

Eine Erweiterung eines Theorems von Steinhaus-Rademacher.

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **19 (1946-1947)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-17345>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Eine Erweiterung eines Theorems von Steinhaus-Rademacher

Von H. HADWIGER, Bern

Ist A eine lineare Menge von positivem Maß $m(A) > 0$, so gibt es nach *H. Steinhaus*¹⁾ ein $\Delta > 0$, so daß A für jedes Δ' , $\Delta' < \Delta$, ein Punktepaar der Distanz Δ' enthält.

Nach einer sich auf den n -dimensionalen euklidischen Raum R_n beziehenden Verallgemeinerung von *H. Rademacher*²⁾ gibt es zu einer Menge $A \in R_n$ von positivem Maß $m(A) > 0$ ein $\Delta > 0$, so daß A für jedes Δ' , $\Delta' < \Delta$, und jede Raumrichtung ein Punktepaar der Distanz Δ' enthält, wobei die Verbindungsgerade der beiden Punkte die vorgeschriebene Raumrichtung repräsentiert.

Die Formulierung unserer Erweiterung vorbereitend, vermerken wir folgendes: Zwei kongruente Mengen heißen translationsgleich, wenn diese durch eine Translation miteinander zur Deckung gebracht werden können. Um die Lage einer aus der Menge S durch Translation hervorgehenden Menge S' zu fixieren, geben wir die Lage des einem fest gewählten Merkpunkte P von S entsprechenden Punktes P' an. Als Maß einer Menge von translationsgleichen Mengen S' dient das Maß der Menge der Punkte P' .

Es gilt nun der folgende

Satz: *Es sei $A \in R_n$ eine Menge von positivem Maß $m(A) > 0$; zu einer ganzen Zahl $k > 1$ und einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\Delta > 0$, so daß A zu jeder aus k Punkten bestehenden Menge $S \in R_n$ vom Durchmesser $D(S) < \Delta$ unendlich viele mit S translationsgleiche Mengen S' als Teilmengen enthält, und zwar so, daß für das Maß $m(M)$ der Menge M der translationsgleichen S' noch $m(M) > (1 - \varepsilon)m(A)$ gilt.*

Die Erweiterung gegenüber dem oben zitierten Theorem von *Steinhaus* und *Rademacher* besteht also einerseits darin, daß ein Punktepaar ersetzt wird durch eine beliebige endliche Menge, und daß andererseits unendlich viele derartige endliche Mengen als Teilmengen sichergestellt werden.

¹⁾ *H. Steinhaus*, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive. *Fund. Math.* 1, 1920, 93—104.

²⁾ *H. Rademacher*, Über eine Eigenschaft von meßbaren Mengen positiven Maßes. *Jahresbericht der D.M.V.* 30, 1921, 130—132.

Aus dem Satz ergibt sich noch als

Korollar: *Es sei $A \in R_n$ eine Menge von positivem Maß $m(A) > 0$; dann enthält A zu jeder endlichen Menge S eine ähnliche Menge S' als Teilmenge; genauer: A enthält jede zu S ähnliche Menge S' als Teilmenge, deren Durchmesser kleiner als eine von S abhängige Schranke $\Delta > 0$ ist.*

Es kann hier darauf hingewiesen werden, daß diese Feststellung für lineare Mengen von *S. Ruziewicz*³⁾ gemacht wurde.

Im nachfolgenden Beweis haben die Zeichen A , $m(A)$, k , ε , Δ , M , S und $D(S)$ die ihnen nach dem Wortlaut des zu beweisenden Satzes zukommende Bedeutung.

Bekanntlich gibt es eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge $A^0 \in A$, so daß

$$m(A^0) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) m(A) \quad (1)$$

ist. Es bezeichne nun $A^0[\varrho]$ die *Cantor-Minkowskische* Hülle von A^0 vom Radius $\varrho > 0$, d. h. die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius ϱ , deren Mittelpunkte in A^0 liegen. Da A^0 abgeschlossen ist, gilt in bekannter Weise

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} m(A^0[\varrho]) = m(A^0) . \quad (2)$$

Es gibt somit ein $\Delta > 0$ so, daß

$$m(A^0[\Delta]) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2k-2}\right) m(A^0) \quad (3)$$

gilt. Es bezeichne jetzt S eine aus k Punkten P_i ($i=1, 2, \dots, k$) bestehende endliche Menge vom Durchmesser $D(S) < \Delta$. Diese Menge S werde nun relativ zur raumfesten Menge A allen Translationen unterworfen. Die Lage der bewegten Menge S' fixieren wir durch Angabe der n cartesischen Koordinaten x_i des Merkpunktes $P_1 = (x_1, \dots, x_n)$. Ferner führen wir noch die folgenden Hilfsfunktionen ein:

Für eine endliche Menge H bezeichne $p(H)$ die Punktanzahl von H ; weiter sei $q(H) = 1$ oder 0 , je nachdem H wenigstens einen Punkt enthält oder leer ist. Nun bilden wir die beiden L -Integrale

³⁾ *S. Ruziewicz, Contribution à l'étude des ensembles de distances de points. Fund. Math. 7, 1925, 141—143.*

$$\Phi(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(A^0 S') dx_1 \dots dx_n \quad (4)$$

und

$$\psi(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(A^0 S') dx_1 \dots dx_n . \quad (5)$$

Im Hinblick auf die Beschränktheit der beteiligten Mengen erstrecken sich die beiden Integrationen effektiv nur über einen beschränkten Raumteil, da außerhalb eines solchen beide Integranden verschwinden. — Nun gilt offensichtlich

$$p(A^0 S') = \sum_1^k p(A^0 P'_v) \quad (6)$$

und da natürlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(A^0 P'_v) dx_1 \dots dx_n = m(A^0) \quad (7)$$

gilt, wird jetzt also

$$\Phi(S) = k m(A^0) \quad (8)$$

sein. — Bedenken wir ferner, daß der Integrand in (5) dann und nur dann den Wert 1, sonst 0, aufweist, wenn S' mit A^0 wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, was wieder nur dann eintreten kann, wenn der Merkpunkt P'_1 in der Hülle $A^0[\Delta]$ liegt, so schließen wir auf

$$\psi(S) \leq m(A^0[\Delta]) . \quad (9)$$

Es bezeichne nun M_v ($v = 1, 2, \dots, k$) die Menge der Punkte P'_1 , für die $p(A^0 S') = v$ ist. Offenbar hat man

$$\Phi(S) = \sum_1^k v m(M_v) = k m(A^0) \quad (10)$$

und

$$\psi(S) = \sum_1^k m(M_v) \leq m(A^0[\Delta]) . \quad (11)$$

Aus (10) und (11) folgt mit nachfolgender Verwendung von (3)

$$k\psi(S) - \Phi(S) = \sum_1^{k-1} (k-v) m(M_v) < \frac{k\varepsilon}{2k-2} m(A^0) . \quad (12)$$

Nun ist

$$\sum_1^{k-1} v m(M_v) \leq (k-1) \sum_1^{k-1} (k-v) m(M_v) < \frac{k\varepsilon}{2} m(A^0) \quad (13)$$

und wegen (10) ist

$$m(M_k) = m(A^0) - \frac{1}{k} \sum_1^{k-1} v m(M_v) \quad (14)$$

und es folgt mit Berücksichtigung von (13)

$$m(M_k) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) m(A^0) \quad (15)$$

und im Hinblick auf (1) jetzt

$$m(M_k) > (1 - \varepsilon) m(A) . \quad (16)$$

Da nun aber M_k offenbar mit der im Satz genannten Menge M identisch ist, schließt (16) den Beweis des Satzes ab.

(Eingegangen den 13. August 1946.)