma^{k-2} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (9)$$

et

$$||\varphi'_k|| \leq (p' + 2\alpha')^k = \sigma^k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

L'équation $D(\varepsilon) \varphi'(\varepsilon) = \lambda'(\varepsilon) \varphi'(\varepsilon)$, multipliée par $\varepsilon U(\varepsilon)$, donne

$$(A(\varepsilon) - \lambda_0 J) P_A(\varepsilon) U(\varepsilon) \varphi'(\varepsilon) = \varepsilon \lambda'(\varepsilon) U(\varepsilon) \varphi'(\varepsilon),$$

donc

$$A(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \varphi(\varepsilon)$$

avec

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda'(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$$

et

$$\varphi(\varepsilon) = U(\varepsilon) \varphi'(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots.$$

Pour les λ_k nous avons déjà les inégalités (9). Les coefficients de la série de $U(\varepsilon)$ et de $\varphi'(\varepsilon)$ étant majorés respectivement par ceux des fonctions

$$\frac{1}{1 - \varepsilon(p + 2\alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 - \varepsilon\sigma},$$

les φ_k seront majorés par les coefficients de la série entière de leur produit

$$\frac{1}{1 - \varepsilon(p + 2\alpha)} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon\sigma} \quad (10)$$

et, vu que $\sigma > p + 2\alpha$, à plus forte raison par ceux de

$$\left(\frac{1}{1 - \varepsilon\sigma}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (k+1) \sigma^k.$$

$\varphi'(\varepsilon)$ était un élément normé de \mathfrak{M}_0 . Par l'isométrie de $U(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon)$ est aussi normé. Pour en obtenir l'élément $\tilde{\varphi}(\varepsilon)$ exigé par le théorème, on n'a qu'à poser

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\varepsilon) &= \sqrt{\frac{(\varphi_0, \varphi(\varepsilon))}{(\varphi(\varepsilon), \varphi_0)}} \varphi(\varepsilon) = \\ &= \sqrt{\frac{1 + \varepsilon(\varphi_0, \varphi_1) + \varepsilon^2(\varphi_0, \varphi_2) + \dots}{1 + \varepsilon(\varphi_1, \varphi_0) + \varepsilon^2(\varphi_2, \varphi_0) + \dots}} (\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots),\end{aligned}$$

les racines carrées étant déterminées de façon qu'elles prennent la valeur 1 pour $\varepsilon = 0$. Pour arriver à une fonction majorante, partons de la fonction majorante (10) de $\varphi(\varepsilon)$, d'où nous obtenons sans peine que

$$\|\varphi_k\| \leq (p + 2\alpha + \sigma)^k = \tau^k.$$

On a donc pour $\tilde{\varphi}(\varepsilon)$ la majorante

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \right| (\varepsilon\tau + \varepsilon^2\tau^2 + \dots)^\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \right| (\varepsilon\tau + \varepsilon^2\tau^2 + \dots)^\nu \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tau^k = \\ &= \left[2 - \left(1 - \frac{\varepsilon\tau}{1 - \varepsilon\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(1 - \frac{\varepsilon\tau}{1 - \varepsilon\tau} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - \varepsilon\tau} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon\tau} \sqrt{1 - 2\tau\varepsilon}} - \frac{1}{1 - \varepsilon\tau}\end{aligned}$$

et, à plus forte raison, $\frac{2}{1 - 2\tau\varepsilon}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

(Reçu le 30 août 1946.)