

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1946-1947)

Artikel: Théorème de l'hyperespace analogue au théorème de Pascal.
Autor: Kollros, Louis
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-17349>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Théorème de l'hyperespace analogue au théorème de Pascal

Par LOUIS KOLLROS, Zurich

Soit E_n un espace linéaire de dimension n ; $(n + 1)$ droites de E_n sont *associées* si tout espace linéaire E_{n-2} qui en rencontre n coupe aussi la dernière.

De même, $(n + 1)$ espaces E_{n-2} sont associés si toute droite qui coupe n des E_{n-2} est aussi incidente au dernier.

Pour $n = 2$, trois points sont associés s'ils sont alignés ; trois droites sont associées si elles sont concourantes.

Pour $n = 3$, quatre droites sont associées si elles sont des génératrices du même système d'une quadrique réglée.

Le théorème de Pascal peut s'énoncer ainsi :

Une conique coupe les trois côtés d'un triangle ABC en six points : A_1 et B_2 sur le côté AB , B_1 et C_2 sur BC , C_1 et A_2 sur CA ; les trois points d'intersection des paires de droites A_1A_2 et BC , B_1B_2 et CA , C_1C_2 et AB sont alignés.

Dans l'espace E_n le théorème analogue est le suivant :

Théorème I. Une hyperquadrique rencontre les arêtes d'un simplexe de E_n en $n(n + 1)$ points ; ils sont n à n sur $(n + 1)$ espaces linéaires E_{n-1} dont chacun contient n points situés sur les n arêtes issues d'un même sommet. Ces $(n + 1)$ espaces E_{n-1} coupent respectivement les faces opposées du simplexe suivant $(n + 1)$ espaces E_{n-2} associés.

Pour le démontrer, prenons le simplexe donné comme système de référence des coordonnées projectives ; ses faces ont alors les équations $x_i = 0$ où i prend successivement les valeurs $1, 2, 3, \dots, (n + 1)$.

On peut choisir le point unité du système de coordonnées projectives de telle sorte que la quadrique donnée ait l'équation :

$$x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = (a_{ik} + a_{ik}^{-1}) x_i x_k$$

où le second membre est la somme de $\frac{n(n + 1)}{2}$ termes en $x_i x_k$, i et k variant de 1 à $(n + 1)$, mais $i \neq k$ et $a_{ik} = a_{ki}$.

Si A_1, A_2, \dots, A_{n+1} sont les sommets du simplexe, l'arête $A_1 A_2$ coupe la quadrique aux deux points correspondant aux racines de l'équation

$$x_1^2 - (a_{12} + a_{12}^{-1}) x_1 x_2 + x_2^2 = 0 ;$$

nous associerons l'une $\frac{x_1}{x_2} = a_{12}$ au sommet A_1 et l'autre $\frac{x_2}{x_1} = a_{12}$ au sommet A_2 .

L'hyperplan E_{n-1} contenant les n points situés respectivement sur les n arêtes issues du sommet A_1 aura l'équation :

$$x_1 = a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1, n+1} x_{n+1}$$

que nous écrivons en abrégé :

$$x_1 = a_{1k} x_k$$

la somme devant être faite sur l'indice $k \neq 1$ variant de 2 à $n + 1$.

On aura des équations analogues pour les hyperplans correspondant aux sommets A_2, \dots, A_{n+1} ; on peut réunir les équations de ces $(n + 1)$ espaces E_{n-1} dans la formule :

$$x_i = a_{ik} x_k \quad \text{où } k \neq i ;$$

i prend toutes les valeurs de 1 à $n + 1$ (sauf k).

En coupant chacun de ces espaces E_{n-1} par la face $x_i = 0$ opposée au sommet A_i on aura les $(n + 1)$ espaces E_{n-2} qui, selon notre théorème I, doivent être associés.

En effet, une droite de E_n est déterminée par $(n - 1)$ équations linéaires que nous écrivons en abrégé :

$$b_{rs} x_s = 0 \quad \text{où } b_{rs} \neq b_{sr} ;$$

r varie de 1 à $(n - 1)$ et s varie de 1 à $(n + 1)$; la somme est faite sur s .

Cette droite coupe le premier espace E_{n-2} si le déterminant

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1, n+1} \\ b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1, 2} & b_{n-1, 3} & \dots & b_{n-1, n+1} \end{vmatrix} = 0 .$$

Si nous désignons par $B_{ik} = B_{ki}$ le déterminant que l'on obtient en supprimant les deux colonnes d'indices i et k dans le tableau de $(n - 1)$ lignes et $(n + 1)$ colonnes des coefficients b_{rs} , l'équation précédente peut s'écrire :

$$D_1 = a_{12} B_{12} - a_{13} B_{13} + \dots + (-1)^n a_{1, n+1} B_{1, n+1} = 0$$

ou, en notation abrégée :

$$D_1 = (a_{1k} B_{1k}) = 0, \quad \text{où } k \neq 1,$$

la parenthèse désignant une somme dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la droite considérée coupe les $(n + 1)$ espaces E_{n-2} sont comprises dans la formule : $D_i = (a_{ik} B_{ik}) = 0$ où $k \neq i$ et i varie de 1 à $(n + 1)$.

On vérifie alors immédiatement que la somme alternée :

$$D_1 - D_2 + D_3 - \dots + (-1)^n D_{n+1} \equiv 0$$

est identiquement nulle ; chacun des termes $a_{ik} B_{ik}$ y figure une fois positivement et une fois négativement.

Donc toute droite qui coupe n des $(n + 1)$ espaces E_{n-2} est aussi incidente au dernier.

Pour $n = 2$, c'est le théorème de Pascal relatif aux coniques.

Pour $n = 3$, c'est le théorème que Chasles a énoncé sans démonstration (Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, p. 400) :

„Une quadrique rencontre les 6 arêtes d'un tétraèdre en 12 points ; ils sont 3 à 3 sur 4 plans dont chacun contient 3 points situés sur les arêtes d'un même sommet. Ces 4 plans coupent respectivement les faces opposées suivant 4 droites qui sont les génératrices du même système d'une quadrique réglée.“

La démonstration géométrique de ce théorème est simple :

Soit $ABCD$ le tétraèdre ; ses arêtes coupent la quadrique aux 12 points $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$, $D_1 D_2 D_3$. Dans le plan ABC , les trois points $(A_1 A_2 - BC)$, $(B_1 B_3 - CA)$, $(C_2 C_3 - AB)$ sont sur la droite de Pascal d' de la conique commune à la quadrique donnée et au plan ABC ; ils sont aussi respectivement sur les droites :

$$a = (A_1 A_2 A_3 - BCD), \quad b = (B_1 B_2 B_3 - CDA), \quad c = (C_1 C_2 C_3 - DAB).$$

Comme d' et $d = (D_1 D_2 D_3 - A B C)$ sont dans le même plan $A B C$, on voit que d' coupe les quatre droites a, b, c, d ; il en est même des trois droites de Pascal a', b', c' situées respectivement dans les trois autres faces BCD, CDA, DAB du tétraèdre.

Donc (a, b, c, d) et (a', b', c', d') sont deux groupes de droites associées.

Théorème II (dual de I). *Si l'on mène par les espaces frontières E_{n-2} d'un simplexe de E_n les $n(n+1)$ hyperplans E_{n-1} tangents à une hyperquadrique, ils se coupent n à n en $(n+1)$ points dont chacun est l'intersection de n hyperplans tangents menés par les E_{n-2} frontières d'une même face du simplexe. Les $(n+1)$ droites joignant ces $(n+1)$ points respectivement aux sommets opposés à ces faces sont associées.*

Pour $n = 2$, c'est le théorème de Brianchon.

Pour $n = 3$, c'est le théorème énoncé par Chasles (loc. cit.) et démontré par Weddle (Demonstration of Brianchon's Theorem, and of an analogous property in space, Camb. Dubl. Journ., t. 7, p. 10—13):

„Si l'on mène par les arêtes d'un tétraèdre 12 plans tangents à une quadrique, ils se coupent 3 à 3 en 4 points dont chacun est l'intersection de 3 plans menés par les arêtes d'une même face; les 4 droites joignant ces 4 points respectivement aux sommets opposés à ces faces sont 4 génératrices du même système d'une quadrique réglée.“

Si, pour n quelconque, l'hyperquadrique est *inscrite* au simplexe, les $(n+1)$ droites joignant chaque sommet au point de contact de la face opposée sont associées.

Si elle est *circonscrite* au simplexe, ses hyperplans tangents aux sommets du simplexe coupent les faces opposées suivant $(n+1)$ espaces linéaires de dimension $(n-2)$ qui sont associés.

(Reçu le 26 août 1946.)