

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 19 (1946-1947)

**Artikel:** Zum Schwarzschen Spiegelungsprinzip.  
**Autor:** Carathéodory, C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17347>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zum Schwarzschen Spiegelungsprinzip

(Die Randwerte von meromorphen Funktionen)

Von C. CARATHÉODORY, München

1. Die Entdeckung der Lebesgueschen Integrationsmethoden war der Anlaß, die Theorie der analytischen Funktionen an vielen Stellen in bemerkenswerter und unerwarteter Weise zu bereichern. Aber es gibt noch heute, nach fast fünfzig Jahren, Fragen ganz elementaren Charakters, für welche die Lebesgueschen Resultate noch nicht ausgebeutet worden sind. So kann man das Spiegelungsprinzip von *H. A. Schwarz* auf einen Satz zurückführen, der von ebensolchem allgemeinem Interesse ist wie dieses.

Nach dem Resultat von Schwarz ist eine im Kreise  $|z| < 1$  analytische Funktion, die auf einem Bogen  $AB$  der Kreisperipherie stetig und reell ist, regulär in jedem Punkte von  $AB$ . Obwohl nun der Schwarzsche Beweis in seiner ursprünglichen Fassung ohne die Forderung der Stetigkeit von  $f(z)$  auf  $AB$  nicht denkbar ist, ist es nicht schwer, eine Variante dieses Beweises zu konstruieren, bei welcher die Stetigkeit überhaupt keine Rolle spielt.

Zu diesem Zweck braucht man nur den Begriff der *Randwerte* (oder wie manche Autoren sagen, der Häufungswerte) einer Funktion systematisch zu benutzen.

2. Wir gehen von folgender Definition aus:

**Definition.** Ist  $f(z)$  eine beliebige reelle oder komplexe Funktion, die in einem Gebiete  $G$  definiert ist, und bezeichnet man mit  $\zeta$  irgendeinen Randpunkt von  $G$ , so wollen wir sagen, daß eine Zahl  $\alpha$  ein Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta$  ist, wenn es mindestens eine Folge von Punkten  $z_\nu$  in  $G$  gibt, für welche die Gleichungen

$$\lim_{\nu=\infty} z_\nu = \zeta \qquad \lim_{\nu=\infty} f(z_\nu) = \alpha \qquad (2.1)$$

gleichzeitig bestehen.

Mit Hilfe dieser Definition gilt nun der

**Satz 1.** Im Inneren des Einheitskreises  $|z| < 1$  sei die analytische Funktion  $f(z)$  meromorph. Auf einem Bogen  $AB$  der Kreisperipherie seien alle Randwerte von  $f(z)$  reell oder  $\infty$ . Dann ist die Funktion  $f(z)$  in jedem Punkte  $\zeta$  von  $AB$  regulär und reell oder sie besitzt einen Pol in  $\zeta$ .

## Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z) - i}{f(z) + i} \quad (2.1)$$

ist in jedem Punkte des Kreises  $|z| < 1$  meromorph. In jedem Punkte  $\zeta$  von  $AB$  sind alle Randwerte von  $|g(z)|$  identisch gleich Eins, weil durch die Abbildung

$$\omega = \frac{w - i}{w + i}$$

die reelle Achse der  $w$ -Ebene in den Kreis  $|\omega| = 1$  transformiert wird. Ist dann  $\zeta$  ein innerer Punkt des Bogens  $AB$ , so kann man die natürliche Zahl  $n$  so groß wählen, daß erstens die eine Seite des Kreisbogenzweiecks  $CD$ , welches die gemeinsamen inneren Punkte der beiden Kreise

$$|z| < 1, \quad |z - \zeta| < \frac{1}{n} \quad (2.2)$$

enthält, aus einem Teilbogen  $CD$  von  $AB$  besteht und daß zweitens die Relation

$$\frac{1}{2} < |g(z)| < 2 \quad (2.3)$$

überall in diesem Kreisbogenzweieck verifiziert ist. Im entgegengesetzten Fall könnte man jeder natürlichen Zahl  $n$  einen Punkt  $z_n$  des Einheitskreises zuordnen, für welche  $|z_n - \zeta| < \frac{1}{n}$  ist und eine der Relationen  $|g(z_n)| \leq \frac{1}{2}$  oder  $|g(z_n)| \geq 2$  erfüllt ist. Dann müßte aber  $|g(z)|$  entgegen der Voraussetzung einen Randwert im Punkte  $\zeta$  haben, der von 1 verschieden ist.

Wir bilden jetzt durch die Funktion

$$z = \psi(u) \quad (2.4)$$

das Kreisbogenzweieck  $CD$  auf den Kreis  $|u| < 1$  ab, so daß die Seite  $CD$  des Zweiecks dem Halbkreise  $C_1E_1D_1$  entspricht, der in der Halbebene  $\Re u > 0$  liegt, und setzen

$$h(u) = g(\psi(u)) \quad (2.5)$$

Nach unserer Konstruktion ist nun  $\frac{1}{2} < |h(u)| < 2$ ; irgendein Zweig des Logarithmus  $l h(u)$  ist somit regulär in  $|u| < 1$  und besitzt dort einen beschränkten reellen Teil. Wir führen die Bezeichnung ein

$$\lambda(r, \vartheta) = \Re(l h(r e^{i\vartheta})) \quad (0 < r < 1) \quad (2.6)$$

Ist dann  $u$  ein beliebiger Punkt des Kreises  $|u| < 1$  und wählt man  $r > |u|$  aber  $< 1$ , so hat man nach der Formel des Poissonschen Integrals

$$lh(u) = \frac{lh(0) - \overline{lh(0)}}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(r, \vartheta) \frac{re^{i\vartheta} + u}{re^{i\vartheta} - u} d\vartheta. \quad (2.7)$$

Da nun für  $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$  und für  $\frac{3\pi}{2} < \vartheta < 2\pi$  alle Randwerte von  $|h(u)|$  gleich Eins und folglich  $\lim_{r=1} \lambda(r, \vartheta) = 0$  ist, hat man, indem man in (2.7) die Größe  $r$  gegen Eins konvergieren läßt und die Bezeichnung

$$\lambda(\vartheta) = \lim_{r=1} \lambda(r, \vartheta)$$

einführt,

$$lh(u) = \frac{lh(0) - \overline{lh(0)}}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \lambda(\vartheta) \frac{e^{i\vartheta} + u}{e^{i\vartheta} - u} d\vartheta. \quad (2.8)$$

Aus dieser Darstellung von  $lh(u)$  folgt nun unmittelbar, daß diese Funktion auf dem Halbkreis  $C_1 E_1 D_1$  regulär ist; dasselbe gilt von  $h(u)$  und es muß also auch  $g(z)$  auf dem Kreisbogen  $CD$  analytisch sein, ein Resultat, das auch für  $f(z)$  gilt. Hiermit ist der angekündigte Satz bewiesen<sup>1)</sup>.

3. Bei der Auswertung des Poissonschen Integrals (2.7) haben wir die Voraussetzungen des Satzes 1 nicht voll ausgenutzt. Das Schlußresultat (2.8) hätten wir schon erzielen können, wenn nicht sämtliche Randwerte von  $f(z)$ , sondern lediglich diejenigen, die man bei *radialer Annäherung* erhält, reell sind. Diese letztere Voraussetzung reicht aber nicht mehr aus, um schließen zu können, daß  $f(z)$  keine singulären Stellen auf dem Rande besitzt. Zum Beispiel ist

$$f(z) = e^{-\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2}$$

wesentlich singulär für  $z = 1$ , aber die Grenzwerte  $\lim_{r=1} f(re^{i\vartheta})$  existie-

---

<sup>1)</sup> Man beachte, daß wir bisher von der Lebesgueschen Theorie keinen Gebrauch gemacht haben, und daß unsere obigen Schlüsse von derselben Art sind, wie diejenigen, die auch Schwarz zur Hand hatte.



ren für jeden Wert von  $\vartheta$  und sind reell (und sogar endlich). Wenn man aber die Möglichkeit des Auftretens von Singularitäten zuläßt, so zeigt sich, daß man schon bei überraschend geringen Annahmen über das Verhalten von  $f(z)$  in der Nähe des Randes eine befriedigende Antwort auf alle Fragen erhält, die zu stellen man geneigt sein könnte. Wir wollen mit folgenden Voraussetzungen arbeiten:

**Annahme:** Die analytische Funktion  $f(z)$  soll meromorph im Inneren des Kreises  $|z| < 1$  sein. Jedem Punkte  $\zeta$  eines Kreisbogens  $AB$  der Kreis-peripherie  $|z| = 1$ , der nicht auf einer festen Punktmenge  $e_0$  vom linearen Maße Null liegt, soll mindestens eine gegen  $\zeta$  konvergierende Folge von Punkten  $z_\nu$  des Einheitskreises zugeordnet werden können, die zwischen zwei in  $\zeta$  sich begegnenden Sehnen des Einheitskreises liegen, und für welche  $\lim f(z_\nu)$  existiert und reell oder gleich  $\infty$  ist.

Wie schwach diese Voraussetzungen sind, zeigt schon der Umstand, daß die Modulfunktion  $\nu(z)$ , die man durch die konforme Abbildung der oberen  $w$ -Halbebene in üblicher Normierung auf ein in den Kreis  $|z| = 1$  eingeschriebenes Moduldreieck erhält, den obigen Bedingungen gerecht wird. Denn auf jedem Radius des Kreises  $|z| < 1$ , der in einem Punkte  $\zeta$  endet, konvergiert  $\nu(z)$  gegen 0, 1 oder  $\infty$ , wenn dieser Radius nur endlich viele Dreiecke der Modulfigur durchsetzt, und auf einem solchen Radius existieren unendlich viele Punkte, in denen  $\nu(z)$  reell ist, wenn er durch unendlich viele solche Dreiecke hindurchgeht.

Da nun der Kreis  $|z| = 1$  eine natürliche Grenze für die Funktion  $\nu(z)$  ist, zeigt dieses Beispiel, daß sogar alle Punkte des Bogens  $AB$  bei den von uns gemachten Voraussetzungen singuläre Punkte von  $f(z)$  sein können. Es wird sich aber herausstellen, daß diese singulären Punkte von ganz besonderer Art sind. Das Resultat, das wir erhalten werden, ist nämlich mit dem Satze von *Casorati-Weierstraß* über isolierte wesentlich singuläre Stellen aufs äußerste verwandt. Dieser letztere Satz kann folgendermaßen ausgesprochen werden: Ist eine analytische Funktion  $f(z)$  in einem punktierten Kreise  $0 < |z - \zeta_0| < \varrho$  eindeutig und meromorph, so sind nur zwei verschiedene Möglichkeiten vorhanden. Entweder überdeckt die Menge  $W$  aller Randwerte von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  die ganze Zahl-ebene mit Einschluß des Punktes  $\infty$ , oder  $f(z)$  ist regulär (oder hat einen Pol) im Punkte  $\zeta_0$ . Eine Aussage ganz ähnlichen Charakters bildet aber der Inhalt von

**Satz 2.** Unter den angegebenen Voraussetzungen für  $f(z)$  sind in jedem Punkte  $\zeta_0$  des Kreisbogens  $AB$  nur folgende drei Möglichkeiten vorhanden:

- a) die Gesamtheit  $W$  aller Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  überdeckt die ganze Zahlenebene mit Einschluß des Punktes  $\infty$ . Wir wollen dann sagen, daß  $\zeta_0$  eine wesentlich singuläre Stelle „erster Art“ ist ;
- b) die Punktmenge  $W$  überdeckt eine der beiden durch die reelle Achse begrenzten Halbebenen mit Einschluß der reellen Achse und enthält keinen inneren Punkt der anderen Halbebene. Der Punkt  $\zeta_0$  soll dann eine wesentlich singuläre Stelle „zweiter Art“ genannt werden.
- c) Eine der Funktionen  $f(z)$  oder  $\frac{1}{f(z)}$  ist regulär im Punkte  $\zeta_0$  und der Spiegelungssatz besteht in einer Umgebung von  $\zeta_0$ .

4. Besteht der vorhergehende Satz, und ist  $\alpha$  eine endliche Zahl mit nicht verschwindendem Imaginärteil, die kein Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  ist, so muß auf der Kreisperipherie  $|z| = 1$  eine Umgebung von  $\zeta_0$  existieren, in welcher  $\alpha$  nicht als Randwert angenommen werden kann. Dann gibt es aber in dieser Umgebung, deren Punkte sicher keine wesentlich singuläre Stellen erster Art sind, keinen einzigen Randwert von  $f(z)$ , der in derselben Halbebene wie  $\alpha$  liegt. Hat man umgekehrt die Richtigkeit dieser letzteren Aussage festgestellt, so folgen daraus alle Behauptungen des Satzes 2. In der Tat ist in diesem Falle der Punkt  $\zeta_0$  eine wesentlich singuläre Stelle zweiter Art, außer wenn eine Zahl  $\beta$  im Inneren der Halbebene liegt, die  $\alpha$  nicht enthält, so daß  $\beta$  ebenso wie  $\alpha$  kein Randwert von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  ist, oder wenn das gleiche von einer reellen Zahl  $\gamma$  oder von der Zahl  $\infty$  gilt.

Sind aber zwei Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ , die durch die reelle Achse getrennt werden, keine Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$ , so müssen nach unserer Annahme für alle Punkte  $\zeta$  des Randes in einer gewissen Umgebung von  $\zeta_0$  alle möglichen Randwerte reell oder gleich  $\infty$  sein, und nach dem Satze 1 muß dann  $f(z)$  in  $\zeta_0$  regulär sein oder einen Pol besitzen. Ist endlich eine reelle Zahl  $\gamma$  (oder die Zahl  $\infty$ ) kein Randwert von  $f(z)$  in  $\zeta_0$ , so gibt es eine Umgebung des Punktes  $\gamma$  (bzw. von  $\infty$ ), welche aus lauter Punkten besteht, die ebenfalls keine Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  sind ; unter diesen sind dann auch zwei Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  vorhanden, die durch die reelle Achse getrennt werden, so daß der soeben gemachte Schluß wiederum anwendbar ist.

5. Alles kommt also darauf hinaus, den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz 3.** Ist  $f(z)$  eine analytische Funktion, für welche die Voraussetzungen des § 3 gelten, und ist  $\alpha$  eine Zahl mit nicht verschwindendem Imaginärteil, die kein Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  des Bogens  $AB$  darstellt, so gibt

es auf der Kreisperipherie  $|z| = 1$  eine Umgebung von  $\zeta_0$ , in welcher sämtliche Randwerte von  $f(z)$ , falls sie nicht reell sind, in der durch die reelle Achse berandeten Halbebene liegen, die  $\alpha$  nicht enthält.

Erstens bemerken wir, daß die Funktion

$$\frac{1}{f(z) - \alpha} \quad (5.1)$$

im Punkte  $\zeta_0$  den Randwert  $\infty$  nicht besitzt. Dann beweist man, ebenso wie in § 2, daß ein Kreisbogenzweieck  $CD$  existieren muß, in dessen Innerem die Funktion (5.1) beschränkt ist. Wir bilden dieses Kreisbogenzweieck durch die Funktion (2.4) auf den Kreis  $|u| < 1$  ab, so daß  $CD$  in  $C_1E_1D_1$  übergeht. Ferner betrachten wir die Abbildung

$$\omega = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{w - \alpha} + 1 = \frac{w - \bar{\alpha}}{w - \alpha},$$

durch welche die reelle Achse der  $w$ -Ebene in den Kreis  $|\omega| = 1$  übergeführt wird und setzen

$$g(z) = \frac{f(z) - \bar{\alpha}}{f(z) - \alpha}, \quad h(u) = g(\psi(u)). \quad (5.2)$$

Durch die Abbildung  $z = \psi(u)$  wird der in  $CD$  liegende Teil der Nullmenge  $e_0$ , die in den Annahmen über  $f(z)$  eine Rolle spielt, in eine Nullmenge  $e'$  des Bogens  $C_1E_1D_1$  transformiert. In allen übrigen Punkten dieses Bogens existiert nach Voraussetzung eine Folge von Punkten  $u_\nu$ , die in einem Winkel liegen und für welche  $\lim_{\nu=\infty} h(u_\nu)$  existiert und den absoluten Betrag Eins hat.

Nun ist aber  $h(u)$  nach unserer Konstruktion eine im Kreise  $|u| < 1$  beschränkte Funktion, und es existiert eine Zahl  $M$ , für welche

$$|h(u)| < M \quad (|u| < 1) \quad (5.3)$$

ist. Für die Funktion  $h(u)$  gilt also der *Fatousche Satz*: In allen Punkten  $\eta$  des Kreisbogens  $C_1E_1D_1$ , die nicht auf einer Nullmenge  $e''$  liegen, konvergieren mit  $\lim_{\nu=\infty} u_\nu = \eta$  die Zahlenfolgen  $h(u_\nu)$  gegen einen und denselben Wert, falls nur die  $u_\nu$  in einem Winkel mit der Spitze in  $\eta$  liegen.

Setzt man also

$$e = e' + e'', \quad (5.4)$$

so ist auf jedem Radius, dessen Endpunkt auf  $C_1E_1D_1$ , aber nicht auf  $e$  liegt,

$$\lim_{|u| \rightarrow 1} |h(u)| = 1. \quad (5.5)$$

Es sei jetzt  $\varepsilon$  eine beliebige positive Zahl. Ferner sei  $\Delta$  eine Menge von abzählbar vielen Teilbögen von  $C_1E_1D_1$ , deren Gesamtlänge die Zahl  $\varepsilon$  nicht überschreitet, und die überdies einerseits die Punktmenge (5.4) überdecken, andererseits aber so gewählt sind, daß die durch die Relation (5.5) ausgedrückte Konvergenz in den nicht auf  $\Delta$  liegenden Punkten von  $C_1E_1D_1$  gleichmäßig stattfindet. Das letztere ist wegen des bekannten Satzes von *Egoroff* immer möglich.

Wir betrachten auf jedem Kreis  $|u| = r$  ( $0 < r < 1$ ) die Punktmenge  $\Delta_r$ , die durch die Radien des Kreises  $|u| < 1$ , deren Endpunkte in  $\Delta$  liegen, ausgeschnitten wird, und bezeichnen mit  $\Gamma_r$  die übrigen Punkte desselben Kreises. Hierauf bestimmen wir auf dem Kreise  $|u| = r$  zwei reguläre analytische Funktionen  $k_r(u)$  und  $\kappa_r(u)$ , die keine Nullstellen haben sollen und durch folgende Vorschriften eindeutig bestimmt sind: In jedem Punkte von  $\Delta_r$  soll

$$|k_r(u)| = 1 \quad \text{und} \quad |\kappa_r(u)| = M \quad (5.6)$$

sein; und in jedem Punkte von  $\Gamma_r$  soll (von einer Nullmenge abgesehen)

$$|k_r(u)| = \max(1, |h(u)|), \quad |\kappa_r(u)| = 1 \quad (5.7)$$

sein. Nach dem Prinzip des Maximums ist dann für  $|u| < r < 1$

$$|h(u)| \leq |k_r(u)| \cdot |\kappa_r(u)| \quad (5.8)$$

Nun existieren die beiden Grenzfunktionen .

$$k(u) = \lim_{r \rightarrow 1} k_r(u), \quad \kappa(u) = \lim_{r \rightarrow 1} \kappa_r(u); \quad (5.9)$$

von diesen ist  $k(u)$  nicht nur unabhängig von der Wahl von  $\Delta$ , sondern auch regulär auf dem rechten Halbkreis und es ist dort  $|k(u)| \equiv 1$ , während für  $\kappa(u)$  die aus einer Abschätzung des Poissonschen Integrals, das für  $\kappa(u)$  gebildet wird, zu entnehmende Relation

$$|\kappa(u)| < e^{\varepsilon M \frac{1+|u|}{1-|u|}}$$

besteht. Aus den letzten Beziehungen erhält man zunächst

$$|h(u)| < |k(u)| e^{\varepsilon LM \frac{1+|u|}{1-|u|}},$$

und wenn man hierin  $\varepsilon$  gegen Null konvergieren läßt,

$$|h(u)| \leq |k(u)|. \quad (5.10)$$

Die Randwerte von  $|k(u)|$  auf dem Kreisbogen  $C_1 E_1 D_1$  sind alle gleich Eins. Also sind die Randwerte von  $h(u)$  in keinem Punkte dieses Kreisbogens ihrem absoluten Betrage nach größer als Eins und dasselbe gilt von den Randwerten von  $g(z)$  auf dem Teilbogen  $CD$  von  $AB$ . Auf demselben Bogen  $CD$  liegen dann die Randwerte von  $f(z)$  auf der abgeschlossenen Halbebene, die den Punkt  $\alpha$  nicht enthält.

Hiermit ist das angekündigte Resultat bewiesen.

6. Die Modulfunktion  $\nu(z)$  liefert ein einfaches Beispiel, für welches sämtliche Punkte des Kreises  $|z| = 1$  wesentlich singuläre Stellen erster Art sind.

Ein Beispiel, bei welchem die Voraussetzungen des § 3 bestehen, und sämtliche Punkte von  $|z| = 1$  wesentlich singuläre Stellen zweiter Art sind, erhält man auf folgende Weise: in der oberen Halbebene der  $w$ -Ebene betrachten wir ein Kreisbogendreieck, dessen Seiten Orthogonalkreise der reellen Achse sind und dessen Winkel z. B. die Werte  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$  betragen.

Dieses Dreieck bilden wir konform auf ein Kreisbogendreieck der  $z$ -Ebene ab, das drei Spitzen besitzt, die auf dem Kreise  $|z| = 1$  liegen und dessen Seiten diesen letzten Kreis senkrecht schneiden. Die analytische Fortsetzung  $\mu(z)$  der Abbildungsfunktion stellt die konforme Abbildung einer Riemannschen Fläche der  $w$ -Ebene dar, die einfach zusammenhängend und regulär verzweigt ist und in den Ecken des ursprünglichen Dreiecks, sowie auch in den Ecken aller weiteren Dreiecke, die man durch fortgesetzte Spiegelungen an den Seiten erhalten kann, logarithmische Verzweigungsstellen besitzt.

Der Kreis  $|z| = 1$  bildet eine natürliche Grenze der Funktion  $\mu(z)$ ; alle Werte von  $\mu(z)$  haben einen positiven Imaginärteil. Jeder Punkt des Einheitskreises ist, wie man leicht auch direkt beweisen kann, eine wesentlich singuläre Stelle zweiter Art.

Um nun zu zeigen, daß die Voraussetzungen des § 3 hier erfüllt sind, benutzen wir folgende Schlußweise: Fast alle Radian des Kreises  $|z| < 1$  werden durch die Funktion  $w = \mu(z)$  auf Kurven der  $w$ -Ebene abgebildet, die gegen einen wohlbestimmten Endpunkt konvergieren. Dieser Endpunkt kann nur mit dem Punkt  $w = \infty$ , mit einem Punkt der reellen Achse oder mit einer Ecke der Triangulation zusammenfallen. Letzteres

ist aber nur dann möglich, wenn der zugehörige Radius des Kreises  $|z| < 1$  nur *endlich viele* Dreiecke der Modulfigur, die bei der obigen Konstruktion benutzt worden ist, durchsetzt; da es aber nur abzählbar viele Radien gibt, die diese Eigenschaft haben, sind die Voraussetzungen des § 3 alle erfüllt.

Die von uns betrachteten Funktionen können auch isolierte wesentlich singuläre Stellen aufweisen. So hat z. B die Funktion

$$w = e^{i \frac{1+z}{1-z}}$$

im Punkte  $z = 1$  eine wesentlich singuläre Stelle erster Art und die Funktion

$$w = i \frac{e^{\frac{1+z}{1-z}} + 1}{e^{\frac{1+z}{1-z}} - 1}$$

im selben Punkte eine wesentlich singuläre Stelle zweiter Art. In den übrigen Punkten des Kreises  $|z| = 1$  ist die erste dieser Funktionen durchwegs regulär, während die zweite Pole besitzt, die sich im Punkte  $z = 1$  häufen.

Auch können sämtliche Punkte des Kreises, bis auf einen isolierten wesentlich singulären Punkt erster Art, wesentlich singuläre Stellen zweiter Art sein. Um dieses zu erreichen, normieren wir die Funktion  $\mu(z)$ , die wir soeben betrachtet haben, so daß bei Winkelannäherung an den Punkt  $z = 1$  diese Funktion gegen einen endlichen reellen Wert konvergiert. Dann besitzt die Funktion

$$f(z) = e^{i \frac{1+z}{1-z}} + \mu(z)$$

im Punkte  $z = 1$  sowohl Randwerte mit positivem, als auch solche mit negativem Imaginärteil. Der Punkt  $z = 1$  ist also eine wesentlich singuläre Stelle erster Art. In den übrigen Punkten des Einheitskreises gibt es Randwerte mit positivem, aber keine mit negativem Imaginärteil; sie sind also wesentlich singuläre Stellen zweiter Art.

Durch diese Beispiele, die man leicht vermehren kann, sieht man, daß die Verteilung der singulären Stellen des Randes an keine Bedingungen gebunden zu sein scheint, außer denjenigen, die aus dem Wortlaut des Satzes 2 fließen.

7. Der Satz 2 des § 3 kann als Sonderfall eines ganz allgemeinen Theorems angesehen werden, durch welches die Randwerte einer beliebigen im

Kreise  $|z| < 1$  meromorphen Funktion  $f(z)$  in Beziehung zu den speziellen Grenzwerten dieser Funktion, die man bei *radialer Annäherung* erhält, gebracht werden können.

Um dieses Theorem zu beweisen, leiten wir zunächst einige Hilfssätze ab.

Ist erstens  $f(z)$  im abgeschlossenen Kreis  $|z| \leq 1$  regulär, so gilt bekanntlich die Gleichung

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) d\vartheta .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt den Schwerpunkt einer gewissen Verteilung von positiven Massen dar, die sich auf der Kurve  $f(e^{i\vartheta})$  befinden. Daraus folgt, daß der Punkt  $f(0)$  nicht außerhalb der *konvexen Hülle dieser Kurve* liegen kann.

Zweitens sei  $f(z)$  regulär und beschränkt im Kreise  $|z| < 1$ , so daß man hat

$$|f(z)| < M . \quad (7.1)$$

Wir geben uns auf dem Rande  $|z| = 1$  des Einheitskreises eine offene Punktmenge  $\Delta$ , die aus höchstens abzählbar vielen Teilbögen besteht, deren Längen die Summe  $\varepsilon$  besitzen, und nehmen an, daß für jeden Punkt  $e^{i\vartheta}$  der Peripherie, der nicht auf  $\Delta$  liegt, der Grenzwert

$$\lim_{r=1} f(re^{i\vartheta}) \quad (0 < r < 1) \quad (7.2)$$

existiert, und daß die Konvergenz von (7.2) für alle diese Punkte eine gleichmäßige ist. Ferner bezeichnen wir mit  $W$  die Menge aller Grenzwerte (7.2) und mit  $W^*$  die konvexe Hülle dieser Punktmenge.

Ist dann  $r$  eine beliebige positive Zahl  $< 1$ , so betrachte man auf dem Kreise  $|z| = r$  die offene Punktmenge  $\Delta_r$ , die wir schon im § 5 benutzt haben, und neben der analytischen Funktion  $f(re^{i\vartheta})$  eine stetige Funktion  $\varphi_r(\vartheta)$ , die in jedem Teilintervall von  $\Delta_r$  linear in  $\vartheta$  ist und in allen übrigen Punkten des Kreises mit  $f(re^{i\vartheta})$  zusammenfällt.

Aus den Relationen

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta}) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(\vartheta) d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(re^{i\vartheta}) - \varphi_r(\vartheta)) d\vartheta \quad (7.2)$$

folgt dann mit den Bezeichnungen



$$w_1 = \lim_{r=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(\vartheta) d\vartheta, \quad w_2 = \lim_{r=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(re^{i\vartheta}) - \varphi_r(\vartheta)) d\vartheta \quad (7.2)$$

die Gleichung

$$f(0) = w_1 + w_2. \quad (7.3)$$

Nun ist  $w_1$  ein Punkt der konvexen Hülle  $W^*$  und

$$|w_2| \leq 2\varepsilon M, \quad (7.4)$$

da  $|f(re^{i\vartheta}) - \varphi_r(\vartheta)| < 2M$  ist.

8. Diese Abschätzung benutzen wir, um folgenden Satz zu beweisen:

**Satz 4.** *Im Kreise  $|z| < 1$  sei die analytische Funktion  $f(z)$  regulär und beschränkt. In jedem nicht auf einer Nullmenge  $e_z$  liegenden Punkt  $e^{i\vartheta}$  eines Bogens  $AB$  des Kreisrandes soll der Grenzwert*

$$\lim_{r=1} f(re^{i\vartheta})$$

*existieren und in einer Punktmenge  $W$  der  $w$ -Ebene enthalten sein. Dann ist jeder Randwert von  $f(z)$ , der in einem beliebigen inneren Punkte  $\xi_0$  des Bogens  $AB$  angenommen wird, ein Punkt des Inneren oder des Randes der konvexen Hülle  $W^*$  von  $W$ .*

Es sei  $z_0$  irgendein Punkt des Kreises  $|z| < 1$ . Durch die Möbiussche Transformation

$$z = \frac{z_0 - u}{1 - \bar{z}_0 u}$$

werden die beiden abgeschlossenen Kreise  $|z| \leq 1$  und  $|u| \leq 1$  eindeutig aufeinander abgebildet, wobei der Bogen  $AB$  in einen Bogen  $A_1B_1$  übergeführt wird, dessen Länge wir mit

$$2\pi - \frac{\varepsilon}{2}$$

bezeichnen. Gleichzeitig wird die Nullmenge  $e_z$ , die auf  $AB$  liegt, in eine Nullmenge  $e_u$  des Bogens  $A_1B_1$  verwandelt. Nun betrachten wir die Funktion

$$h(u) = f\left(\frac{z_0 - u}{1 - \bar{z}_0 u}\right).$$



Wir können die Punktmenge  $e_u$  und das Komplement des Bogens  $A_1 B_1$  mit einer Folge  $\Delta$  von Intervallen überdecken, deren Gesamtlänge  $\varepsilon$  ist, und für welche die Annahmen gelten, die wir im § 7 gemacht haben. Gemäß (7.3) können wir also schreiben

$$f(z_0) = h(0) = w_1 + w_2 ,$$

wobei  $w_1$  ein Punkt von  $W^*$  ist und außerdem die Ungleichheit

$$|w_2| \leq 2 \varepsilon M$$

gilt.

Um dann die Behauptung des Satzes 4 zu verifizieren, braucht man nur noch zu beachten, daß  $\varepsilon$  gleichzeitig mit  $|\zeta_0 - z_0|$  gegen Null konvergiert. Die Annahme, daß  $f(z)$  im ganzen Kreise  $|z| < 1$  beschränkt sein soll, kann man übrigens mit Hilfe der Methode des § 2 durch die schwächere Annahme ersetzen, daß  $f(z)$  in einer Umgebung von  $\zeta_0$  beschränkt ist.

9. Das allgemeine Resultat, das wir im Auge haben, fließt leicht aus dem Satz 4. Wir betrachten auf der Riemannschen Zahlkugel eine „normale Überdeckungsfolge“

$$K_1, K_2, K_3, \dots \quad (9.1)$$

von offenen Punktmengen, z.B. von Kreisen, d. h. eine abzählbare Menge von Kreisen von der Eigenschaft, daß man jedem beliebigen noch so kleinen Kreise  $\kappa$  der Kugel, der den Mittelpunkt  $P$  besitzt, mindestens einen Kreis  $K_\nu$  der Folge (9.1) zuordnen kann, der im Innern von  $\kappa$  liegt und den Punkt  $P$  in seinem Inneren enthält<sup>1)</sup>.

Es sei nun  $f(z)$  eine beliebige analytische Funktion, die im Innern von  $|z| < 1$  meromorph ist. Jedem Kreise  $K_\nu$  der Folge (9.1) ordnen wir auf der Kreisperipherie  $|z| = 1$  eine Punktmenge  $A_\nu$  zu, die aus allen Punkten  $\zeta$  dieser Linie besteht, für welche der Grenzwert

$$\lim_{r=1} f(r\zeta) \quad (0 < r < 1) \quad (9.2)$$

entweder nicht existiert, oder, falls er vorhanden ist, mit einem Punkte des Inneren von  $K_\nu$  zusammenfällt.

---

<sup>1)</sup> Bezeichnet man mit  $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$  die gegen Null konvergierenden Radien einer Folge von konzentrischen Kreisen der Kugel und mit  $P_1, P_2, \dots$  abzählbar viele überall dicht liegende Punkte der Kugel, so bilden die Kreise  $\kappa(P_\nu; r_j)$  mit den Mittelpunkten  $P_\nu$  und den Radien  $r_j$  eine derartige normale Überdeckungsfolge.

Ferner sei auf  $|z| = 1$  eine Folge

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \dots \quad (9.3)$$

von ineinandergeschachtelten Kreisbögen definiert, die einen gemeinsamen inneren Punkt  $\zeta_0$  besitzen und deren Längen gegen Null konvergieren.

Wir betrachten für jeden Wert von  $\nu$  die Folge der Durchschnitte

$$A_\nu \delta_1, A_\nu \delta_2, \dots, A_\nu \delta_p, \dots \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad (9.4)$$

und bezeichnen mit

$$n_j \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (9.5)$$

diejenigen ganzen Zahlen (falls es solche gibt), für welche unter den Punktmengen  $A_{n_j} \delta_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) mindestens eine das lineare Maß Null besitzt.

**10.** Nachdem wir auf diese Weise die  $n_j$  bestimmt haben, betrachten wir die offene Punktmenge

$$U = K_{n_1} \dot{+} K_{n_2} \dot{+} K_{n_3} \dot{+} \dots \quad (10.1)$$

und ihre abgeschlossene Komplementärmenge  $H$ .

Unter Umständen kann  $U$  die leere Menge sein und  $H$  mit der Gesamtkugel zusammenfallen. Zum Beispiel existiert für die Modulfunktion  $\nu(z)$ , die wir im § 3 betrachtet haben, der Grenzwert

$$\lim_{r=1} \nu(r\zeta)$$

nur dann, wenn dieser Grenzwert mit einer der drei Zahlen  $0, 1, \infty$  zusammenfällt. Und eine einfache Betrachtung zeigt, daß dies dann und nur dann der Fall sein kann, wenn  $\zeta$  mit einer der abzählbar vielen Spitzen der Dreiecke der Modulfigur koinzidiert. In diesem Falle ist also für jedes  $\nu$  und jedes  $p$  das lineare Maß von  $A_\nu \delta_p$  positiv und die Punktmenge  $U$  existiert überhaupt nicht.

Die Punktmenge  $H$  dagegen muß stets Punkte enthalten. Denn sonst würden endlich viele  $K_{n_j}$  existieren, deren Vereinigung die ganze Zahlkugel überdeckt, und es müßte einen Bogen  $\delta_p$  geben, innerhalb dessen diejenigen Punkte  $\zeta$ , für welche der Grenzwert (9.2) entweder nicht existiert oder gleich einer beliebigen Zahl ist, eine Nullmenge bilden, was unmöglich ist.

Jeder Punkt  $\omega$  von  $H$  ist notwendig ein Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$ . Um dies zu zeigen, betrachten wir einen Kreis  $K_\nu$  unserer Überdeckungsfolge (9.1), der  $\omega$  in seinem Inneren enthält und selbst in einer vorgeschriebenen Umgebung von  $\omega$  enthalten ist. Nehmen wir nun an,  $\omega$  wäre nicht ein Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$ . Dann gibt es eine Umgebung von  $\zeta_0$ , innerhalb welcher

$$\frac{1}{f(z) - \omega}$$

beschränkt ist, und mindestens einen Bogen  $\delta_{p_0}$ , auf welchem der Fatousche Satz gilt. Andererseits ist die Zahl  $\nu$  nach Voraussetzung keine Zahl aus der Folge (9.5). Für  $p \geq p_0$  muß also auf jedem Bogen  $\delta_p$  mindestens ein Punkt  $\zeta_\nu$  liegen, für welchen

$$\lim_{r=1} f(r\zeta_\nu)$$

existiert und in  $K_\nu$  enthalten ist. Folglich gibt es auch Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$ , deren Abstand von  $\omega$  beliebig klein ist. Und da die Menge der Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  notwendig abgeschlossen ist, muß, entgegen der obigen Annahme, der Punkt  $\omega$  doch unter diesen Randwerten vorkommen. Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

11. Unter der Voraussetzung, daß die Punktmenge  $H$  nicht die ganze Zahlkugel ausfüllt, kann man ihre Komplementärmenge  $U$  als Summe von höchstens abzählbar vielen paarweise punktfremden Gebieten  $G_i$  darstellen. Ist dann die Zahl  $\alpha$  kein Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$ , so muß der Punkt, der dieser Zahl entspricht, in einem dieser Gebiete, z. B. in  $G_1$ , liegen.

Mit  $\kappa_0$  bezeichnen wir eine in  $G_1$  liegende abgeschlossene Kreisscheibe, deren Rand den Punkt  $\alpha$  enthält. Man kann dann den Satz 4 des § 8 auf die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha} \quad (10.1)$$

anwenden, indem man für den Bogen  $AB$  ein geeignetes Intervall  $\delta_p$  wählt, und daraus schließen, daß die ganze Kreisscheibe  $\kappa_0$  aus lauter Punkten besteht, die keine Randwerte von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  darstellen. Dazu muß man bedenken, daß  $g(z)$  in einer Umgebung von  $\zeta_0$  beschränkt ist und daß die abgeschlossene Punktmenge  $\kappa_0$  durch endlich viele Kreise  $K_{n_j}$  überdeckt werden kann. Die radialen Grenzwerte von  $f(z)$ , längs

Radien genommen, die in Punkten von  $\delta_p$  münden und die nicht auf einer gewissen Nullmenge liegen, sind also in einer Punktmenge enthalten, der kein Punkt von  $\kappa_0$  angehört. Diese letztere Punktmenge wird nun durch die Abbildung

$$v = \frac{1}{w - \alpha} \quad (10.2)$$

in eine andere verwandelt, die mit ihrer konvexen Hülle keinen Punkt der Halbebene enthält, in welche der Kreis  $\kappa_0$  durch (10.2) transformiert wird. Also kann, wie bewiesen werden sollte, auch kein Punkt von  $\kappa_0$  Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  sein. Dieses Resultat wird noch folgendermaßen vervollständigt.

Ist ein beliebiger Punkt  $\beta$  des Gebietes  $G_1$  gegeben, so kann man immer eine Kette von abgeschlossenen Kreisscheiben

$$\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$$

finden, die alle in  $G_1$  liegen und von denen sich zwei aufeinanderfolgende teilweise überdecken, so daß der letzte Kreis  $\kappa_m$  den Punkt  $\beta$  enthält und  $\kappa_0$  den Punkt  $\alpha$  auf seinem Rande besitzt. Durch diese Konstruktion wird gezeigt, daß kein Punkt des Gebietes  $G_1$  Randwert von  $f(z)$  im Punkte  $\zeta_0$  sein kann.

So gelangen wir zum folgenden

**Satz 5.** *Es sei eine analytische Funktion  $f(z)$  meromorph im Kreise  $|z| < 1$  und  $\zeta_0$  sei ein beliebiger Punkt des Randes  $|z| = 1$ . Dann kann man nach den Vorschriften der letzten Paragraphen die Punkte der Riemannschen Zahlkugel als Summe*

$$H + G_1 + G_2 + \dots$$

*von paarweise punktfremden Mengen darstellen, wobei  $H$  abgeschlossen und nicht leer ist und die  $G_i$ , die u. U. auch fehlen können, Gebiete bedeuten, die mit Hilfe der radialen Grenzwerte  $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\vartheta})$  der betrachteten Funktion  $f(z)$  berechnet werden.*

*Dann ist für jedes beliebige der Gebiete  $G_i$  entweder jeder ihrer Punkte Randwert von  $f(z)$  in  $\zeta_0$ , oder aber kein einziger Punkt von  $G_i$  hat diese Eigenschaft. Die Menge der Randwerte von  $f(z)$  in  $\zeta_0$  besteht also jedenfalls aus der abgeschlossenen Menge  $H$ , der noch gewisse unter den Gebieten  $G_i$  hinzuzufügen sind.*

12. Aus dem Beweis des vorigen Satzes kann man gewisse Schlüsse über die Verteilung der radialen Grenzwerte  $\lim_{r=1} f(re^{i\vartheta})$  ziehen, die in mancher Hinsicht wertvoll sind. Zum Beispiel bilden für die Funktion  $\mu(z)$ , die in § 6 betrachtet wurde, diejenigen Punkte  $\zeta = e^{i\vartheta}$ , für welche

$$\lim_{r=1} \mu(re^{i\vartheta})$$

existiert und in einem noch so kleinen vorgeschriebenen Intervall der reellen Achse enthalten ist, eine Punktmenge, die auf jedem Bogen des Einheitskreises ein von Null verschiedenes lineares Maß besitzt.

Auch kann man Beispiele von meromorphen Funktionen  $f(z)$  finden, die in jedem von  $z = 1$  verschiedenen Punkte des Kreises  $|z| = 1$  regulär, und die so beschaffen sind, daß für  $\zeta_0 = 1$  die Punktmenge  $H$  mit einem vorgeschriebenen Kontinuum zusammenfällt.

Die Bildung solcher Beispiele und auch anderer, bei welchen  $H$  kein Kontinuum ist, also z. B. aus endlich vielen irgendwie gelegenen Kreisen besteht, ist unerläßlich, um die Tragweite des Satzes 5 richtig zu verstehen.

(Eingegangen den 20. August 1946.)