

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 19 (1946-1947)

**Artikel:** Sulla geometria degli Sk di un Sr.  
**Autor:** Longhi, Ambrogio  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17350>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sulla geometria degli $S_k$ di un $S_r$

Di AMBROGIO LONGHI, a Lugano

Nello spazio  $S_r$ , ad  $r$  dimensioni,  $r + 1$  rette sono *associate* secondo *Schläfli*<sup>1)</sup> quando ogni  $S_{r-2}$  appoggiato ad  $r$  qualunque di esse lo è pure alla restante; e, dualmente,  $r + 1$  spazi  $S_{r-2}$  sono *associati* se le rette che ne incontrano  $r$  risultano incidenti anche all'ultimo: per  $r = 4$  si tratta delle *quintuple di piani associati* di  $S_4$  considerate da *C. Segre*<sup>2)</sup>.

Una nozione di spazi  $S_k$  associati di  $S_r$ , con  $r \geq 4$  e  $0 < k < r - 1$ , fu posta da *B. Segre*<sup>3)</sup> definendo come tali gli  $S_k$ -assi degli  $\omega$  complessi lineari speciali esistenti in un generico sistema lineare  $\infty^{r-k}$  di complessi lineari di spazi  $S_{r-k-1}$  dell'  $S_r$ : ove  $\omega$  è l'ordine della varietà  $V_r^\omega$  *grassmanniana d'indici*  $(r, k)$  rappresentatrice<sup>4)</sup> della totalità degli  $S_k$  di  $S_r$ ,  $\tau$  è la sua dimensione e  $\rho$  quella del suo spazio di appartenenza.

Questa nozione si riduce a quella di *C. Segre* per  $k = 2$  ed  $r = 4$ , ma non include affatto quella di *Schläfli* per  $k = 1$  ed  $r$  qualunque, nè la sua duale per  $k = r - 2$  e  $r \neq 4$ .

Nel presente lavoro si pone (§ 1) una semplice nozione di spazi associati più comprensiva di quella di *B. Segre*, e che conduce pure immediatamente, in infiniti casi particolari, alla considerazione di gruppi di spazi  $S_k$  *in posizione di Schläfli* entro  $S_r$ : cioè tali che ogni  $S_{r-k-1}$  incidente ad alcuni degli  $S_k$  di un gruppo lo è di conseguenza a tutti gli altri.

Dopo ciò, in un sistema algebrico  $\Sigma$ , comunque esteso, di spazi  $S_k$  subordinati di  $S_r$ , si definisce (§ 2) una involuzione razionale di gruppi di  $S_k$  associati: che si riduce a quella introdotta da *B. Segre*<sup>5)</sup> quando  $\Sigma$  è la totalità degli  $S_k$  di  $S_r$ .

Supponendo, in particolare,  $\Sigma$  costituito dagli  $S_k$  di  $S_r$  soddisfacenti ad una data condizione di *Schubert*  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ , si studiano (§ 3) i gruppi di  $S_k$  associati in  $S_r$  aventi ciascuno un  $S_k$  appartenente alla forma fondamentale  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$  e gli altri prefissabili in modo generico.

<sup>1)</sup> Cfr.: *L. Schläfli*, Erweiterung des Satzes, daß zwei polare Dreiecke perspektivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen (*Journal für Mathematik*, 65, 1866).

<sup>2)</sup> *C. Segre*, Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 2, 1888).

<sup>3)</sup> *B. Segre*, Sui gruppi di  $S_k$  associati di un  $S_r$  (*Rendiconto delle Sessioni dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, 1933—34).

<sup>4)</sup> *F. Severi*, Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati, di data dimensione, immersi in uno spazio lineare [*Annali di Matematica*, 24 (3), 1915].

<sup>5)</sup> *B. Segre*, loc. cit., n. 2.

Sono oggetto del § 4 certe varietà algebriche luoghi di  $S_k$  e caratterizzate dalla proprietà di avere gli spazi generatori formanti a  $\nu + 1$  a  $\nu + 1$  gruppi di  $S_k$  associati; a tale classe di varietà appartengono: in  $S_4$ , oltre alla rigata  $V_2^5$  ellittica normale, l'ipersuperficie  $V_3^3$  con 10 punti doppi di *C. Segre* <sup>6)</sup>, e in  $S_5$  una notevole superficie  $V_2^{14}$  di *B. Segre* <sup>7)</sup>.

La considerazione del *genere sezionale* (§ 5) di un sistema algebrico di almeno  $\infty^2$  spazi  $S_k$  permette di stabilire varie proposizioni generali: le quali si precisano maggiormente (§ 6) nel caso di un sistema  $\infty^1$  e offrono risultati interessanti già nell'ambito delle sole superficie rigate.

Così, ad esempio, si riconosce come le proprietà elementari che tre rette di un fascio, e quattro qualunque di un regolo dello spazio ordinario, sono sempre associate, rientrano (per  $r = 2$  ed  $r = 3$ ) in quella ben più rimarchevole (n. 20, VII) che ogni rigata razionale normale di  $S_r$  ha le sue generatrici ad  $r + 1$  ad  $r + 1$  associate (secondo *Schläfli*): il qual teorema si generalizza a sua volta nell'altro (n. 20, III) che  $n - p + 2$  generatrici arbitrarie di una rigata di ordine  $n$  e genere  $p$  dello spazio  $S_r$ , quando:

$$p - 1 \leq n - p < 2r - 2 ,$$

sono in posizione di *Schläfli*; come pure nell'altro (n. 19) che in tale posizione risultano sempre anche  $r - k + 2$  spazi generatori qualsiasi di ogni varietà razionale normale luogo di  $\infty^1 S_k$  e appartenente ad  $S_r$ .

## § 1. I gruppi di $\nu$ spazi $S_k$ associati di specie $\mu$ in $S_r$

1. Come è ben noto <sup>4)</sup> i già accennati caratteri  $\varrho$ ,  $\tau$ ,  $\omega$  della grassmanniana  $V_r^\omega$  d'indici  $(r, k)$  che in  $S_r$  rappresenta la totalità degli  $S_k$  di  $S_r$ , si esprimono in funzione di  $r$  e  $k$  con le formole:

$$\varrho = \binom{r+1}{k+1} - 1 , \quad \tau = (k+1)(r-k)$$

e:

$$\omega = \frac{1! \, 2! \, \dots \, k! \, \tau!}{(r-k)! \, (r-k+1)! \, \dots \, r!} ,$$

il cui richiamo verrà generalmente sottaciuto in tutto il seguito.

Ciò premesso, siano  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\nu$ , nello spazio  $S_r$  ad  $r$  dimensioni,  $\nu$

<sup>6)</sup> *C. Segre*, Sulla varietà cubica con dieci punti doppi (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 22, 1887).

<sup>7)</sup> *B. Segre*, loc. cit., n. 4.

spazi  $S_k$  rappresentati in  $S_\varrho$ , sulla grassmanniana  $V_r^\omega$ , da altrettanti punti  $P_1, P_2, \dots, P_\nu$ . Supposti questi non indipendenti e tutti contenuti in almeno un iperpiano, lo spazio che li congiunge sarà un  $S_{\nu-\mu-1}$  con :

$$0 < \mu < \nu - 1$$

se  $\nu \leq \varrho + 1$ , e :

$$\nu - \varrho \leq \mu < \nu - 1$$

se  $\nu > \varrho + 1$ ; cioè, in ogni caso, con :

$$\mu < \nu - 1, \quad \mu > 0, \quad \mu \geq \nu - \varrho.$$

Fra i  $\nu$  punti  $P_i$  se ne possono allora considerare  $\nu - \mu$  indipendenti: così che *ogni* iperpiano di  $S_\varrho$  che li contiene passa anche per gli altri  $\mu$ ; mentre lo stesso non accade mai di *ogni* iperpiano condotto per  $\nu - \mu - 1$  soltanto dei punti  $P_i$ .

Ciò posto, gli spazi  $\pi_i$ , corrispondenti in  $S_r$  ai punti  $P_i$ , si diranno costituire un gruppo di  $\nu$  spazi  $S_k$  *associati di specie  $\mu$* .

Siccome le sezioni iperplane di  $V_r^\omega$  rappresentano i complessi lineari di  $S_k$  entro  $S_r$ , si può dare, senza uscire dall' $S_r$ , la seguente definizione :

*In  $S_r$ ,  $\nu$  spazi  $S_k$  si dicono associati di specie  $\mu$  (o di  $\mu$ -esima specie), con :*

$$\mu < \nu - 1, \quad \mu \geq 1, \quad \mu > \nu - \binom{r+1}{k+1},$$

*quando ogni complesso lineare di  $S_k$  contenente certi <sup>8)</sup>  $\nu - \mu$ , e non meno, di essi, contiene di conseguenza i  $\mu$  spazi residui.*

2. Risulta senz'altro da quanto precede (n. 1) che :

*Affinchè  $\nu$  spazi  $S_k$  di  $S_r$  siano associati di specie  $\mu$  (n. 1) è necessario e sufficiente che i loro punti immagini sulla grassmanniana d'indici  $(r, k)$  appartengano ad uno spazio  $S_{\nu-\mu-1}$  (almeno  $\nu$ -secante rispetto ad essa, quando non sia addirittura  $\infty$ -secante o non vi giaccia per intero) con  $\mu > 0$  e :*

$$0 < \nu - \mu - 1 < \binom{r+1}{k+1} - 1.$$

---

<sup>8)</sup> Od anche *qualsiasi*: quando i  $\nu$  spazi presentano a  $\nu - \mu$  a  $\nu - \mu$  le stesse particolarità di mutua posizione (cosicchè i loro punti immagini sulla grassmanniana siano a  $\nu - \mu$  a  $\nu - \mu$  indipendenti); nel qual caso il gruppo dei  $\nu$  spazi associati si dirà *generico*.



Così, ad esempio,  $\nu \geq 3$  spazi  $S_k$  di un fascio, cioè passanti per un  $S_{k-1}$  e giacenti in un  $S_{k+1}$ , sono associati di specie  $\nu - 2$ ; mentre sono associati di 2<sup>a</sup> specie 6  $S_k$  di  $S_r$ , con  $r \geq 3$ , appartenenti tre ad uno e tre all'altro di due generici fasci di  $S_k$ ; e risultano associate di specie  $n - 3$ , nello spazio ordinario,  $n \geq 4$  generatrici qualunque di un regolo.

**3.** La corrispondenza biunivoca fra i punti della grassmanniana  $V_\tau^\omega$  e gli  $S_k$  di  $S_r$  si può ritenere subordinata <sup>9)</sup> da una corrispondenza proiettiva  $\Gamma$  fra i punti del suo spazio ambiente  $S_\varrho$  e i complessi lineari di spazi  $S_{r-k-1}$  entro  $S_r$ . Quando un punto  $P$  di  $S_\varrho$  appartiene a  $V_\tau^\omega$ , e solo in tal caso, il complesso omologo di  $P$  in  $\Gamma$  riesce *speciale*; cioè ha tutti i suoi  $S_{r-k-1}$  incidenti ad un medesimo spazio  $S_k$ -asse: di cui  $P$  è allora l'immagine su  $V_\tau^\omega$ .

La  $\Gamma$  trasforma pertanto ogni spazio  $S_\varepsilon$  di  $S_\varrho$  in un sistema lineare  $\infty^\varepsilon$  di complessi lineari di  $S_{r-k-1}$  entro  $S_r$ ; e gli eventuali complessi speciali di questo sistema corrispondono ai punti che  $S_\varepsilon$  può avere in comune con  $V_\tau^\omega$ .

Si conclude quindi (n. 2):

*Se in un sistema lineare  $\infty^\varepsilon$  ( $1 \leq \varepsilon < \varrho$ ) di complessi lineari di  $S_{r-k-1}$ , entro  $S_r$ , esistono più di  $\varepsilon + 1$  complessi speciali, e se ne considerano  $\nu \geq \varepsilon + 2$ , di cui  $\varepsilon + 1$  linearmente indipendenti, i loro  $\nu$   $S_k$ -assi sono associati (n. 1) di specie  $\nu - \varepsilon - 1$ .*

Poichè, se  $\varepsilon \geq \varrho - \tau$ , un  $S_\varepsilon$  di  $S_\varrho$  interseca certo la  $V_\tau^\omega$  in una varietà  $V_{\tau+\varepsilon-\varrho}^\omega$ , e l'ordine  $\omega$  di questa è il numero dei punti che essa ha in comune con  $\tau + \varepsilon - \varrho$  iperpiani indipendenti, si può enunciare:

*Un generico sistema lineare  $\infty^{\varrho-\tau+\sigma}$ , con  $0 \leq \sigma < \tau$ , di complessi lineari di spazi  $S_{r-k-1}$ , entro  $S_r$ , ne contiene  $\infty^\sigma$  speciali: e precisamente  $\omega$  se  $\sigma = 0$ . I loro  $S_k$ -assi, la cui totalità, se  $\sigma > 0$ , ne include sempre  $\omega$  incidenti a  $\sigma$  spazi  $S_{r-k-1}$  genericamente prefissabili, sono tali che  $\nu$  generici di essi, quando:*

$$\nu \geq \varrho - \tau + \sigma + 2,$$

*risultano associati (n. 1) di specie  $\nu - \varrho + \tau - \sigma - 1$ .*

In particolare: se  $\nu = \omega$ ,  $\sigma = 0$  ed  $r \geq 4$  si hanno i gruppi di  $\omega$   $S_k$  associati, di  $S_r$ , definiti da B. Segre <sup>3)</sup>.

---

<sup>9)</sup> Cfr. B. Segre, loc. cit., n. 1.

4. Dalla definizione di gruppi di  $S_k$  associati (n. 1), e da quella di complesso lineare speciale di  $S_k$  (cfr. n. 3), si desume :

*Se  $\nu$  spazi  $S_k$  di  $S_r$  sono associati di specie  $\mu$  (n. 1), tutti gli eventuali spazi  $S_{r-k-1}$  incidenti a certi <sup>8)</sup>  $\nu - \mu$  di essi incontrano pure ciascuno dei  $\mu$  spazi restanti.*

In particolare, per  $k = 1$ ,  $\nu = r + 1$  e  $\mu = 1$  si ha che in  $S_r$  un generico <sup>8)</sup> gruppo di  $r + 1$  rette associate di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) è tale che ogni spazio  $S_{r-2}$  appoggiantesi ad  $r$  qualunque di esse deve appoggiarsi alla rimanente : onde le  $r + 1$  rette sono anche associate nel senso di *Schläfli*.

5. Si convenga di dire che più spazi  $S_k$  di  $S_r$  sono *in posizione di Schläfli* quando ogni spazio  $S_{r-k-1}$  incidente ad alcuni, in numero ben determinato ed eventualmente da scegliersi in modo speciale, si appoggia di conseguenza anche agli altri.

Allora, siccome esistono degli  $S_{r-k-1}$  incidenti a  $\lambda$  spazi  $S_k$  appena sia  $\lambda \leq \tau$ , dal teorema del n. 4 si trae il seguente :

*Se, in  $S_r$ , per un gruppo di  $\nu$  spazi  $S_k$  associati di specie  $\mu$  (n. 1) si verifica che :*

$$\nu - \mu \leq (k + 1)(r - k) ,$$

*gli spazi del gruppo sono in posizione di Schläfli : e più precisamente ogni spazio  $S_{r-k-1}$  incontrante certi <sup>8)</sup>  $\nu - \mu$  di essi incontra pure i  $\mu$  spazi residui.*

Ne risulta, come corollario, che, in  $S_r$ ,  $\nu$  spazi  $S_k$  associati qualunque sono sempre in posizione di *Schläfli* quando :

$$\nu \leq (k + 1)(r - k) + 1 ;$$

onde esiste allora un intero  $\mu \geq 1$  (la specie del loro gruppo : n. 1) tale che ogni  $S_{r-k-1}$  incidente a certi <sup>8)</sup>  $\nu - \mu$  di essi, lo è necessariamente a tutti ; e se  $\mu$  non si conosce, supposto generico <sup>8)</sup> il gruppo dei  $\nu$   $S_k$  associati, si potrà ugualmente asserire che gli  $S_{r-k-1}$ , i quali ne incontrano  $\nu - 1$  qualunque, debbono pure incontrare il restante.

Non è forse superfluo avvertire che, nell'ipotesi  $k = 1$ , riescono così definiti anche particolari gruppi di  $S_1$  in posizione di *Schläfli* diversi dalle ordinarie  $(r + 1)$ -uple di rette associate in  $S_r$  : ad esempio, nello spazio a tre dimensioni sono in posizione di *Schläfli* non solo quattro rette iperboliche, ma pure cinque o più rette generiche di una congruenza lineare.

## § 2. Involutione razionale di gruppi di $S_k$ associati entro un sistema algebrico di spazi $S_k$

6. Nello spazio  $S_r$  si consideri un sistema algebrico irriducibile di spazi subordinati  $S_k$ . Se  $\tau' > 0$  ne è la dimensione, esiste in generale un numero finito  $\omega'$  di  $S_k$  generatori incidenti a  $\tau'$  generici spazi  $S_{r-k-1}$ : esso può dirsi l'indice del sistema, il quale si denoterà con  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$ .

Quando  $\tau' = 1$  (e  $k < r - 1$ ) l'indice  $\omega'$  è pure l'ordine della varietà luogo degli  $S_k$  di  $\Theta_1^{\omega'}$ .

Sulla grassmanniana  $V_{\tau}^{\omega}$  la varietà di dimensione  $\tau'$  che corrisponde a  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  è una  $V_{\tau'}^{\omega'}$  di ordine  $\omega'$ : dovendo avere  $\omega'$  punti in comune coi  $\tau'$  iperpiani (linearmente indipendenti) seganti su  $V_{\tau}^{\omega}$  le varietà immagini di  $\tau'$  generici complessi lineari speciali di  $S_k$ .

In generale lo spazio di appartenenza della  $V_{\tau'}^{\omega'}$  è quello stesso,  $S_{\varrho}$ , di  $V_{\tau}^{\omega}$ ; ma si riduce ad un  $S_{\varrho'}$ , di dimensione  $\varrho' < \varrho$  quando per  $V_{\tau'}^{\omega'}$  passano  $\varrho - \varrho'$  iperpiani  $S_{\varrho-1}$  indipendenti: ossia quando  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  è base per un sistema lineare  $\infty^{\varrho-\varrho'-1}$  di complessi lineari di  $S_k$  entro  $S_r$ .

Detto in ogni caso  $S_{\varrho'}$  lo spazio a cui appartiene la  $V_{\tau'}^{\omega'}$ , onde  $\varrho' \leq \varrho$ , uno spazio variabile  $S_{\varrho'-\tau'}$  subordinato di  $S_{\varrho'}$  (ovvero un  $S_{\varrho-\tau'}$  di  $S_{\varrho}$ ) ha generalmente su  $V_{\tau'}^{\omega'}$  un gruppo di  $\omega'$  punti descrivente una involuzione razionale di dimensione  $\tau'(\varrho' - \tau' + 1)$ . In corrispondenza si avrà allora su  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  una involuzione di gruppi di  $\omega'$  spazi  $S_k$ ; i quali risulteranno, in ogni gruppo, associati di specie:

$$\omega' - (\varrho' - \tau' + 1)$$

appena sia (n. 2)  $\omega' - \varrho' + \tau' - 1 > 0$  e:

$$0 < \varrho' - \tau' < \binom{r+1}{k+1} - 1 ,$$

cioè (con  $\tau' > 0$ ) si abbia insieme  $\tau' < \varrho'$  e:

$$\omega' > \varrho' - \tau' + 1 .$$

Si può aggiungere (n. 5) che gli spazi associati suddetti sono addirittura in posizione di *Schläfli* quando:

$$\varrho' - \tau' + 1 \leq (k+1)(r-k) ,$$

ammesso che  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  appartenga ad  $S_r$ .

In conclusione :

Sia  $\Theta_r^{\omega'}$  un sistema algebrico  $\infty^{r'}$  di spazi  $S_k$ , irriducibile<sup>10</sup>), appartenenti ad  $S_r$  e di indice  $\omega'$ : cioè avente  $\omega'$  dei suoi  $S_k$  appoggianti a  $\tau'$  generice spazi  $S_{r-k-1}$ .

Si supponga  $\Theta_r^{\omega'}$  contenuto in (non più di)  $\sigma$  complessi lineari di  $S_k$  (entro  $S_r$ ) linearmente indipendenti, con  $\sigma \geq 0$ , e, posto :

$$\varrho' = \binom{r+1}{k+1} - \sigma - 1 ,$$

si abbia :

$$0 < \tau' < \varrho' < \tau' + \omega' - 1 .$$

Allora  $\varrho' - \tau' + 1$  spazi generatori di  $\Theta_r^{\omega'}$ , prefissabili in modo generico, ne individuano altri :

$$\mu' = \omega' - \varrho' + \tau' - 1$$

che insieme coi primi costituiscono un gruppo di  $\omega'$  spazi  $S_k$  associati di specie  $\mu'$  (n. 1), ed anzi in posizione di Schläfli (n. 5) qualora sia :

$$\varrho' - \tau' + 1 \leq (k+1)(r-k) .$$

Tutti i gruppi siffatti di  $S_k$  formano, entro  $\Theta_r^{\omega'}$ , un'involuzione razionale  $I_{\delta'}^{\omega'}$  di ordine  $\omega'$  e di dimensione :

$$\delta' = \tau'(\varrho' - \tau' + 1) ,$$

costruibile come segue.

In  $S_r$ , un generico sistema lineare di complessi lineari di spazi  $S_{r-k-1}$ , avente la dimensione :

$$\binom{r+1}{k+1} - \tau' - 1 ,$$

ne contiene  $\omega'$  speciali (n. 3) e coi rispettivi  $S_k$ -assi appartenenti a  $\Theta_r^{\omega'}$ : questi riempiono un gruppo della  $I_{\delta'}^{\omega'}$ .

Altrimenti, si considerino, in  $S_r$ ,  $\tau'$  complessi lineari di  $S_k$ , linearmente indipendenti e non passanti per  $\Theta_r^{\omega'}$ : essi hanno in comune  $\omega'$  spazi  $S_k$  situati in  $\Theta_r^{\omega'}$  e costituenti un gruppo della  $I_{\delta'}^{\omega'}$ .

Osservazione 1<sup>a</sup>. — Quando, in particolare,  $\Theta_r^{\omega'}$  è la totalità degli  $S_k$  di  $S_r$ , l'involuzione  $I_{\delta'}^{\omega'}$  diviene quella dei gruppi di  $S_k$  associati in  $S_r$  secondo B. Segre<sup>5</sup>).

---

<sup>10</sup>) L'irriducibilità di ogni ente algebrico, che si consideri, dovrà in seguito sempre sottintendersi.

Osservazione 2<sup>a</sup>. — Se  $\tau' = 1$ , e quindi gli  $S_k$  del sistema  $\Theta_1^{\omega'}$  sono gli spazi generatori di una varietà  $W_{k+1}^{\omega'}$  di dimensione  $k+1$  e di ordine  $\omega'$ , l'involuzione  $I_{\delta'}^{\omega'}$  ha la dimensione  $\delta' = \varrho'$  e corrisponde in  $S_r$  alla serie lineare  $g_{\omega'}^{\varrho'}$  delle sezioni iperpiane di  $V_1^{\omega'}$ , curva immagine di  $\Theta_1^{\omega'}$  sulla grassmanniana  $V_{\tau}^{\omega}$ ; onde essa può definirsi su  $W_{k+1}^{\omega'}$  come la serie lineare  $g_{\omega'}^{\varrho'}$  staccata dai complessi lineari di  $S_k$  (entro  $S_r$ ): cioè descritta dal gruppo degli  $\omega'$   $S_k$  generatori di  $W_{k+1}^{\omega'}$  appartenenti ad un complesso lineare variabile (non passante per  $W_{k+1}^{\omega'}$ ) di spazi  $S_k$ .

Osservazione 3<sup>a</sup>. — Se un sistema algebrico  $\Theta_{i''}^{\omega'}$  di spazi  $S_k$ , in  $S_r$ , ha per immagine sulla grassmanniana  $V_{\tau}^{\omega}$  la completa intersezione della immagine  $V_{\tau'}^{\omega'}$ , appartenente ad  $S_{\varrho'}$ , di  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  con uno spazio  $S_{\varrho''}$  di  $S_{\varrho'}$ , (onde  $\tau'' - \varrho'' = \tau' - \varrho'$ ) è ovvio che l'involuzione  $I_{\delta''}^{\omega'}$  dei gruppi di  $\omega'$   $S_k$  associati entro  $\Theta_{i''}^{\omega'}$  risulta subordinata dall'analoga involuzione  $I_{\delta'}^{\omega'}$  entro  $\Theta_{i'}^{\omega'}$ .

Osservazione 4<sup>a</sup>. — Come corollario della Oss. 3<sup>a</sup> si ha che l'involuzione  $I_{\delta'}^{\omega'}$  entro  $\Theta_{i'}^{\omega'}$  è subordinata dall'involuzione di B. Segre entro la totalità degli  $S_k$  di  $S_r$  (Oss. 1<sup>a</sup>) quando il sistema  $\Theta_{i'}^{\omega'}$  (con  $\omega' = \omega$ ) è base per un sistema lineare  $\infty^{\tau-\tau'-1}$  di complessi lineari di  $S_k$  in  $S_r$ .

7. Tenendo presente che lo spazio di appartenenza  $S_{\varrho'}$  della varietà  $V_{\tau'}^{\omega'}$  (n. 6) ha la dimensione non maggiore di  $\tau' + \omega' - 1$ , si può asserire che se  $\varrho' = \varrho$  è:

$$\varrho \leq \tau' + \omega' - 1 ;$$

e che quando  $\varrho > \tau' + \omega' - 1$  è pure  $\varrho' < \varrho$  con:

$$\varrho - \varrho' \geq \varrho - \tau' - \omega' + 1 .$$

Quindi:

Se  $\tau'$  e  $\omega'$  sono la dimensione e l'indice (n. 6) di un sistema algebrico  $\Theta$  di spazi  $S_k$ , appartenente ad  $S_r$ , si verifica che, quando  $\Theta$  non è contenuto in alcun complesso lineare di  $S_k$  si ha:

$$\tau' + \omega' \geq \binom{r+1}{k+1} ;$$

mentre  $\Theta$  è necessariamente base per un sistema lineare  $\infty^{\sigma-1}$  di complessi lineari di  $S_k$ , con:

$$\sigma \geq \binom{r+1}{k+1} - \tau' - \omega' ,$$

quando:

$$\tau' + \omega' < \binom{r+1}{k+1} ;$$

nel qual caso  $\tau' + \omega' + 1$  spazi  $S_k$  arbitrari di  $\Theta$  sono sempre associati (di 1<sup>a</sup> specie almeno: n. 1), ed anzi in posizione di Schläfli (n. 5) se:

$$\tau' + \omega' \leq (k+1)(r-k) .$$

In relazione all'argomento di questo n. 7 si veggano più innanzi i §§ 5 e 6.

8. È noto<sup>11)</sup> che ogni complesso di spazi  $S_k$ , entro  $S_r$ , di grado  $n$ , cioè avente  $n$  suoi spazi in un generico fascio di  $S_k$ , si rappresenta sulla grassmanniana  $V_r^\omega$  d'indici  $(r, k)$  mediante la varietà  $V_{r-1}^{n\omega}$  completa intersezione di  $V_r^\omega$  con una forma d'ordine  $n$ .

Dal teorema del n. 6 si deduce allora l'altro:

*In ogni complesso di  $S_k$ , entro  $S_r$ , di grado  $n > 1$ , esistono:*

$$\infty^{(\tau-1)(\varrho-\tau+2)}$$

*gruppi di  $n\omega$  spazi  $S_k$  associati di specie (n. 1):*

$$n\omega = \varrho + \tau - 2 .$$

*Ciascuno di tali gruppi è individuato da  $\varrho - \tau + 2$  qualunque dei suoi spazi; e per  $\varrho - \tau + 2$  generici  $S_k$  del complesso ne passa uno solo.*

I gruppi stessi constano di spazi situati in posizione di Schläfli (n. 5) quando:  $r = 3$  e  $k = 1$ ;  $r = 4$  e  $k = 1$  o  $k = 2$ ;  $r = 5$  e  $k = 1$  o  $k = 3$ . Ne segue ad esempio che:

*Nello spazio a quattro dimensioni un complesso di piani, di grado  $n > 1$ , possiede  $\infty^{25}$  gruppi di  $5n$  piani tali che le  $\infty^1$  rette incidenti a 5 piani qualsiasi di ciascun gruppo (e formanti una rigata ellittica del 5<sup>o</sup> ordine) risultano pure incidenti agli altri  $5n - 5$  (E dualmente).*

Ed ancora:

*In  $S_5$  un complesso di rette, di grado  $n > 1$ , contiene  $\infty^{56}$  gruppi di  $14n$  rette ciascuno, caratterizzati dalla proprietà che i 14 spazi  $S_3$  appoggianti ad 8 rette qualunque di ogni gruppo incontrano pure le rimanenti  $14n - 8$  (E dualmente).*

---

<sup>11)</sup> F. Severi, loc. cit., n. 6.

### § 3. Gruppi di $S_k$ associati aventi un $S_k$ in una data forma fondamentale e gli altri $S_k$ preassegnabili

9. In  $S_r$  si consideri il sistema  $\Phi$  di tutti gli  $S_k$  soddisfacenti alla *condizione di Schubert*  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ , cioè la forma fondamentale  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$  costituita dagli spazi  $S_k$  di  $S_r$  situati in un dato  $S_{a_k}$  e aventi in comune: un punto con un dato  $S_{a_0}$ , una retta con un dato  $S_{a_1}, \dots$ , un  $S_{k-1}$  con un dato  $S_{a_{k-1}}$ ; essendo:

$$0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_k \leq r,$$

e appartenendo sempre lo spazio  $S_{a_i}$  ad  $S_{a_{i+1}}$ .

La dimensione di  $\Phi$  è:

$$\Delta = a_0 + a_1 + \dots + a_k - \binom{k+1}{2};$$

mentre il suo *indice* (n. 6), ossia il numero degli  $S_k$  di  $\Phi$  incidenti ciascuno a  $\Delta$  generici spazi  $S_{r-k-1}$ , è <sup>12)</sup>:

$$\Omega = \frac{\Delta!}{a_0! a_1! \dots a_k!} \prod_{i > j} (a_i - a_j).$$

Sulla grassmanniana  $V_r^\omega$  d'indici  $(r, k)$  il sistema  $\Phi$  è rappresentato da una varietà di dimensione  $\Delta$  e di ordine  $\Omega$ : infatti è precisamente  $\Omega$  il numero dei punti comuni a tale varietà e a  $\Delta$  iperpiani indipendenti, seganti ciascuno  $V_r^\omega$  nella varietà immagine di un complesso lineare speciale di  $S_k$ .

10. Dati in  $S_r$ , genericamente,  $\nu$  spazi  $S_k^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ ) esistono certo altri  $S_k$  completanti ciascuno con essi un gruppo di  $\nu + 1$  spazi associati di prima specie (n. 1), appena sia  $\varrho \geq \nu > \varrho - \tau$ . Infatti i punti  $P_i$  immagini in  $S_\varrho$  degli  $S_k^{(i)}$  giacciono in un  $S_{\nu-1}$  che sega allora  $V_r^\omega$  in una varietà  $V_\sigma^\omega$  se:

$$\nu = \varrho - \tau + \sigma + 1$$

(e  $0 \leq \sigma < \tau$ ): ogni punto della quale, diverso dai  $P_i$ , rappresenta un  $S_k$  con la proprietà suddetta.

Alla  $V_\sigma^\omega$  corrisponde in  $S_r$  un sistema algebrico  $\infty^\sigma$ , d'indice  $\omega$  (n. 6), di spazi  $S_k$ , e quindi la varietà di punti  $W_{k+\sigma}$  luogo degli  $S_k$  di tale sistema: la quale invade l'  $S_r$  quando  $\sigma \geq r - k$ .

---

<sup>12)</sup> H. Schubert, Anzahl-Bestimmung für lineare Räume beliebiger Dimension (Acta mathematica, 8, 1886).

In ogni caso, supposto  $\sigma > 0$ , sulla  $W_{k+\sigma}$  gli eventuali  $S_k$  generatori soddisfacenti alla condizione di *Schubert*  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$  riempiono una varietà  $W'$  rappresentata in  $S_\varrho$  dalla sezione dello spazio  $S_{\nu-1}$  con la  $V_A^\Omega$  immagine (n. 9) della forma fondamentale  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ ; onde, in generale, la  $W'$  esiste solo se  $\Delta + \nu > \varrho$ , ossia  $\Delta \geq \tau - \sigma$ : e consta allora di un sistema algebrico  $\infty^{\Delta - \tau + \sigma}$ , d'indice  $\Omega$  (n. 9), di spazi  $S_k$ .

Si può dunque intanto concludere:

*Fissati nello spazio  $S_r$  ad  $r$  dimensioni  $\nu$  generici spazi  $S_k^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ ) di dimensione  $k$ , con*

$$\binom{r+1}{k+1} - (k+1)(r-k) < \nu < \binom{r+1}{k+1},$$

*fra gli  $S_k$  di  $S_r$  soddisfacenti alla condizione  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$  di Schubert (n. 9), quando sia:*

$$\binom{r+1}{k+1} - \nu \leq \Delta < (k+1)(r-k),$$

*ove:*

$$\Delta = \sum_{i=0}^k a_i - \binom{k+1}{2},$$

*ne esistono:*

$$\frac{\Delta!}{a_0! a_1! \dots a_k!} \prod_{i>j} (a_i - a_j)$$

*incidenti a:*

$$\Delta + \nu - \binom{r+1}{k+1}$$

*generici spazi  $S_{r-k-1}$  e formanti ciascuno coi  $\nu$  spazi  $S_k^{(i)}$  un gruppo di  $\nu + 1$   $S_k$  associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1).*

**11.** In  $S_r$  si consideri uno spazio subordinato  $S_{r'}$ , e in  $S_{r'}$  una stella di centro  $S_{k'}$ . L'appartenenza di un  $S_k$  di  $S_r$  a tale stella si esprime con la condizione di *Schubert*:

$$(0, 1, \dots, k' - 1, k', r' - k + k' + 1, r' - k + k' + 2, \dots, r' - 1, r');$$

ed applicando allora il teorema del n. 10 si perviene al risultato che segue<sup>13)</sup>:

---

<sup>13)</sup> Ove, per semplicità di enunciato, si è posto  $r' = k + l$  e  $k' = k - h$ .



Nello spazio  $S_r$  ad  $r$  dimensioni si prefissino genericamente uno spazio  $S_{k+l}$ , un  $S_{k-h}$  entro  $S_{k+l}$  e  $\nu$  spazi  $S_k^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ ). Se allora è :

$$0 < h \leq k < r, \quad 0 < l \leq r - k$$

e :

$$\binom{r+1}{k+1} - hl \leq \nu < \binom{r+1}{k+1},$$

esistono :

$$\frac{0! \, 1! \, 2! \, \dots \, (h-1)! \, (hl)!}{l! \, (l+1)! \, \dots \, (l+h-1)!}$$

spazi  $S_k$  passanti per l' $S_{k-h}$ , giacenti nell' $S_{k+l}$ , formanti ciascuno un gruppo di  $\nu + 1$  spazi associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) con gli  $S_k^{(i)}$  e inoltre incidenti a :

$$\nu + hl - \binom{r+1}{k+1}$$

dati spazi  $S_{r-k-1}$  generici di  $S_r$ , ossia ad altrettanti spazi  $S_{l-1}$  generici di  $S_{k+l}$ .

Casi particolari notevoli del teorema sono :

A) Per uno spazio  $S_{k-h}$  generico ( $1 \leq h \leq k$ ) di  $S_r$  passano :

$$\frac{0! \, 1! \, 2! \, \dots \, (h-1)! \, (hr - hk)!}{(r-k)! \, (r-k+1)! \, \dots \, (r-k+h-1)!} \quad \alpha)$$

spazi  $S_k$  costituenti ciascuno un gruppo di  $S_k$  associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) con :

$$\binom{r+1}{k+1} - h(r-k)$$

dati  $S_k$  generici.

B) In  $S_r$  gli  $\infty^1$  spazi  $S_k$  ( $k \leq r-2$ ) passanti per uno spazio  $S_{k-h}$  generico ( $1 \leq h \leq k$ ) e formanti ciascuno un gruppo di  $S_k$  associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) con :

$$\binom{r+1}{k+1} - h(r-k) + 1$$

spazi  $S_k$  genericamente assegnati, riempiono una varietà (di dimensione  $k+1$  e) di ordine  $\alpha$ ).

**12.** Il teorema del n. 10, applicato nell'ipotesi che la condizione di *Schubert* imposta agli  $S_k$  di  $S_r$  sia :

$$(l, l+1, l+2, \dots, l+k) ,$$

conduce al seguente :

In  $S_r$ , supposto  $0 < l < r - k$  e :

$$\binom{r+1}{k+1} - (k+1)l \leq v < \binom{r+1}{k+1} ,$$

gli  $S_k$  appartenenti ad un dato spazio  $S_{k+l}^*$ , e formanti ciascuno un gruppo di  $v+1$  spazi associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) con  $v$  spazi  $S_k$  genericamente assegnati fuori di  $S_{k+l}^*$ , costituiscono un sistema algebrico di dimensione :

$$v + (k+1)l - \binom{r+1}{k+1}$$

e di indice (n. 6) :

$$\chi = \frac{1! \, 2! \, \dots \, k! \, (kl+l)!}{l! \, (l+1)! \, \dots \, (l+k)!} .$$

In particolare è  $\chi$  il numero degli  $S_k$  di  $S_{k+l}^*$  completanti ciascuno un gruppo di spazi associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) con :

$$\binom{r+1}{k+1} - (k+1)l$$

dati  $S_k$  generici di  $S_r$ ; e se  $k \leq r-2$  è pure  $\chi$  l'ordine della varietà (di dimensione  $k+1$ ) luogo degli  $\infty^1 S_k$  di  $S_{k+l}^*$  costituenti ciascuno un gruppo di spazi associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) con :

$$\binom{r+1}{k+1} - (k+1)l + 1$$

spazi  $S_k$  prefissabili in modo generico (fuori di  $S_{k+l}^*$ ).

**13.** La condizione affinchè, in  $S_r$ , uno spazio  $S_k$  incontri un dato spazio  $S_m$  in uno spazio  $S_{k-l}$  non dato, si esprime col simbolo di *Schubert* :

$$(m+l-k, \quad m+l-k+1, \dots, m, \quad r-l+1, \quad r-l+2, \dots, r).$$

Se allora si applica il teorema generale del n. 10, si trova che :

Posto :

$$\delta = (m + l - k)(k - l + 1) + l(r - k)$$

e

$$W = \delta! \binom{r-m}{l} \binom{r-m+1}{l} \dots \binom{r-m+k-l}{l} (l!)^{k-l+1},$$

fatte inoltre le ipotesi :

$$0 < l \leq k < l + m < r$$

e

$$\binom{r+1}{k+1} - \delta \leq v < \binom{r+1}{k+1},$$

nello spazio  $S_r$  ad  $r$  dimensioni esistono :

$$\frac{0! 1! 2! \dots (l-1)! \cdot 1! 2! \dots (k-l)!}{(m+l-k)! (m+l-k+1)! \dots m! (r-l+1)! (r-l+2)! \dots r!} \cdot W$$

spazi  $S_k$  incidenti in un  $S_{k-l}$  (non dato) ad un dato spazio  $S_m$ , appoggianti a :

$$v + \delta - \binom{r+1}{k+1}$$

generici spazi  $S_{r-k-1}$ , e formanti ciascuno un gruppo di  $v + 1$  spazi associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) con  $v$  spazi  $S_k$  genericamente prefissabili.

Come corollari :

$\alpha$ ) In  $S_r$  gli  $S_k$  incidenti (in un punto) ad un dato  $S_m$  e formanti ciascuno un gruppo di  $S_k$  associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) con :

$$\binom{r+1}{k+1} - k(r-k) - m + \varepsilon$$

spazi  $S_k$  genericamente prescelti, sono in numero di  $N$  se  $\varepsilon = 0$ , e riempiono una varietà di dimensione  $k + 1$  e d'ordine  $N$  se  $\varepsilon = 1$ ; ove :

$$N = \frac{1! 2! \dots k! (m + rk - k^2)!}{m! (r - k + 1)! (r - k + 2)! \dots r!} \binom{r-m}{k}.$$

$\beta$ ) In  $S_r$  gli  $S_k$  incidenti ad un dato  $S_m$  in un  $S_{k-1}$  (non dato) e formanti ciascuno un gruppo di  $S_k$  associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1) con :

$$\binom{r+1}{k+1} - k(m-k) - r + \varepsilon'$$

spazi  $S_k$  genericamente prescelti, sono in numero di  $N'$  se  $\varepsilon' = 0$ , e riempiono una varietà di dimensione  $k+1$  e d'ordine  $N'$  se  $\varepsilon' = 1$ ; ove:

$$N' = \frac{1! \, 2! \, \dots \, k! \, (r + mk - k^2)!}{r! \, (m - k + 1)! \, (m - k + 2)! \, \dots \, m!} \binom{r - m + k - 1}{k}.$$

Notevole è il caso particolare, del teorema  $\beta$ ), in cui  $m = k$ : allora si ha semplicemente per  $N'$  il valore  $\binom{r-1}{k}$ .

#### § 4. Varietà algebriche costituite da $S_k$ a $\nu+1$ a $\nu+1$ associati

14. Riprendendo in considerazione la varietà  $W_{k+\sigma}$  di cui al n. 10, si supponga  $0 < \sigma < r - k$ . L'ordine di essa è allora il numero dei suoi  $S_k$  incidenti ad un  $S_{r-k-\sigma}$ , cioè appartenenti alla forma fondamentale:

$$[r - k - \sigma, \, r - k + 1, \, r - k + 2, \dots, \, r - 1, \, r],$$

e quindi si calcola col teorema del n. 10. Inoltre  $\nu+1$  generici  $S_k$  di  $W_{k+\sigma}$  risultano (n. 2) associati di 1<sup>a</sup> specie, giacchè i loro punti immagini sulla grassmanniana  $V_r^\omega$  giacciono nell' $S_{\nu-1}$  congiungente i punti  $P_i$  rappresentativi dei  $\nu$  spazi  $S_k^{(i)}$  che individuano (n. 10) la varietà stessa. Questa, come sistema algebrico  $\infty^\sigma$  d'indice  $\omega$  (n. 10) dei propri  $S_k$  generatori, contiene poi un'involuzione razionale di gruppi di  $S_k$  associati in base al teorema del n. 6.

Osservando infine (cfr. n. 3) che lo spazio  $S_{\nu-1}$  è l'immagine in  $S_q$  di un sistema lineare  $\infty^{\nu-1}$  di complessi lineari di spazi  $S_{r-k-1}$  entro  $S_r$ , mentre la sua sezione con  $V_r^\omega$  rappresenta la varietà base di un sistema lineare  $\infty^{\varepsilon-\nu}$  di complessi lineari di  $S_k$ , si perviene al teorema seguente:

*Nello spazio  $S_r$  ad  $r$  dimensioni, se:*

$$\nu = \binom{r+1}{k+1} - (k+1)(r-k) + \sigma$$

*con  $0 < \sigma < r - k$ , esistono:*

$$\infty^{\nu \binom{r+1}{k+1} - \nu^2}$$

*varietà  $W_{k+\sigma}$  (di dimensione  $k + \sigma < r$ ) costituite ciascuna da  $\infty^\sigma$  spazi  $S_k$  e caratterizzate dalla proprietà di avere gli  $S_k$  generatori formanti a  $\nu+1$  a  $\nu+1$  gruppi di spazi associati: generalmente di 1<sup>a</sup> specie (n. 1).*

Per  $\nu$  spazi  $S_k^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ ) generici<sup>14)</sup> di  $S_r$  passa una ed una sola di tali varietà  $W_{k+\sigma}$ , la quale :

1) Ha l'ordine eguale a :

$$\frac{1! 2! \dots k! (kr - k^2)!}{(r - k + 1)! (r - k + 2)! \dots r!} \binom{(k+1)(r-k) - \sigma}{kr - k^2} \binom{k + \sigma}{k}.$$

2) È il luogo degli  $S_k$ -assi di tutti i complessi lineari speciali di spazi  $S_{r-k-1}$ , entro  $S_r$ , contenuti in un sistema algebrico  $\infty^{\nu-1}$  di complessi lineari di  $S_{r-k-1}$ : quello individuato dai  $\nu$  complessi lineari speciali di  $S_{r-k-1}$  aventi per assi gli spazi  $S_k^{(i)}$ .

3) È il luogo degli  $S_k$  comuni a tutti i complessi lineari di spazi  $S_k$ , entro  $S_r$ , passanti per i  $\nu$  spazi  $S_k^{(i)}$ .

Ognuna delle suddette varietà  $W_{k+\sigma}$  contiene un'involuzione razionale di gruppi di  $S_k$  avente la dimensione  $\sigma(\nu - \sigma)$  e l'ordine  $\omega$  (n. 1): subordinati dalla involuzione dei gruppi di  $S_k$  associati in  $S_r$  secondo B. Segre (n. 6, Oss. 1<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>); onde  $\nu - \sigma$  spazi generatori, sopra ciascuna varietà  $W_{k+\sigma}$ , genericamente assegnati, ne individuano altri  $\omega - \nu + \sigma$  costituenti coi primi un gruppo di  $\omega$   $S_k$  associati (n. 1) di specie  $\omega - \nu + \sigma$ ; il quale coincide col gruppo determinato in  $S_r$  da quegli stessi  $\nu - \sigma$  spazi entro l'involuzione di B. Segre<sup>15)</sup> fra gli  $S_k$  di  $S_r$ .

Osservazione 1<sup>a</sup>. — Avuto riguardo alla nota<sup>14)</sup> si vede che fra le  $W_{k+\sigma}$ , di cui al teorema precedente, può annoverarsi la varietà luogo degli  $\infty^\sigma$  spazi  $S_k$  di  $S_r$  incidenti a :

$$(k+1)(r-k) - \sigma$$

spazi  $S_{r-k-1}$  genericamente dati, quando  $0 < \sigma < r - k$ .

Per  $k = \sigma = 1$  si ha in particolare una superficie d'ordine :

$$\frac{2}{r} \binom{2r-3}{r-2}$$

<sup>14)</sup> Qui e in seguito si dice che  $\lambda$  spazi  $S_k$  sono generici in  $S_r$  nel senso che i rispettivi  $\lambda$  punti immagini sulla grassmanniana  $V_r^\omega$  d'indici  $(r, k)$  sono indipendenti, e il loro spazio congiungente  $S_{\lambda-1}$  non incontra altrove la  $V_r^\omega$  se  $\lambda \leq \varrho - \tau$ , nè la taglia in varietà di dimensione superiore a  $\lambda + \tau - \varrho - 1$  se  $\lambda > \varrho - \tau$ .

<sup>15)</sup> Si noti che  $\nu - \sigma = \varrho - \tau + 1$ , e che ogni gruppo di  $S_k$  associati in  $S_r$  secondo B. Segre (n. 6, Oss. 1<sup>a</sup>) è precisamente individuato da  $\varrho - \tau + 1$  qualunque dei suoi  $\omega$  spazi.

costituita dalle rette di  $S_r$  appoggiantisi a  $2r - 3$  generici spazi  $S_{r-2}$ ; la quale si riduce in  $S_5$  ad una notevole rigata  $V_2^{14}$  considerata da B. Segre <sup>7)</sup>).

Osservazione 2<sup>a</sup>. — Nell'ipotesi  $k = 1$  il teorema concerne alcune varietà rigate, di  $S_r$ , aventi la dimensione  $\sigma + 1 < r$ , l'ordine :

$$\frac{\sigma + 1}{r} \binom{2r - \sigma - 2}{r - 1},$$

e individuate ciascuna da :

$$\binom{r - 1}{2} + \sigma + 1$$

rette generatrici prefissabili in modo generico<sup>14)</sup>.

Se  $r = 4$  e  $\sigma = 1$  si tratta della rigata ellittica normale  $V_2^5$  di  $S_4$ .

Se  $r = 5$  e  $\sigma = 1$  si ritrova la  $V_2^{14}$  di  $S_5$  studiata da B. Segre <sup>7)</sup>.

Osservazione 3<sup>a</sup>. — Nell'ipotesi  $\sigma = r - k - 1$  il teorema caratterizza una estesa classe di ipersuperficie, dello spazio  $S_r$ , costituite da  $\infty^{r-k-1} S_k$ , tutte di ordine :

$$\frac{1! \ 2! \ \dots \ k! (kr - k^2 + 1)!}{(r - k + 1)! (r - k + 2)! \ \dots \ r!} \binom{r - 1}{k},$$

e tali che per :

$$\binom{r + 1}{k + 1} - k(r - k) - 1$$

$S_k$  generici<sup>14)</sup> di  $S_r$  ne passa una ed una sola.

A questa classe di ipersuperficie appartiene in particolare (cfr. Oss. 1<sup>a</sup>) l'ipersuperficie luogo degli  $S_k$  di  $S_r$  incidenti a  $k(r - k) + 1$  spazi  $S_{r-k-1}$  generici.

Osservazione 4<sup>a</sup>. — Se  $k = 1$  e  $\sigma = r - 2$  il teorema diviene :

Nello spazio  $S_r$ , ad  $r$  dimensioni,  $\binom{r}{2}$  rette generiche<sup>14)</sup> appartengono sempre ad una ipersuperficie rigata  $V_{r-1}^{r-1}$  d'ordine  $r - 1$ , sulla quale  $\binom{r}{2} + 1$  generatrici qualunque formano un gruppo di rette associate di 1<sup>a</sup> specie almeno (n. 1); mentre  $\binom{r - 1}{2} + 1$  generatrici generiche ne determinano altre :

$$\frac{2}{r} \binom{2r-3}{r-2} - \binom{r-1}{2} - 1$$

completanti con le prime un gruppo di rette associate in  $S_r$  ( $r > 3$ ) secondo B. Segre (n. 6, Oss. 1<sup>a</sup>).

In particolare (cfr. Oss. 3<sup>a</sup>) la  $V_{r-1}^{r-1}$  può essere l'ipersuperficie luogo delle rette di  $S_r$  incidenti ad  $r$  generici spazi  $S_{r-2}$ : la quale si riduce in  $S_4$  alla  $V_3^3$  con 10 punti doppi di C. Segre <sup>6</sup>).

**15.** Il teorema del n. 14 offre senz'altro la completa risoluzione del problema seguente:

*Determinare in  $S_r$  le varietà, irriducibili e non invadenti l' $S_r$ , costituite da spazi subordinati di dimensione non inferiore a 1 nè superiore a  $r-2$ , e caratterizzate dalla proprietà che per ciascuna,  $W$ , di esse esista un intero  $\nu$  tale che  $\nu$  spazi generici di  $W$  siano pure generici in  $S_r$ <sup>14</sup>), mentre  $\nu+1$  spazi generici di  $W$  siano associati di 1<sup>a</sup> specie (n. 1).*

Se  $k$  è la dimensione degli spazi generatori di  $W$ , e  $k+\sigma$  quella di  $W$ , deve essere (cfr. n. 14):

$$\nu = \varrho - \tau + \sigma + 1, \quad 0 < \sigma < r - k, \quad 0 < k < r - 1;$$

quindi al variare di  $k$  si ottengono per  $\sigma$  (e per  $\nu$ ) in tutto:

$$\sum_{k=1}^{r-2} (r - k - 1) = \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$$

valori. Pertanto:

*Il problema suddetto ammette  $\binom{r-1}{2}$  soluzioni omograficamente distinte, date dalle varietà  $W_{k+\sigma}$  del teorema del n. 14: fra di esse le varietà di dimensione  $h$  (con  $h = 2, 3, \dots, r-1$ ) sono in numero di  $h-1$ .*

La sola (a meno di trasformazioni omografiche) superficie rigata soluzione del problema ha per immagine sulla grassmanniana delle rette di  $S_r$  una generica sezione curvilinea di questa (cfr. n. 14): onde il suo genere si desume da un teorema del Severi<sup>16</sup>).

Si trova così, ad esempio, che:

*In  $S_3$  il problema ha per unica soluzione un regolo  $V_2^2$  ( $\nu = 3$ ).*

---

<sup>16</sup>) F. Severi, loc. cit., n. 17.

In  $S_4$  si hanno come soluzioni : la rigata ellittica normale  $V_2^5$  ( $\nu = 5$ ) ; l'ipersuperficie cubica rigata  $V_3^3$  ( $\nu = 6$ ), con 10 punti doppi, di C. Segre <sup>6</sup>) ; e la  $V_3^5$  ( $\nu = 5$ ), luogo di piani, duale della  $V_2^5$ .

In  $S_5$  le sei soluzioni sono : tre varietà rigate, cioè la  $V_2^{14}$  ( $\nu = 8$ ), avente il genere 8, di B. Segre <sup>7</sup>), una  $V_3^9$  ( $\nu = 9$ ) ed una  $V_4^4$  ( $\nu = 10$ ) ; due varietà, una  $V_3^{42}$  ( $\nu = 12$ ) e una  $V_4^{21}$  ( $\nu = 13$ ), di piani ; e la  $V_4^{14}$  ( $\nu = 8$ ), luogo di spazi  $S_3$ , duale della  $V_2^{14}$ .

In  $S_6$  le dieci soluzioni sono : quattro varietà rigate, ossia una  $V_2^{42}$  ( $\nu = 12$ ) di genere 43, una  $V_3^{28}$  ( $\nu = 13$ ), una  $V_4^{14}$  ( $\nu = 14$ ) ed una  $V_5^5$  ( $\nu = 15$ ) ; tre varietà, una  $V_3^{462}$  ( $\nu = 24$ ), una  $V_4^{252}$  ( $\nu = 25$ ) e una  $V_5^{84}$  ( $\nu = 26$ ), di piani ; due varietà, la  $V_4^{462}$  ( $\nu = 24$ ) duale della  $V_3^{462}$  e una  $V_5^{210}$  ( $\nu = 25$ ), di spazi  $S_3$  ; ed infine la  $V_5^{42}$  ( $\nu = 12$ ), luogo di spazi  $S_4$ , duale della  $V_2^{42}$ .

## § 5. Genere sezionale di un sistema algebrico di spazi $S_k$

16. Sia  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  un sistema algebrico  $\infty^{\tau'}$  di spazi  $S_k$ , appartenente ad  $S_r$  e d'indice  $\omega'$  (n. 6) : cosicchè esistano  $\omega'$  suoi  $S_k$  generatori incidenti a  $\tau'$  generici spazi  $S_{r-k-1}$ .

Se  $\tau' = 1$  (e  $k < r - 1$ ) si tratta di una varietà d'ordine  $\omega'$ , luogo di  $\infty^1$  spazi  $S_k$ .

Se  $\tau' \geq 2$ , un generico sistema lineare  $\infty^{e-\tau'+1}$  di complessi lineari di  $S_{r-k-1}$ , entro  $S_r$ , ne contiene  $\infty^1$  speciali coi rispettivi assi  $S_k$  appartenenti al sistema  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  e ivi formanti una varietà  $W_{k+1}^{\omega'}$  di ordine  $\omega'$  : abbia essa, quale serie semplicemente infinita di  $S_k$ , il genere  $\pi$ .

La  $W_{k+1}^{\omega'}$  si può anche definire come il luogo degli  $\infty^1$   $S_k$  comuni al sistema  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  e a  $\tau' - 1$  complessi lineari di  $S_k$  genericamente assegnati in  $S_r$ .

Sulla grassmanniana  $V_{\tau'}^{\omega'}$  d'indici  $(r, k)$  il sistema  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  è rappresentato da una varietà  $V_{\tau'}^{\omega'}$  di ordine  $\omega'$  e la  $W_{k+1}^{\omega'}$  da una generica sezione curvilinea  $V_1^{\omega'}$  di  $V_{\tau'}^{\omega'}$  : avente lo stesso genere  $\pi$  che in  $S_r$  ha la  $W_{k+1}^{\omega'}$ .

Estendendo una denominazione di C. Segre e G. Fano <sup>17</sup>) si dirà che  $\pi$  è il *genere sezionale* sia del sistema algebrico  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  di spazi  $S_k$  che della sua varietà immagine  $V_{\tau'}^{\omega'}$  sulla grassmanniana  $V_{\tau'}^{\omega'}$ .

17. Fra l'indice  $\omega'$  e il genere sezionale  $\pi$  (n. 16) del sistema algebrico  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  (con  $\tau' > 1$ ) di spazi  $S_k$  si supponga intercedere la relazione  $\omega' > 2\pi - 2$ . Se allora è un  $S_{e'}$ , lo spazio di appartenenza della varietà  $V_{\tau'}^{\omega'}$  immagine di

<sup>17</sup>) G. Fano, Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare [Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, 51 (2), 1902], n. 2. Cfr. pure: A. Longhi, Sulla intersezione di due o più varietà algebriche (Commentarii math. Helvetici, 18, 1945—46).



$\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  sulla grassmanniana  $V_{\tau'}^{\omega'}$ , la generica sezione curvilinea  $V_1^{\omega'}$ , di ordine  $\omega'$  e genere  $\pi$ , della  $V_{\tau'}^{\omega'}$  appartiene ad un  $S_{\varrho' - \tau' + 1}$ ; e siccome per l'ipotesi  $\omega' > 2\pi - 2$  la serie lineare  $g_{\omega'}^{\varrho' - \tau' + 1}$  segata su  $V_1^{\omega'}$  dagli iperpiani è certo *non speciale*, dev'essere :

$$\varrho' - \tau' + 1 \leq \omega' - \pi$$

ossia :

$$\varrho' = \tau' + \omega' - \pi - \mu$$

con  $\mu \geq 1$ ; e se  $\nu = \tau' + \omega' - \pi + 1$ , risulta :

$$\varrho' = \nu - \mu - 1 ;$$

onde si conclude (n. 2) che  $\nu$  spazi  $S_k$  generici di  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  sono associati di specie  $\mu$  (n. 1) appena sia  $\varrho' < \varrho$ .

Se invece si suppone  $\varrho' - \tau' + 1 > \omega' - \pi$  (e  $\omega' \leq 2\pi - 2$ ), la serie  $g_{\omega'}^{\varrho' - \tau' + 1}$  delle sezioni iperpiane di  $V_1^{\omega'}$  è *speciale*, e si ha quindi :

$$\varrho' - \tau' + 1 \leq \pi - 1 .$$

D'altra parte, se  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  non è contenuto in alcun complesso lineare di  $S_k$  (ossia la varietà  $V_{\tau'}^{\omega'}$  non giace in nessun iperpiano di  $S_{\varrho}$ ) è  $\varrho' = \varrho$ ; mentre per  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  passano  $\sigma = \varrho - \varrho'$ , e non più, complessi lineari di  $S_k$  linearmente indipendenti, allorchè  $\varrho' < \varrho$ .

Dopo ciò, da quanto precede si traggono subito i risultati seguenti :

*Sia  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  un sistema algebrico  $\infty^{\tau'}$  di spazi  $S_k$ , appartenente ad  $S_r$ , con la dimensione  $\tau' > 1$ , di indice  $\omega'$  (n. 6) e di genere sezionale  $\pi$  (n. 16): cosicchè, se  $k < r - 1$ , sono pure  $\omega'$  e  $\pi$  l'ordine e il genere della varietà luogo degli  $\infty^1$  spazi  $S_k$  di  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  incidenti a  $\tau' - 1$  generici spazi  $S_{r-k-1}$ .*

*Indichi poi  $\sigma$  il massimo numero, positivo o nullo, di complessi lineari di  $S_k$ , entro  $S_r$ , linearmente indipendenti e contenenti ciascuno tutti gli  $S_k$  del sistema  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$ .*

*Si ha allora che :*

A) *Se  $\omega' > 2\pi - 2$  vale la limitazione :*

$$\sigma + \tau' + \omega' - \pi \geq \binom{r+1}{k+1} .$$

B) *Quando  $\sigma > 0$  e  $\omega' > 2\pi - 2$  il sistema  $\Theta_{\tau'}^{\omega'}$  ha la proprietà che :*

$$\tau' + \omega' - \pi + 1$$

suoi spazi  $S_k$  generici sono sempre associati di specie (n. 1) :

$$\sigma + \tau' + \omega' - \pi + 1 = \binom{r+1}{k+1} ,$$

ed anzi in posizione di Schläfli (n. 5) se :

$$\sigma \geq \binom{r+1}{k+1} - (k+1)(r-k) .$$

C) Verificandosi la relazione :

$$2\pi - 2 < \omega' < \binom{r+1}{k+1} - \tau' + \pi ,$$

il sistema  $\Theta_i^{\omega'}$  risulta necessariamente contenuto in complessi lineari di spazi  $S_k$ , formanti un sistema lineare di dimensione non inferiore a :

$$\binom{r+1}{k+1} - \tau' - \omega' + \pi - 1 ;$$

inoltre  $\tau' + \omega' - \pi + 1$  spazi generatori  $S_k$  arbitrari di  $\Theta_i^{\omega'}$  sono sempre fra loro associati di 1<sup>a</sup> specie almeno (n. 1), ed anzi in posizione di Schläfli (n. 5) se :

$$\tau' + \omega' - \pi \leq (k+1)(r-k) .$$

D) Supposta soddisfatta la disequaglianza :

$$\sigma + \tau' + \omega' - \pi < \binom{r+1}{k+1} ,$$

deve pure esserlo l'altra :

$$\sigma + \tau' + \pi > \binom{r+1}{k+1} .$$

## § 6. Sulle varietà algebriche luoghi di $\infty^1$ spazi $S_k$

18. Una varietà  $W_{k+1}^n$ , di dimensione  $k+1$ , di ordine  $n$  e appartenente ad  $S_r$ , sia costituita da un sistema  $\infty^1$  di spazi  $S_k$  ( $0 < k < r-1$ ) : ed abbia, come luogo di  $S_k$ , il genere  $p$ .

Sulla grassmanniana  $V_r^\omega$  d'indici  $(r, k)$  la  $W_{k+1}^n$  si rappresenta con una curva  $C_n^p$  di ordine  $n$  e genere  $p$ .

Gli iperpiani dello spazio ambiente  $S_r$  della  $V_r^\omega$  segano sopra  $C_n^p$  una certa serie lineare  $g_n^\lambda$ , di dimensione  $\lambda$  e di ordine  $n$ , di gruppi di punti ; alla quale corrisponde su  $W_{k+1}^n$  la serie lineare  $g_n^\lambda$  di gruppi di  $S_k$  staccata dai complessi lineari di  $S_k$  entro  $S_r$  (n. 6, Oss. 2<sup>a</sup>).

In generale la dimensione  $\lambda$  della  $g_n^\lambda$  è uguale a  $\varrho$  (n. 1); ma può essere  $\lambda < \varrho$ : il che si verifica quando per la  $C_n^p$  passano  $\varrho - \lambda = \sigma$  iperpiani  $S_{\varrho-1}$  indipendenti, ossia quando la  $C_n^p$  appartiene ad un  $S_\lambda$  subordinato di  $S_\varrho$ . Allora la  $W_{k+1}^n$  è contenuta in complessi lineari di  $S_k$ , costituenti in  $S_r$  un sistema lineare  $\infty^{\sigma-1}$ .

Sulla  $C_n^p$ , e quindi anche sulla  $W_{k+1}^n$ , si può considerare la serie canonica  $g_{2p-2}^{p-1}$  (effettiva solo se  $p > 1$ ): cioè l'unica serie lineare avente la dimensione  $p - 1$  e l'ordine  $2p - 2$ .

Se per un gruppo generico  $G_n$  della serie  $g_n^\lambda$  passano  $j (\geq 0)$  gruppi canonici indipendenti, ma non  $j + 1$ , per il teorema di *Riemann-Roch* è  $n - p + j$  la dimensione della serie completa  $|G_n|$ ; e quindi si può scrivere:

$$\lambda \leq n - p + j,$$

ossia:

$$\lambda = n - p + j - \mu + 1$$

con  $\mu \geq 1$ . Posto allora:

$$v = n - p + j + 2,$$

risulta:

$$\lambda = v - \mu - 1,$$

e ne deriva (n. 2) che  $v$  spazi  $S_k$  generici di  $W_{k+1}^n$  sono associati di specie  $\mu$  (n. 1) quando  $\lambda < \varrho$ : ciò che anzi si verifica per  $v$   $S_k$  generatori *arbitrari* di  $W_{k+1}^n$  se  $j + 2 > p$  (altrimenti esisterebbero iperpiani di  $S_\lambda$  incontranti  $C_n^p$  in più di  $n$  punti).

Si può aggiungere che nell'ipotesi  $\lambda = n - p + j$  la curva  $C_n^p$  riesce normale, essendo completa la serie delle sue sezioni iperpiane.

Notando poi che è sicuramente  $j = 0$  se  $n > 2p - 2$  oppure  $\lambda > p - 1$ , mentre è  $j > 0$  (e quindi  $\lambda \leq p - 1$ ) se  $\lambda > n - p$ , si perviene alle conclusioni seguenti:

*Sia  $W_{k+1}^n$  una varietà di dimensione  $k + 1$  e d'ordine  $n$ , appartenente ad  $S_r$ , luogo di  $\infty^1$  spazi  $S_k$  (con  $0 < k < r - 1$ ) e, come tale, di genere  $p$ .*

*Si chiami  $\sigma$  il massimo numero, positivo o nullo, di complessi lineari di  $S_k$ , entro  $S_r$ , linearmente indipendenti e passanti ciascuno per la  $W_{k+1}^n$ .*

*Sull'ente ( $\infty^1$  e di genere  $p$ ) costituito dagli  $S_k$  generatori di  $W_{k+1}^n$  si consideri la serie canonica  $g_{2p-2}^{p-1}$ , e si supponga che per gli  $n$  spazi  $S_k$  di  $W_{k+1}^n$  giacenti in un generico complesso lineare di  $S_k$  entro  $S_r$  passino  $j (\geq 0)$  gruppi indipendenti della  $g_{2p-2}^{p-1}$ : ma non  $j + 1$ .*

Allora :

$\alpha)$  Vale la limitazione :

$$n - p + j + \sigma + 1 \geq \binom{r+1}{k+1} ,$$

ove l'eguaglianza caratterizza il caso in cui la serie lineare (d'ordine  $n$ ) di gruppi di  $S_k$  generatori staccata (n. 6, Oss. 2<sup>a</sup>) sulla varietà  $W_{k+1}^n$  dai complessi lineari di  $S_k$  entro  $S_r$ , è completa con l'indice di specialità  $j^{18}$ .

$\beta)$  Quando  $\sigma > 0$  si ha che :

$$n - p + j + 2$$

spazi  $S_k$  generici della varietà  $W_{k+1}^n$ , o addirittura arbitrari se  $p < j + 2$  (in particolare se la  $W_{k+1}^n$  è razionale o ellittica), sono sempre associati di specie (n. 1) :

$$n - p + j + \sigma + 2 - \binom{r+1}{k+1} ,$$

ed anzi in posizione di Schläfli (n. 5) se :

$$\sigma \geq \binom{r+1}{k+1} - (k+1)(r-k) .$$

$\gamma)$  Verificandosi la disequaglianza :

$$n - p + j + 1 < \binom{r+1}{k+1} ,$$

la varietà  $W_{k+1}^n$  risulta necessariamente contenuta in complessi lineari di spazi  $S_k$ , formanti un sistema lineare di dimensione non inferiore a :

$$\binom{r+1}{k+1} - n + p - j - 2 ;$$

inoltre  $n - p + j + 2$  spazi generatori  $S_k$  arbitrari di  $W_{k+1}^n$  sono sempre fra loro associati di 1<sup>a</sup> specie almeno (n. 1), ed anzi in posizione di Schläfli (n. 5) se :

$$n - p + j + 1 \leq (k+1)(r-k) .$$

---

<sup>18)</sup> Tale circostanza equivale all'altra che l'immagine di  $W_{k+1}^n$  sulla grassmanniana d'indici  $(r, k)$  è una curva normale  $C_n^p$  di uno spazio ad  $n - p + j$  dimensioni.

δ) *Supposta soddisfatta la relazione :*

$$n - p + \sigma + 1 < \binom{r+1}{k+1} ,$$

*deve pure esserlo l'altra :*

$$p + \sigma \geq \binom{r+1}{k+1} .$$

ε) *Se  $n > 2p - 2$  oppure :*

$$p + \sigma < \binom{r+1}{k+1} ,$$

*nelle proposizioni α), β), γ) è da porre  $j = 0$ .*

19. Se  $n > 2p - 2$ , la sezione della varietà  $W_{k+1}^n$  (n. 18) con un generico spazio  $S_{r-k}$  è una curva, d'ordine  $n$  e di genere  $p$ , avente per spazio normale un  $S_{n-p}$ . Pertanto è  $r - k \leq n - p$ ; ossia lo spazio più elevato a cui può appartenere la  $W_{k+1}^n$ , nell'ipotesi  $n > 2p - 2$ , ha la dimensione  $n - p + k$ .

Si supponga appunto  $r = n - p + k$ , oltre che  $n > 2p - 2$ .

Il carattere  $j$  (n. 18) della varietà  $W_{k+1}^n$  è allora nullo (n. 18, ε); e inoltre la curva  $C_n^p$  immagine della  $W_{k+1}^n$  sulla grassmanniana  $V_\tau^\omega$  è normale, ossia appartiene ad un  $S_{n-p}$ . Infatti se  $C_n^p$  esistesse in un  $S_{n-p-1}^*$ , cioè in un  $S_{r-k-1}^*$ , ogni iperpiano di  $S_\tau$  per  $r - k$  punti generici di  $C_n^p$  conterrebbe la  $C_n^p$  stessa; e quindi ogni complesso lineare di  $S_k$ , entro  $S_r$ , passante per  $r - k$  generici spazi generatori di  $W_{k+1}^n$  dovrebbe passare per tutti: donde seguirebbe in particolare (supponendo speciale un tale complesso) che lo spazio  $S_{r-k-1}$  congiungente  $r - k$  punti generici della varietà  $W_{k+1}^n$  la incontrerebbe in infiniti altri: mentre non può incontrarla che in  $p$  ulteriori punti.

Ne risulta (n. 18, α) che  $W_{k+1}^n$  appartiene alla base di un sistema lineare  $\infty^{\sigma-1}$  di complessi lineari di  $S_k$ , con  $\sigma$  definito dall'eguaglianza:

$$n - p + \sigma + 1 = \binom{n - p + k + 1}{k + 1} ;$$

e deducendosi:

$$\sigma = \binom{r+1}{k+1} - r + k - 1 > \binom{r+1}{k+1} - (k+1)(r-k) ,$$

si può concludere (n. 18, β, ε):

Ogni varietà irriducibile luogo di  $\infty^1$  spazi  $S_k$ , di genere  $p$ , di ordine  $n > 2p - 2$  e appartenente ad uno spazio  $S_{n-p+k}$ , ha la proprietà che  $n - p + 2$  suoi  $S_k$  generatori arbitrari sono sempre in posizione di Schläfli (n. 5).

Se  $p > 0$  vale anzi per la varietà  $W_{k+1}^n$  in discorso una proprietà ancora più particolare: già nota nel caso  $k = 1$ . Infatti, un teorema di C. Segre assicura che la rigata, di cui trattasi quando  $k = 1$ , è un cono<sup>19</sup>). Segando allora la  $W_{k+1}^n$  con un generico  $S_{n-p+1}^{(1)}$  si ottiene una rigata di genere  $p > 0$  e appartenente ad uno spazio di dimensione  $n - p + 1$ , cioè, in base al teorema suddetto, una superficie conica: per il vertice  $S_0^{(1)}$  della quale passano quindi tutti gli  $S_k$  generatori di  $W_{k+1}^n$ .

Tagliando ora la  $W_{k+1}^n$  con un  $S_{n-p+1}^{(2)}$  non contenente il punto  $S_0^{(1)}$  si ha un secondo cono, di vertice  $S_0^{(2)}$ : e tutti gli  $S_k$  di  $W_{k+1}^n$  passano per la retta  $S_0^{(1)} S_0^{(2)}$ .

Si intersechi di nuovo la  $W_{k+1}^n$  con un  $S_{n-p+1}^{(3)}$  sghembo rispetto a tale retta: il vertice  $S_0^{(3)}$  del cono così risultante, e perciò anche il piano che lo congiunge con  $S_0^{(1)}$  e  $S_0^{(2)}$ , giace in tutti gli  $S_k$  di  $W_{k+1}^n$ . Così proseguendo si perviene alla conclusione che gli  $S_k$  generatori di  $W_{k+1}^n$  passano tutti per un medesimo  $S_{k-1}$ . Dunque:

*Una varietà irriducibile luogo di  $\infty^1$  spazi  $S_k$ , di genere  $p > 0$  e di ordine  $n > 2p - 2$ , la quale appartenga ad uno spazio  $S_{n-p+k}$ , è sempre un  $S_{k-1}$ -cono.*

Se invece  $p = 0$ , il teorema prima dimostrato si riferisce alle varietà razionali normali  $S_k$ - $V_{k+1}^{r-k}$  luoghi di  $\infty^1 S_k$  dello spazio  $S_r$ ; e può anche enunciarsi:

*Sopra una varietà razionale normale dello spazio  $S_r$ , costituita da  $\infty^1$  spazi  $S_k$  (e quindi di ordine  $r - k$ ),  $r - k + 2$  spazi generatori arbitrari sono sempre in posizione di Schläfli: così che ogni  $S_{r-k-1}$  incidente ad  $r - k + 1$  qualunque di essi incontra pure il rimanente.*

**20.** Vale la pena, terminando, di applicare esplicitamente le proposizioni generali che precedono al caso particolare ( $k = 1$ ) delle superficie rigate algebriche<sup>20</sup>). Si ottengono così, fra altri, i seguenti risultati.

<sup>19</sup>) C. Segre, Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques (Math. Annalen, 34, 1889), n. 14.

<sup>20</sup>) In una nota al n. 3 del lavoro dianzi citato, C. Segre avverte che la considerazione delle rigate di  $S_d$  come curve dello spazio di dimensione  $\frac{1}{2}d(d+1) - 1$  può dare dei risultati utili e interessanti, già per  $d = 3$ .

# I

Se una rigata di genere  $p$  e ordine  $n > 2p - 2$ , appartenente allo spazio  $S_r$ , non è contenuta in alcun complesso lineare di rette, si ha necessariamente :

$$n - p \geq \frac{1}{2}(r - 1)(r + 2) .$$

# II

Quando per una rigata di genere  $p$  e ordine  $n > 2p - 2$ , appartenente ad  $S_r$ , passano  $\varepsilon + 1$  (con  $\varepsilon \geq 0$ ) complessi lineari di rette linearmente indipendenti, deve essere :

$$n - p > \frac{1}{2}(r - 2)(r + 3) - \varepsilon ;$$

e  $n - p + 2$  rette generiche della rigata sono sempre associate di specie (n. 1) :

$$n - p + \varepsilon - \frac{1}{2}(r - 2)(r + 3) ,$$

anzi in posizione di Schläfli (n. 5) se  $\varepsilon \geq \binom{r - 1}{2}$  .

# III

Se per una rigata di ordine  $n$  e genere  $p$ , appartenente ad  $S_r$ , si verifica che :

$$p - 1 \leq n - p < \frac{1}{2}(r - 1)(r + 2) ,$$

essa risulta contenuta in almeno :

$$\frac{1}{2}(r - 1)(r + 2) - n + p$$

complessi lineari di rette linearmente indipendenti ; e  $n - p + 2$  sue generatrici arbitrarie sono sempre fra loro associate (di 1<sup>a</sup> specie almeno : n. 1), anzi in posizione di Schläfli (n. 5) quando  $n - p < 2r - 2$  .

# IV

Se una rigata di ordine  $n$  e genere  $p$ , appartenente ad  $S_r$ , non sta in nessun complesso lineare di rette, ed è

$$n - p < \frac{1}{2}(r - 1)(r + 2) ,$$

deve pure essere :

$$p \geq \binom{r + 1}{2} .$$

## V

*Se una rigata di ordine  $n$  e genere  $p$ , appartenente ad  $S_r$ , sta in  $\varepsilon + 1$  (con  $\varepsilon \geq 0$ ) complessi lineari di rette linearmente indipendenti, ed è:*

$$n - p \leq \frac{1}{2}(r - 2)(r + 3) - \varepsilon ,$$

*deve pure essere :*

$$p \geq \frac{1}{2}(r - 1)(r + 2) - \varepsilon .$$

## VI

*Nello spazio  $S_r$  ad  $r$  dimensioni ogni rigata razionale normale (ossia di ordine  $r - 1$ ) è base di un sistema lineare  $\infty^{\binom{r}{2} - 1}$  di complessi lineari di rette.*

## VII

*Ogni rigata razionale normale di  $S_r$  ha le sue generatrici ad  $r + 1$  ad  $r + 1$  associate secondo Schläfli: così che gli  $S_{r-2}$  incontranti  $r$  qualunque fra  $r + 1$  generatrici arbitrarie della rigata debbono ciascuno incontrare anche la rimanente.*

(Reçu le premier septembre 1946.)