Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1946-1947)

Artikel: Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels.
Autor: Pisot, Charles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17341

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels

Par Charles Pisot, Bordeaux

Nous appellerons *répartition (mod 1)* d'une suite $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ de nombres réels une suite $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ obtenue en ramenant (mod 1) chaque nombre φ_n à un nombre ψ_n appartenant à un intervalle fixe de longueur 1. En d'autres termes, à tout φ_n on fait correspondre un nombre ψ_n de l'intervalle fixe $\gamma \leqq \psi_n < \gamma + 1$, de sorte que

$$\varphi_n - \psi_n = u_n$$

soit un nombre entier.

On a déjà beaucoup étudié les répartitions (mod 1) des suites qui dépendent de façon simple de n, en particulier celles où φ_n est un polynome en n [1]). Une fonction qui s'est montrée particulièrement réfractaire est la fonction exponentielle; très peu de résultats sont connus sur sa répartition (mod 1) [2]). J'ai donné dans un travail antérieur [3]) un certain nombre de résultats pour cette fonction [4]). Dans cet article je les compléterai et caractériserai une famille particulière de nombres algébriques parmi l'ensemble des nombres réels par les propriétés de la répartition (mod 1) de leurs puissances [5]).

Théorème I. *L'ensemble des nombres réels $\alpha > 1$ et λ tels que la répartition (mod 1) de la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ ait un nombre fini de valeurs limites est dénombrable.*

Théorème II. *Soit α un nombre algébrique réel supérieur à un et λ un nombre réel. La condition nécessaire et suffisante pour que la répartition (mod 1) de la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ ait un nombre fini de valeurs limites, c'est que les deux conditions suivantes soient simultanément vérifiées :*

---

[1]) Voir p. e. *Koksma*, Diophantische Approximationen, Ergebn. Math. *IV*, 4; 86—125.

[2]) *Thue*, Norske Vid. Selsk. Skr. (1912 — II), Nr. 20; 1—15.
Koksma, Compositio math. 2 (1935); 250—258.

[3]) *Pisot*, C. R. Acad. Sci. Paris 204 (1937); 312—314 et Ann. R. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. II, 7 (1938); 205—248.

[4]) Ces résultats ont été retrouvés indépendamment par *Vijagaraghavan*, Proc. Ind. Ac. Sci. A 12 (1940); Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941); 349—357; Journal London Math. Soc. 17 (1942); 137—138.

[5]) La distribution de ces nombres algébriques a été récemment étudiée par *Salem*, Duke math. j. 11 (1944); 103—108 et 12 (1945); 153—172 et par *Siegel*, Duke math. j. 11 (1944); 597—602. Ils forment un ensemble fermé.

A. *α est un entier algébrique dont tous les conjugués sont en module strictement inférieurs à un* [6]).

B. *λ est un nombre algébrique et appartient au corps de α.*

Théorème III. *Soit α un nombre réel supérieur à un et λ un nombre réel positif. Les conditions A et B du théorème II sont encore remplies si l'on a simultanément:*

1. *Le nombre des valeurs limites de la répartition (mod 1) de la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ est fini.*

2. *La convergence de la répartition vers ses valeurs limites est $o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$, k étant le nombre des valeurs limites irrationnelles.*

Nous allons d'abord démontrer quelques lemmes servant à la fois aux démonstrations des trois théorèmes.

Remarque. *Supposons qu'une répartition (mod 1) d'une suite quelconque φ_n ait un nombre fini de valeurs limites rationnelles. Il existe alors un entier d tel que toute répartition (mod 1) de la suite $d\varphi_n$ ait pour seule valeur limite rationnelle un entier.*

Il est clair qu'il suffit de prendre pour d un dénominateur commun à toutes les valeurs limites rationnelles. *Nous supposerons dans la suite de la démonstration avoir ainsi ramené toutes les valeurs limites rationnelles à un entier.*

Lemme 1. *Supposons qu'une répartition (mod 1) d'une suite quelconque φ_n ait un nombre fini de valeurs limites, dont k irrationnelles. A tout entier $q \geqq 4$ on peut alors faire correspondre un entier $h \leqq q^k$ tel qu'une répartition ψ'_n de la suite $h\varphi_n$ tombe dans l'intervalle $-\frac{2}{q} \leqq \psi'_n \leqq \frac{2}{q}$ pour tout indice n supérieur à n_0.*

Désignons par $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ les valeurs limites irrationnelles de la répartition (mod 1) de la suite φ_n, et par γ_0 l'entier auquel nous avons ramené, grâce à la remarque, les valeurs limites rationnelles. Si la répartition ψ_n se trouve dans l'intervalle $\gamma \leqq \psi_n < \gamma + 1$, il en sera de même des valeurs limites $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$. On aura alors

$$\varphi_n = u_n + \gamma_\kappa + \varepsilon_n \tag{1}$$

[6]) Le fait qu'aucun conjugué de α ne puisse avoir de module égal à un a été démontré par *Vijagaraghavan*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941); 349—357.

où u_n désigne un entier, κ l'un des indices $0, 1, \ldots, k$, et ε_n une quantité tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

D'après un théorème d'approximation connu [7]), quel que soit l'entier $q \geqq 1$, on peut trouver un entier $h \leqq q^k$, tel que l'on ait $|h\gamma_\kappa - h_\kappa| \leqq \frac{1}{q}$, à la fois pour $\varkappa = 1, \ldots, k$, h_κ étant un entier. On peut donc écrire $h\gamma_\kappa = h_\kappa + \eta_\kappa$, avec $|\eta_\kappa| \leqq \frac{1}{q}$. En multipliant la relation (1) par h, il vient

$$h\varphi_n = hu_n + h\gamma_\kappa + h\varepsilon_n = (hu_n + h_\kappa) + (\eta_\kappa + h\varepsilon_n) = u'_n + \psi'_n .$$

$hu_n + h_\kappa = u'_n$ est un entier, d'autre part on a

$$|\psi'_n| = |\eta_\kappa + h\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{q} + q^k |\varepsilon_n| . \tag{2}$$

Comme $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, on peut trouver un indice n_0, tel que $q^k |\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{q}$ pour tout $n \geqq n_0$, ce qui démontre le lemme.

Démonstration du théorème I. Soit q un entier avec $q > 4(\alpha + 1)^2$. Si la suite $\varphi_n = \lambda\alpha^n$ n'a qu'un nombre fini de valeurs limites, il correspond, d'après le lemme 1, à q un entier h tel que l'on ait

$$h\lambda\alpha^n = u'_n + \psi'_n \quad \text{avec} \quad |\psi'_n| \leqq \frac{2}{q} < \frac{1}{2(\alpha+1)^2} .$$

Or on a $u'_{n+1} = \alpha u'_n + \alpha\psi'_n - \psi'_{n+1}$, $u'_{n+2} = \alpha^2 u'_n + \alpha^2\psi'_n - \psi'_{n+2}$ d'où

$$\left| \frac{u'^2_{n+1}}{u'_n} - u'_{n+2} \right| = \left| \alpha^2 \psi'_n - 2\alpha\psi'_{n+1} + \psi'_{n+2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha\psi'_n - \psi'_{n+1})^2}{u'_n} \right| \leqq \frac{2}{q}(\alpha+1)^2 + \frac{4(\alpha+1)^2}{q^2 u'_n} .$$

La dernière expression tend vers un nombre strictement inférieur à $\frac{1}{2}$; à partir d'un certain indice $n \geqq n_1$, on a donc $\left| \frac{u'^2_{n+1}}{u'_n} - u'_{n+2} \right| < \frac{1}{2}$. La suite des entiers $u'_n, u'_{n+1}, \ldots$ est ainsi déterminée par la donnée des entiers u'_{n_1} et u'_{n_1+1}. Comme une telle suite ne peut provenir de deux nombres α et λ différents, ces derniers forment un ensemble dénombrable.

---

[7]) Voir p. e. [1]), p. 68—75.

Lemme 2. *Soient* $\alpha > 1$ *et* λ *deux nombres réels,* u_n *un entier et* ψ_n *une répartition (mod 1) de* $\lambda\alpha^n$ *telle que* $\lambda\alpha^n = u_n + \psi_n$. *Supposons qu'il existe des entiers* $a_0, a_1, \ldots, a_s$ *non tous nuls tels que*

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_s u_{n+s} = 0 \quad \textit{pour tout} \quad n \geqq n_2, \tag{3}$$

alors α *est un entier algébrique et* λ *un nombre algébrique du corps de* α.

Posons $Q(z) = a_0 z^s + a_1 z^{s-1} + \cdots + a_s$ et considérons la série $f(z) = u_0 + u_1 z + \cdots + u_n z^n + \cdots$. La récurrence (3) montre immédiatement que le produit $f(z)Q(z) = P(z)$ se réduit à un polynome, et par suite $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ est une fraction rationnelle. Or $u_n = \lambda\alpha^n - \psi_n$, donc

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\lambda}{1 - \alpha z} - \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n .$$

Comme les ψ_n sont bornés, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n$ converge dans le cercle $|z| < 1$. Dans ce cercle la fraction rationnelle $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ a par suite le pôle simple unique $z = \dfrac{1}{\alpha}$ avec le résidu $-\dfrac{\lambda}{\alpha}$. $\dfrac{1}{\alpha}$ est donc racine de $Q(z) = 0$, c'est-à-dire α est algébrique, et $\lambda = -\dfrac{\alpha P\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{Q'\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ appartient au corps de α.

Un théorème de Fatou [8]) nous apprend de plus que les inverses des pôles d'une fraction rationnelle sont des *entiers* algébriques lorsque son développement en série de Taylor a ses coefficients entiers rationnels.

Démonstration du théorème II. Soit $\alpha > 1$ un nombre algébrique, $a_s z^s + \cdots + a_0 = 0$ l'équation à coefficients entiers irréductible admettant α pour racine. Les autres racines $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ de cette équation sont les conjugués de α, elles sont toutes simples.

Soit q un entier vérifiant $q > 2(|a_0| + \cdots + |a_s|)$. D'après le lemme 1 on peut faire correspondre à cet entier q un entier h tel que

$$h\lambda\alpha^n = u'_n + \psi'_n \quad \text{avec} \quad |\psi'_n| \leqq \frac{2}{q} \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0 . \tag{4}$$

---

[8]) *Fatou,* Acta math. 30 (1906); 368—369.

En multipliant la relation $a_0 + \cdots + a_s\alpha^s = 0$ par $h\lambda\alpha^n$, il vient $a_0(u'_n + \psi'_n) + \cdots + a_s(u'_{n+s} + \psi'_{n+s}) = 0$, c'est-à-dire

$$| a_0 u'_n + \cdots + a_s u'_{n+s} | = | a_0 \psi'_n + \cdots + a_s \psi'_{n+s} | < 1 \text{ pour } n \geqq n_0 .$$

Comme à gauche nous avons un entier, ce dernier est nul pour $n \geqq n_0$. On peut par conséquent appliquer le lemme 2 avec u'_n au lieu de u_n et $h\lambda$ au lieu de λ, ce qui nous démontre que α est un entier algébrique et λ un nombre algébrique du corps de α.

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n$ utilisée dans la démonstration du lemme 2 nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n = \frac{h\lambda}{1-\alpha z} + \frac{h\lambda_2}{1-\alpha_2 z} + \cdots + \frac{h\lambda_s}{1-\alpha_s z} + R(z) ,$$

où $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sont les conjugués de λ dans les corps conjugués du corps de α, et $R(z)$ un polynome de degré inférieur à n_0. En développant chaque fraction simple en série, on obtient

$$u'_n = h\lambda\alpha^n + h\lambda_2\alpha_2^n + \cdots + h\lambda_s\alpha_s^n \quad \text{pour } n \geqq n_0 . \tag{5}$$

Posons alors

$$\Delta(z) = (z-\alpha)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{s-1}) = z^{s-1} + \delta_{s-2} z^{s-2} + \cdots + \delta_0$$

et formons la quantité $u'_{n+s-1} + \delta_{s-2} u'_{n+s-2} + \cdots + \delta_0 u'_n$. En y substituant pour u'_n soit l'expression (4), soit l'expression (5), on obtient :

$$\begin{aligned} h\lambda\alpha^n \Delta(\alpha) - (\psi'_{n+s-1} + \delta_{s-2}\psi'_{n+s-2} + \cdots + \delta_0\psi'_n) \\ = h\lambda\alpha^n \Delta(\alpha) + h\lambda_2\alpha_2^n \Delta(\alpha_2) + \cdots + h\lambda_s\alpha_s^n \Delta(\alpha_s) . \end{aligned}$$

Or $\Delta(\alpha) = \Delta(\alpha_2) = \cdots = \Delta(\alpha_{s-1}) = 0$ et $\Delta(\alpha_s) \neq 0$, donc

$$| \psi'_{n+s-1} + \delta_{s-2}\psi'_{n+s-2} + \cdots + \delta_0\psi'_n | = | h\lambda_s\alpha_s^n \Delta(\alpha_s) | .$$

Mais $| \psi'_n | \leqq \frac{2}{q}$ pour $n \geqq n_0$, par suite

$$| \lambda_s \alpha_s^n \Delta(\alpha_s) | \leqq | h\lambda_s \alpha_s^n \Delta(\alpha_s) | \leqq \frac{2}{q}(| \delta_0 | + \cdots + | \delta_{s-2} | + 1) .$$

Une telle inégalité est impossible quand $| \alpha_s | \geqq 1$, si nous prenons q assez grand. Tout conjugué α_σ de α vérifie donc l'inégalité $| \alpha_\sigma | < 1$, et les conditions A et B sont remplies.

Réciproquement supposons remplies les conditions A et B. Soient $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ les conjugués de α, $\lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ceux de λ dans les corps conjugués du corps de α. Soit l un entier rationnel tel que $l\lambda$ soit entier algébrique. Le nombre $w_n = l\lambda\alpha^n + l\lambda_2\alpha_2^n + \cdots + l\lambda_s\alpha_s^n$ est alors entier rationnel. Comme $|\alpha_2| < 1, \ldots, |\alpha_s| < 1$, on a $w_n = l\lambda\alpha^n - l\psi_n$ ou $\lambda\alpha^n = \frac{w_n}{l} + \psi_n$ avec $\lim_{n=\infty} \psi_n = 0$. Or $\frac{w_n}{l}$ n'a (mod 1) qu'un nombre fini de valeurs limites, d'ailleurs toutes rationnelles. Le théorème II est ainsi complètement démontré.

Pour démontrer le théorème III où l'on ne suppose plus a priori que α est algébrique, nous allons d'abord établir le lemme suivant :

Lemme 3. *Soient α et λ deux nombres réels supérieurs à 1, et posons $\lambda\alpha^n = u_n + \psi_n$. Supposons que pour tout $n \geqq 0$ on ait $|\psi_n| \leqq \frac{1}{\psi}$ avec $\psi \geqq 2e\alpha(\alpha + 1)(1 + ln\,\lambda)$, alors α et λ sont tous les deux algébriques.*

Désignons par $\frac{1}{\psi}$ une borne supérieure de tous les $|\psi_n|$ et considérons $s + 1$ entiers $a_0, a_1, \ldots, a_s$ tels que $|a_\sigma| \leqq a$ pour $\sigma = 0, 1, \ldots, s$. Posons $v_n = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_s u_{n+s}$.

1. *Si $\psi > (s + 1)(\alpha + 1)a$ et si $v_0 = 0$, alors $v_n = 0$ pour tout $n \geqq 0$.* En effet on a

$$|v_{n+1} - \alpha v_n|$$
$$= |a_0(\alpha\psi_n - \psi_{n+1}) + a_1(\alpha\psi_{n+1} - \psi_{n+2}) + \cdots + a_s(\alpha\psi_{n+s} - \psi_{n+s+1})|$$
$$\leqq (s + 1)(\alpha + 1)\, a \frac{1}{\psi} < 1 .$$

De $v_n = 0$, on déduit donc que l'entier $|v_{n+1}| < 1$ est aussi nul.

2. *Si $\psi > (s + 1)(\alpha + 1)a$, on peut trouver, quel que soit l'entier $s \geqq 1$, des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_s$ tels que $v_0 = 0$, dès que $a \geqq 2\alpha\lambda^{\frac{1}{s}} - 1$.* Formons en effet toutes les expressions $v_0' = a_0'|u_0| + a_1'|u_1| + \cdots + a_s'|u_s|$, où les a_σ' pour $\sigma = 0, 1, \ldots, s$ sont des entiers avec $0 \leqq a_\sigma' \leqq a$. Il y a $(a + 1)^{s+1}$ telles expressions. La valeur de chacune d'elles est un entier positif vérifiant

$$v_0' \leqq (s + 1)\, a\left(\lambda\alpha^s + \frac{1}{\psi}\right) < (s + 1)\, a\, \lambda\alpha^s + \frac{1}{\alpha + 1} < (s+1)\,(a+1)\,\lambda\alpha^s - 1.$$

Si donc

$$(a + 1)^{s+1} \geqq (s + 1)\,(a + 1)\,\lambda\alpha^s \tag{6}$$

deux expressions v_0' différentes auront la même valeur numérique, leur différence est donc un nombre v_0 ayant la valeur 0. Or l'inégalité (6) s'écrit $a + 1 \geqq (s+1)^{\frac{1}{s}} \lambda^{\frac{1}{s}} \alpha$, elle est vérifiée si $a + 1 \geqq 2\alpha\lambda^{\frac{1}{s}}$.

3. *Soit s l'entier défini par* $s - 1 \leqq \ln \lambda < s$, *alors* $(s+1)\lambda^{\frac{1}{s}} < e(1 + \ln \lambda)$.

Considérons en effet la droite $y_1 = \frac{x}{s} + \ln(1+s)$ et la courbe $y_2 = 1 + \ln(1+x)$, elles se coupent pour $x = s$. Pour $x = s - 1$, on a $y_1 < y_2$; donc en vertu de la concavité de la courbe y_2, l'inégalité $y_1 < y_2$ a lieu pour tout x avec $s - 1 \leqq x < s$, en particulier pour $x = \ln \lambda$.

Soient alors s l'entier défini par $s - 1 \leqq \ln \lambda < s$ et ensuite a par $a < 2\alpha\lambda^{\frac{1}{s}} \leqq a + 1$. On a donc d'après 3

$$\psi \geqq 2e\alpha(\alpha+1)(1+\ln\lambda) > 2\alpha(\alpha+1)(s+1)\lambda^{\frac{1}{s}} > (s+1)(\alpha+1)\,a\ .$$

D'après 1 et 2 on peut par suite trouver des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_s$ tels que $v_n = 0$ pour tout $n \geqq 0$. En vertu du lemme 2, α et λ sont donc algébriques, ce qui démontre le lemme 3 (le degré de α ne dépasse pas $1 + \ln \lambda$).

Démonstration du théorème III. Supposons qu'une répartition (mod 1) de la suite $\lambda\alpha^n$ n'ait que les valeurs limites irrationnelles $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ et éventuellement la valeur limite γ_0 entière. Posons $\lambda\alpha^n = u_n + \gamma_\kappa + \varepsilon_n$, $\kappa = 0, 1, \ldots, k$, alors $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$ d'après la condition 2 du théorème III. Posons encore $\beta = 2e\alpha(\alpha+1)\ln\alpha$ et soit b un entier supérieur à 4β. Soit n_0 un indice tel que l'on ait à la fois $\lambda' = \lambda\alpha^{n_0} > 1$ et $\alpha^{n_0} > e\lambda$, et que pour tout $n \geqq n_0$ on ait $|\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{(bn_0)^{k+1}}$. Nous appliquerons alors le lemme 1 avec le nombre $q = b\,n_0$; il correspond à ce nombre q un entier $h \leqq q^k$, tel qu'en posant $h\lambda\alpha^n = u_n' + \psi_n'$, on ait en vertu de (2) : $|\psi_n'| \leqq \frac{1}{q} + q^k|\varepsilon_n|$, c'est-à-dire $|\psi_n'| \leqq \frac{2}{bn_0}$ pour $n \geqq n_0$. On a donc en posant $\psi = \frac{bn_0}{2}$

$$w \geqq 2\beta\,n_0 = 2e\,\alpha\,(\alpha+1)(2n_0\ln\alpha)\ .$$

Comme $\alpha^{n_0} > e\,\lambda$, on a $n_0 \ln \alpha > 1 + \ln \lambda$ et par suite

$$\psi \geqq 2e\,\alpha\,(\alpha + 1)(1 + \ln \lambda + n_0 \ln \alpha) = 2e\,\alpha\,(\alpha + 1)(1 + \ln \lambda') \ .$$

Or $\lambda' = \lambda\alpha^{n_0} > 1$, ce qui permet d'appliquer le lemme 3 avec λ' au lieu de λ et il en résulte que α est algébrique. On est ainsi ramené au théorème II qui montre que les conditions A et B sont vérifiées.

(Reçu le 11 avril 1946.)