

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1946-1947)

Artikel: Über das Hauptnormalenbild einer Raumkurve.
Autor: Scherrer, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-17339>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über das Hauptnormalenbild einer Raumkurve

Von W. SCHERRER, Bern

„Das Hauptnormalenbild einer geschlossenen Raumkurve zerlegt die Einheitskugel in zwei flächengleiche Teile.“

Diese Behauptung findet sich in der Literatur^{1) 2) 3)}, trifft aber nicht für alle geschlossenen Kurven zu. Der zuerst von Jakobi bemerkte Zusammenhang zwischen einer geschlossenen Kurve und ihrem Hauptnormalenbild wird also durch die obige Formulierung nicht ausreichend wiedergegeben.

Der Zweck dieser Zeilen ist, die notwendige Korrektur vorzunehmen. Wie die Dinge in Wirklichkeit liegen, erfährt man, wenn man sich die Aufgabe stellt, diejenigen Raumkurven zu bestimmen, welche ein vorgegebenes Hauptnormalenbild besitzen. Diese auf den ersten Blick etwas verwickelt erscheinende Aufgabe ist explicite lösbar⁴⁾. Wir beginnen daher mit einer vereinfachten Rekapitulation dieser Lösung (§ 1), entwickeln anschließend einige Eigenschaften von Kugelkurven (§ 2), beweisen hierauf den modifizierten Satz von Jakobi (§ 3) und schließen mit einem Beispiel (§ 4).

Die notwendigen Hilfsmittel sind die Grundformeln der Theorie der Raumkurven und die Formel für die geodätische Krümmung einer Flächenkurve. Zur Erleichterung des Lesers stellen wir diese Hilfsmittel kurz zusammen.

Ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad (1)$$

eine auf einen beliebigen Parameter t bezogene Raumkurve und bezeichnet man die Ableitungen nach t durch Punkte, so sind die Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins, die Tangente \mathbf{t} , die Hauptnormale \mathbf{n} und die Binormale \mathbf{b} gegeben durch

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|}, \quad (2a)$$

$$\mathbf{n} = \frac{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}], \dot{\mathbf{x}}}{|[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]| \cdot |\dot{\mathbf{x}}|}, \quad (2b)$$

¹⁾ C. G. J. Jakobi, 1842, Werke, Bd. 7, S. 39.

²⁾ W. Blaschke, 1924, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 2. Aufl., S. 34.

³⁾ W. Scherrer, 1944, Eine Formel für die geodätische Krümmung, Commentarii Math. Helv. 16, 1, S. 101.

⁴⁾ W. Rothe, 1937, Differentialgeometrie I, S. 42 (Sammlung Göschen).

$$\mathbf{b} = \frac{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]}{|\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}|} . \quad (2c)$$

Die Bogenlänge s , die Krümmung κ und die Torsion τ berechnen sich nach den Formeln

$$s = \int_0^t |\dot{\mathbf{x}}| dt , \quad (3)$$

$$\kappa = \frac{|[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]|}{|\dot{\mathbf{x}}|^3} , \quad (4a)$$

$$\tau = \frac{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}] \ddot{\mathbf{x}}}{[\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}]^2} , \quad (4b)$$

wobei wir der Bequemlichkeit halber dem Anfangspunkt den Parameterwert $t = 0$ zugeordnet haben.

Verwendet man die Bogenlänge s als Parameter und bezeichnet man die Ableitungen nach s durch Striche, so erhält man an Stelle der angegebenen Formeln die Beziehungen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) \quad (5)$$

und

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}' , \quad (6a)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}''|} , \quad (6b)$$

$$\mathbf{b} = \frac{[\mathbf{x}', \mathbf{x}'']}{|\mathbf{x}''|} , \quad (6c)$$

sowie

$$|\mathbf{x}'| \equiv 1 , \quad (7)$$

$$\kappa = |\mathbf{x}''| , \quad (8a)$$

$$\tau = \frac{[\mathbf{x}', \mathbf{x}''] \mathbf{x}'''}{|\mathbf{x}''|^2} . \quad (8b)$$

Hieran schließen sich nun die Formeln von Frenet

$\mathbf{t}' =$	$\kappa \mathbf{n}$	$(9a)$
$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t}$	$+ \tau \mathbf{b}$	$(9b)$
$\mathbf{b}' =$	$-\tau \mathbf{n}$	$(9c)$

die den Schlüssel zur Differentialgeometrie der Raumkurven bilden. Bekanntlich lässt sich die durch (9) definierte infinitesimale Bewegung des Dreibeins darstellen als infinitesimale Drehung, deren Achse und Winkelgeschwindigkeit gegeben sind durch Richtung und Betrag des Darboux'schen Drehvektors,

$$\mathbf{d} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b} , \quad (10)$$

der also seinerseits in der durch \mathbf{t} und \mathbf{b} aufgespannten „rektifizierenden Ebene“ der Raumkurve liegt.

Ist speziell

$$\mathbf{x}(s) \equiv \mathbf{x}[u(s), v(s)] \quad (11)$$

eine auf der Fläche

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) \quad (12)$$

mit der Normalen

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]}{\|[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]\|} \quad (13)$$

verlaufende Kurve, so ist die „geodätische Krümmung“ κ_g der Kurve in bezug auf die Fläche definiert durch

$$\kappa_g = \mathbf{n}[\mathbf{x}', \mathbf{x}''] . \quad (14)$$

Das letzte Hilfsmittel, die Integralformel von Bonnet, wollen wir an der Stelle besprechen, wo wir es benötigen. Diese Integralformel bildet nämlich einen kritischen Punkt beim Beweis des Satzes von Jakobi.

§ 1. Bestimmung aller Raumkurven, die ein vorgegebenes Hauptnormalenbild besitzen.

Statt das Hauptnormalenbild als Funktion der Bogenlänge s der gesuchten Raumkurve vorzugeben, empfiehlt es sich, die folgende äquivalente Aufgabe zu lösen :

Vorgegeben wird die Hauptnormale als Funktion *ihrer* Bogenlänge σ

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\sigma) \quad (15)$$

und unabhängig davon die Bogenlänge s der gesuchten Raumkurve ebenfalls als Funktion von σ auf Grund der Festsetzungen

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\omega(\sigma)} , \quad (16)$$

und

$$s(0) = 0 . \quad (17)$$

$\omega(\sigma)$ und $n(\sigma)$ sind also willkürliche Funktionen, von denen die erste einmal stetig differenzierbar und nirgends Null, die zweite zweimal stetig differenzierbar sein muß. Überdies muß die zweite sinngemäß die Identitäten

$$(n(\sigma))^2 \equiv 1 , \quad (18)$$

$$\left(\frac{dn}{d\sigma} \right)^2 \equiv 1 \quad (19)$$

erfüllen.

Gesucht werden diejenigen Raumkurven, welche die durch (15) vorgegebene Hauptnormale und die durch (16) und (17) vorgegebene Bogenspanne besitzen.

Um zur Lösung zu gelangen, unterwerfen wir die gesuchte Raumkurve einer Analyse. Vorerst beachten wir, daß gilt

$$n' \equiv \frac{dn}{ds} = \frac{dn}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} .$$

Nach (16) und (19) folgt daher

$$| n' | = \omega(\sigma) . \quad (20)$$

Nun wenden wir uns zu den Frenetschen Formeln (9). Aus (9b) und (20) folgt

$$\kappa^2 = \kappa^2 + \tau^2 . \quad (21)$$

Weiter ergibt sich durch leichte Rechnung

$$[n, n'] = \tau t + \kappa b \equiv d \quad (22)$$

und

$$n'' + (\kappa^2 + \tau^2) n = -\kappa' t + \tau' b . \quad (23)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$[n, n'] n'' = \kappa \tau' - \tau \kappa'$$

und hieraus wegen (16), (20) und (21)

$$\left[n, \frac{dn}{d\sigma} \right] \frac{d^2 n}{d\sigma^2} = -\frac{\kappa \frac{d\tau}{d\sigma} - \tau \frac{d\kappa}{d\sigma}}{\kappa^2 + \tau^2} . \quad (24)$$

In § 3 werden wir sehen, daß diese Beziehung den Schlüsselpunkt zum Satz von Jakobi bildet. Vorerst gibt sie uns in Verbindung mit (21) Anlaß, durch den Ansatz

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \omega \cos \varphi \\ \tau &= \omega \sin \varphi \end{aligned}} \quad (25)$$

den „Nutationswinkel“

$$\varphi = \varphi(\sigma) \quad (26)$$

der Raumkurve einzuführen. Er beschreibt die Drehung, die der Darbouxsche Drehvektor \mathbf{d} innerhalb der rektifizierenden Ebene ausführt. Die Achse *dieser* Drehung ist offenbar \mathbf{n} , also senkrecht zu \mathbf{d} , weshalb man passend von einer Nutation sprechen kann. Setzt man (25) in (24) ein, so folgt

$$\left[\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} \right] \frac{d^2\mathbf{n}}{d\sigma^2} = \frac{d\varphi}{d\sigma}$$

und es ergibt sich

$$\boxed{\varphi(\sigma) - \varphi(0) = \int_0^\sigma \left[\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} \right] \frac{d^2\mathbf{n}}{d\sigma^2} d\sigma} \quad (27)$$

Nun findet man aus (9b) und (22)

$$t = \frac{-\kappa n' + \tau[n, n']}{\kappa^2 + \tau^2}$$

resp.

$$x' = \frac{-\kappa \frac{dn}{d\sigma} + \tau \left[\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} \right]}{\omega}$$

oder schließlich

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{-\cos \varphi \frac{dn}{d\sigma} + \sin \varphi \left[\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} \right]}{\omega}. \quad (28)$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (16), (17) und (27) die Lösung unserer Aufgabe in der Gestalt

$$\begin{aligned}
 \varphi(\sigma) &= \int_0^\sigma \left[\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} \right] \frac{d^2\mathbf{n}}{d\sigma^2} d\sigma , \\
 \mathbf{x}(\sigma) &= - \int_0^\sigma \left\{ \cos \varphi(\sigma) \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} + \sin \varphi(\sigma) \left[\frac{d\mathbf{n}}{d\sigma}, \mathbf{n} \right] \right\} \frac{d\sigma}{\omega(\sigma)} , \\
 s(\sigma) &= \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\omega(\sigma)} .
 \end{aligned} \tag{29}$$

Die Verifikation der Lösung überlassen wir dem Leser. Sie besteht in dem Nachweis, daß aus (29) die Gleichungen

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = - \left(\cos \varphi \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} + \sin \varphi \left[\frac{d\mathbf{n}}{d\sigma}, \mathbf{n} \right] \right)$$

und

$$\mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \omega \frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} = \omega \cos \varphi \cdot \mathbf{n}$$

folgen. Dabei ist wohl zu beachten, daß für $\mathbf{n}(\sigma)$ die Bedingungen (18) und (19) bestehen.

§ 2. Umlaufszahl und Flächeninhalt einer Kugelkurve.

Nach der Bedingung (18) kann das Hauptnormalenbild aufgefaßt werden als Kurve

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\sigma) \equiv \mathbf{n}(\sigma) \tag{30}$$

auf der Einheitskugel

$$\mathbf{y}^2 = 1 . \tag{31}$$

Bezeichnet man die geodätische Krümmung dieser Kugelkurve mit κ_γ , so liefert die Spezialisierung der Formel (14) den Wert

$$\kappa_\gamma = \mathbf{n} \left[\frac{d\mathbf{n}}{d\sigma}, \frac{d^2\mathbf{n}}{d\sigma^2} \right] . \tag{32}$$

Für den Flächeninhalt einer einfachen, geschlossenen und stetig gekrümmten Kugelkurve gilt bekanntlich die klassische Formel

$$\oint \kappa_\gamma d\sigma = 2\pi - \Omega . \tag{33}$$

wobei Ω den positiv gerechneten Flächeninhalt desjenigen Kugelteils bedeutet, der von der Kurve in positivem Sinne umlaufen wird.

Falls die Kurve Ecken hat, tritt an Stelle von (33) die Formel

$$\oint \kappa_y d\sigma + \sum_k \delta_k = 2\pi - \Omega , \quad (33a)$$

wo δ_k denjenigen Winkel absolut kleiner π darstellt, um den sich der Tangentenvektor bei Durchlaufung der k -ten Ecke dreht.

Mit der Formel (33) sind wir an der kritischen Stelle für den Beweis des Satzes von Jakobi angelangt: *Das Hauptnormalenbild einer geschlossenen Raumkurve ist wohl immer geschlossen, braucht aber nicht einfach zu sein.* Dies werden wir in § 4 durch Beispiele belegen.

Die Formel (33) ist also nicht ausreichend. Was im Falle einer geschlossenen, stetig gekrümmten, aber nicht einfachen Kurve an ihre Stelle zu treten hat, wollen wir uns nun anschaulich klar machen. Zu dem Zweck müssen wir etwas weiter ausholen.

Definition 1. Eine stetige und geschlossene Kugelkurve Γ besitzt eine „Umlaufszahl“ l , falls folgender Prozeß nach l Schritten zu Ende führt:

1. Wähle einen beliebigen Anfangspunkt P_0 auf Γ und durchlaufe von P_0 aus Γ , bis zum erstenmal ein schon durchlaufener Punkt P_1 auftritt. Nach Extinktion der entstandenen einfachen und geschlossenen Schlinge

$$\widehat{P_1 P_1} = S_1$$

verbleibt eine geschlossene Restkurve Γ_1 , die nach Schließung der Parameterlücke ebenfalls eine stetige Kurve ist.

2. Wähle auf Γ_1 den Punkt P_1 als Anfangspunkt und führe die Durchlaufung weiter bis zum erstenmal ein schon durchlaufener Punkt P_2 von Γ_1 auftritt. Nach Extinktion der entstandenen einfachen und geschlossenen Teilschlinge

$$\widehat{P_2 P_2} = S_2$$

von Γ_1 verbleibt eine geschlossene Restkurve Γ_2 von Γ_1 , die wiederum nach Schließen der Parameterlücke eine stetige Kurve ist usf.

Der Prozeß kann beim l -ten Schritt offenbar nur dann abbrechen, falls für den erstmalig auftretenden schon durchlaufenen Punkt P_l von Γ_{l-1} gilt

$$P_l = P_0 .$$

Das Schema der Aufteilung lautet dann :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_1 + S_1 \\ \Gamma_1 &= \Gamma_2 + S_2 \\ &\vdots \\ \Gamma_{l-2} &= \Gamma_{l-1} + S_{l-1} \\ \Gamma_{l-1} &= S_l.\end{aligned}$$

Über diese Umlaufzahl gilt nun

Satz 1. *Die Umlaufzahl einer stetigen und geschlossenen Kurve ist unabhängig von Anfangspunkt und Umlaufsinn.*

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für $l = 1$, — die einfache geschlossene Kurve — sind die Behauptungen evident. Bezeichnen wir nun abgekürzt die Umlaufzahl von Γ mit $U(\Gamma)$, so folgert man ohne Schwierigkeit aus der Definition 1, daß

$$U(\Gamma) = 1 + U(\Gamma_1),$$

also

$$U(\Gamma) = U(\Gamma_1) + U(S_1) \quad (34)$$

gilt. Da nun nach Induktionsvoraussetzung Satz 1 für die Umlaufzahlen $1, 2, \dots, l-1$, gilt, kann man gestützt auf (34) zeigen, daß der Satz auch für l zutrifft.

Definition 2. *Um den Flächeninhalt Ω einer stetigen und geschlossenen Kugelkurve Γ mit der Umlaufzahl l zu definieren, zerlegen wir Γ nach Definition 1 in l einfache und geschlossene Schlingen gemäß*

$$\Gamma = S_1 + S_2 + \dots + S_l$$

und treffen die Festsetzung

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_l,$$

wobei Ω_i den Flächeninhalt von S_i bedeutet.

Nun wenden wir uns wieder speziell zu den stetig gekrümmten Kugelkurven. Hier gilt einmal

Satz 2. *Jede stetig gekrümmte und geschlossene Kugelkurve Γ besitzt eine endliche Umlaufzahl l .*

Es genügt, den indirekt zu führenden Beweis in knappen Zügen anzudeuten. Wie oben wollen wir den Parameter der Bogenlänge mit σ bezeichnen. Bedeutet nun A die totale Länge der einmal durchlaufenen Kurve Γ , so ist κ_γ als stetige Funktion im abgeschlossenen Bereich $0 \leq \sigma \leq A$ beschränkt. Besitzt nun Γ keine endliche Umlaufszahl, so ergibt die in Definition 1 beschriebene Konstruktion eine nicht abbrechende Serie von Wiederkehrpunkten. $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$. Dieselbe hat mindestens einen Häufungspunkt P^* auf Γ . Wir umgeben P^* als Zentrum mit einem Kreis K^* , dessen geodätische Krümmung κ_γ^* größer ist als das Maximum von $|\kappa_\gamma|$ auf Γ . Ist nun P_k ein Punkt unserer Serie, der im Inneren von K^* liegt, so betrachten wir dasjenige Teilstück der Länge λ_k auf der Kurve Γ , das man erhält, wenn man auf Γ von P_k aus nach beiden Seiten bis zur Peripherie von K^* vorstößt. Infolge der Krümmungsverhältnisse ist ein derartiger Teilbogen λ_k immer vorhanden und aus denselben Gründen gehören zu zwei verschiedenen Teilbögen λ_{k1} und λ_{k2} vollständig getrennte Parameterintervalle. Nun existiert eine nicht abbrechende Serie von derartigen Teilbögen λ_k , die beliebig nahe an das Zentrum P^* von K^* herankommen und deren Länge daher nicht auf Null herabsinken kann. Damit aber ergibt sich der Schluß, daß die Länge von Γ keine obere Schranke hat, was offensichtlich der bekannten Tatsache widerspricht, daß eine stetig gekrümmte geschlossene Kurve eine endliche Länge hat. Satz 2 muß also richtig sein, w. z. b. w.

Nun sind wir in der Lage, die notwendige Verallgemeinerung der Formel (33) vorzunehmen.

Satz 3. *Jede stetig gekrümmte und geschlossene Kugelkurve Γ besitzt einen positiven Flächeninhalt Ω , der sich berechnet nach der Formel*

$$\oint \kappa_\gamma d\sigma = 2l\pi - \Omega , \quad (35)$$

wo l die Umlaufszahl von Γ ist.

Beweis. Da nach Satz 2 die Umlaufszahl l existiert, können wir im Sinne von Definition 1 die Zerlegung

$$\Gamma = S_1 + S_2 + \dots + S_i$$

vornehmen. Für den Flächeninhalt der i -ten Schlinge S_i erhalten wir nach (33a)

$$\oint_{S_i} \kappa_\gamma d\sigma + \sum_k \delta_{ik} = 2\pi - \Omega_i .$$

Für Ω selbst erhalten wir daher nach Definition 2

$$\oint_{\Gamma} \kappa_\gamma d\sigma + \sum_{i=1}^l (\sum_k \delta_{ik}) = 2l\pi - \Omega .$$

Durch Betrachtung der sukzessive in den einzelnen Wiederkehrpunkten paarweise auftretenden Ecken erkennt man aber leicht, daß alle Winkel zusammen sich aufheben:

$$\sum_{i=1}^l (\sum_k \delta_{ik}) = 0 .$$

Somit ergibt sich die behauptete Formel (35). Daß Ω immer positiv ist, ergibt sich aus Definition 2 zusammen mit den bei (33) und (33a) für die einfachen Kurven getroffenen Festsetzungen, w. z. b. w.

Nun folgt der für später wichtige

Satz 4. *Wird der Umlaufsinn einer stetig gekrümmten und geschlossenen Kugelkurve Γ umgekehrt, so geht ihr Flächeninhalt Ω über in den durch die Relation*

$$\Omega + \bar{\Omega} = 4l\pi \quad (36)$$

bestimmten Wert $\bar{\Omega}$.

Beweis. Bezeichnen wir mit $\bar{\kappa}_\gamma$, \bar{l} und $\bar{\Omega}$ die Größen, in welche κ_γ , l und Ω bei Umkehrung des Umlaufsinnes übergehen, so folgt aus dem Begriff der geodätischen Krümmung

$$\bar{\kappa}_\gamma = -\kappa_\gamma ,$$

und aus Satz 1

$$\bar{l} = l .$$

Die der Gleichung (35) entsprechende Formel

$$\oint \bar{\kappa}_\gamma d\sigma = 2\bar{l}\pi - \bar{\Omega}$$

zur Bestimmung von $\bar{\Omega}$ verwandelt sich daher in

$$-\oint \kappa_\gamma d\sigma = 2l\pi - \bar{\Omega} ,$$

und ihre Addition zu (35) liefert unmittelbar die Behauptung. w. z. b. w.

Da nach Satz 3 auch $\overline{\Omega}$ positiv ist, ergibt sich als Folgerung aus Satz 4

Satz 5. *Der Flächeninhalt Ω einer stetig gekrümmten geschlossenen Kugelkurve Γ genügt der Ungleichung*

$$0 < \Omega < 4l\pi , \quad (37)$$

wo l die Umlaufszahl von Γ ist.

Daß diese Grenzen exakt sind, erkennt man unmittelbar an l -mal durchlaufenen Kreisen.

Grundlegend ist natürlich noch

Satz 6. *Die Umlaufszahl l einer stetig gekrümmten geschlossenen Kugelkurve ist invariant gegenüber zweimal stetig differenzierbaren Transformationen der Kurve.*

Beweis. Unter dem Einfluß einer solchen Transformation ändern sich Ω und κ_γ stetig. Zufolge (35) ändert sich daher l nicht, w. z. b. w. Schließlich erwähne ich noch den anschaulich plausiblen

Satz 7. *Besitzt die stetig gekrümmte und geschlossene Kugelkurve Γ die Umlaufszahl l , so läßt sie sich unter Konstanthaltung ihres Flächeninhaltes Ω stetig in einen l -mal durchlaufenen Kreis verwandeln.*

Da der Satz zur Herleitung der späteren Ergebnisse nicht nötig ist, begnüge ich mich, ihn als Vermutung hinzustellen.

§ 3. Der Flächeninhalt des Hauptnormalenbildes.

Wir betrachten jetzt wiederum eine viermal stetig differenzierbare und geschlossene Raumkurve C :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) \quad (5)$$

bezogen auf die Bogenlänge s als Parameter und daneben das zugehörige Hauptnormalenbild Γ

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}''|} , \quad (6b)$$

das wir nun ebenfalls auf seine Bogenlänge

$$\sigma = \int_0^s |\mathbf{n}'| ds \quad (38)$$

beziehen:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\sigma) . \quad (15)$$

Wir übernehmen damit wieder die Bezeichnungen von § 2 und führen insbesondere noch folgende Größen ein:

$L \equiv$ Totale Länge der einmal durchlaufenen Raumkurve C ;
 $A \equiv$ Totale Länge des — eventuell mehrfach durchlaufenen — entsprechenden Hauptnormalenbildes Γ , so daß also gilt

$$A = \int_0^L |\mathbf{n}'| ds , \quad (39)$$

oder — im Sinne von (20) und (16) —

$$L = \int_0^A \frac{d\sigma}{\omega(\sigma)} . \quad (40)$$

Um den Flächeninhalt Ω des Hauptnormalenbildes zu berechnen, haben wir die Formeln (35), (32) und (24) resp. (27) zu verwenden und erhalten sukzessive

$$\begin{aligned} \Omega &= 2l\pi - \oint \kappa_\gamma d\sigma \\ &= 2l\pi - \int_0^A \left[\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{d\sigma} \right] \frac{d^2\mathbf{n}}{d\sigma^2} d\sigma \\ &= 2l\pi - [\varphi(A) - \varphi(0)] . \end{aligned} \quad (41)$$

Die zuletzt angeschriebene Differenz der φ -Werte stellt nach § 1 die totale Drehung dar, die der Darbouxsche Vektor bei einer vollen Durchlaufung der Raumkurve innerhalb der rektifizierenden Ebene ausführt. Da nach den früher getroffenen Voraussetzungen der Darbouxsche Vektor nie verschwinden soll ($\omega \neq 0$), handelt es sich um ein vollkommen bestimmtes ganzzahliges Multiplum von 2π :

$$\varphi(A) - \varphi(0) = 2n\pi . \quad (42)$$

In § 1 haben wir für φ die Bezeichnung „Nutationswinkel“ eingeführt. Entsprechend treffen wir nun

Definition 3. Die „Nutationszahl“ n einer geschlossenen Raumkurve C ist die relative Anzahl der Volldrehungen, die der Darbouxsche Vektor bei einer Durchlaufung von C innerhalb der rektifizierenden Ebene ausführt.

Durch Einsetzen von (42) in (41) erhalten wir nun den endgültigen Ausdruck für den gesuchten Flächeninhalt :

$$\Omega = 2(l - n)\pi \quad (43)$$

und damit

Satz 8. *Der Flächeninhalt Ω des Hauptnormalenbildes Γ einer geschlossenen Raumkurve C ist ein natürliches Vielfaches der halben Oberfläche der Einheitskugel.*

Dieses Vielfache ist gleich der Differenz zwischen der Umlaufszahl l des Hauptnormalenbildes und der Nutationszahl n der Raumkurve.

Verbindet man dieses Ergebnis (43) mit der Ungleichung (37) von Satz 5, so erhält man mühelos als wichtige Folgerung

$$-l < n < l \quad (44)$$

und damit

Satz 9. *Die Nutationszahl einer geschlossenen Raumkurve ist immer absolut kleiner als die Umlaufszahl des zugehörigen Hauptnormalenbildes.*

Verbindet man weiter (43) mit (36) von Satz 4, so erhält man weiter

Satz 10. *Dreht man den Umlaufssinn einer geschlossenen Raumkurve um, so wechselt ihre Nutationszahl das Vorzeichen.*

Schließlich ist noch von Bedeutung

Satz 11. *Die Nutationszahl n einer geschlossenen Raumkurve und die Umlaufszahl l des zugehörigen Hauptnormalenbildes sind invariant gegenüber viermal stetig differenzierbaren Transformationen der Raumkurve.*

Beweis. Die Behauptung über l folgt leicht aus Satz 6. Die Behauptung über n beweist man hierauf mit Hilfe der Gleichung (43) nach dem Muster des Beweises von Satz 6.

Nun wollen wir den Satz von Jakobi zu Satz 8 in Beziehung setzen. Damit der Satz von Jakobi, so wie er in der Einleitung formuliert wurde, richtig ist, sind offenbar zwei Dinge nötig. *Einmal* muß nach (43)

$$2(l - n)\pi = 2\pi \quad (45)$$

sein. Außerdem aber muß das Hauptnormalenbild den von ihm bedeckten Kugelteil *schlicht* bedecken, damit man den Schluß auf eine Restfläche gleich 2π machen darf. Dies aber bedeutet, daß

$$l = 1 \quad (45a)$$

sein muß und die erste Bedingung verwandelt sich in

$$n = 0 . \quad (45b)$$

Mit dieser Bemerkung ist aber die Allgemeingültigkeit des Satzes von Jakobi noch nicht widerlegt. Es wäre ja denkbar, daß unter allen möglichen Fällen (44) nur der Fall (45) wirklich vorkommt. Es ist daher notwendig, an konkreten Beispielen zu zeigen, daß alle Fälle (44) realisiert werden können. Dies soll im nächsten Paragraphen geschehen.

§ 4. Ein Beispiel.

Um die Frage zu entscheiden, ob das Hauptnormalenbild jeder geschlossenen Raumkurve die Einheitskugel in zwei flächengleiche Teile zerlegt, ergibt sich nun zwangsläufig folgender Weg: Man gibt sich als Hauptnormalenbilder die einfachsten Kugelkurven vor, die die Einheitskugel *nicht* halbieren und kontrolliert, ob die zugehörigen Raumkurven sämtlich ungeschlossen sind.

Wir legen daher die Einheitskugel in den Ursprung eines orthogonalen Koordinatensystems mit den Basisvektoren

$$\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3$$

und geben als Hauptnormalenbild vor die Kurve

$$\mathbf{n} = \sin \vartheta \cdot \left\{ \cos \left(\frac{\sigma}{\sin \vartheta} \right) \mathbf{e}_1 + \sin \left(\frac{\sigma}{\sin \vartheta} \right) \mathbf{e}_2 \right\} + \cos \vartheta \cdot \mathbf{e}_3 , \quad (46)$$

d. h. also den Parallelkreis mit der Poldistanz ϑ .

Offenbar ist σ die Bogenlänge dieser Kurve, wie es unseren Verabredungen von § 2 entspricht. Nun haben wir noch im Sinne der Festsetzungen (16) und (17) daselbst die Bogenlänge s der zu bestimmenden Raumkurve als Funktion von σ vorzugeben. Wir treffen zu dem Zweck die einfachste Annahme, nämlich

$$\omega = \omega(\sigma) \equiv \text{konstant}. \quad (47)$$

Die Lösung, d. h. die zugehörige Raumkurve, ergibt sich nun nach der Tafel (29) durch elementare Integrationen. Das Resultat lautet, nach Unterdrückung eines additiven konstanten Vektors

$$\varphi(\sigma) = \sigma \cotg \vartheta . \quad (48\text{a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\sigma) = & - \frac{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}}{\omega \cos \frac{\vartheta}{2}} \left\{ \cos \left(\sigma \cotg \frac{\vartheta}{2} \right) \mathbf{e}_1 + \sin \left(\sigma \cotg \frac{\vartheta}{2} \right) \mathbf{e}_2 \right\} \\ & - \frac{\cos^3 \frac{\vartheta}{2}}{\omega \sin \frac{\vartheta}{2}} \left\{ \cos \left(\sigma \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) \mathbf{e}_1 + \sin \left(\sigma \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) \mathbf{e}_2 \right\} \\ & - \frac{\sin^2 \vartheta}{\omega \cos \vartheta} \cos (\sigma \cotg \vartheta) \cdot \mathbf{e}_3 . \end{aligned} \quad (48)$$

$$s(\sigma) = \frac{\sigma}{\omega} . \quad (48\text{b})$$

Die Kurve stellt die Superposition zweier Kreisbewegungen in der Horizontalebene ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) mit einer vertikalen Cosinusschwingung dar. Wir fragen nun, ob es Winkel ϑ gibt, für welche die Kurve sich schließt. Wie man sich leicht klar macht, sind dazu notwendig und hinreichend die Bedingungen

$$\Lambda \cotg \frac{\vartheta}{2} = 2k_1 \pi , \quad (49\text{a})$$

$$\Lambda \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 2k_2 \pi , \quad (49\text{b})$$

$$\Lambda \cotg \vartheta = 2k_3 \pi , \quad (49\text{c})$$

wobei k_1, k_2, k_3 ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind und Λ die der Grundlänge L der Raumkurve im Sinne der Gleichungen (39) und (40) entsprechende Länge des Hauptnormalenbildes ist :

$$\Lambda = \omega \cdot L . \quad (50)$$

Die Zahlen k_1, k_2, k_3 erfüllen infolge der Identität

$$\cotg \vartheta \equiv \frac{1}{2} \left(\cotg \frac{\vartheta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (51)$$

die Gleichung

$$k_3 = \frac{k_1 - k_2}{2} . \quad (52)$$

Die Grundlänge λ des Hauptnormalenbildes, von der A ein ganzzahliges Multiplum sein muß, ist natürlich die Länge des Kreises (46) und somit gegeben durch

$$\frac{\lambda}{\sin \vartheta} = 2\pi$$

oder

$$\lambda = 2\pi \sin \vartheta . \quad (53)$$

Infolge der Identität

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \equiv \frac{1}{2} \left(\cotg \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (54)$$

erhalten wir aus (49a) und (49b)

$$\frac{2A}{\sin \vartheta} = 2(k_1 + k_2) \pi$$

oder

$$A = (k_1 + k_2) \pi \sin \vartheta . \quad (55)$$

Aus (53) und (55) folgt somit

$$\frac{A}{\lambda} = \frac{k_1 + k_2}{2} . \quad (56)$$

Nach Definition 1, § 2, ist dieses Verhältnis die Umlaufszahl des Hauptnormalenbildes. Daß sie ganz ist, ersieht man aus (51), denn nach dieser Gleichung sind k_1 und k_2 entweder gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade.

Wir haben also

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = l . \quad (57)$$

Die durch Definition 3, § 3 erklärte Nutationszahl erhalten wir nun nach (42), wenn wir A für σ in (48a) einsetzen :

$$2\pi n = A \cotg \vartheta . \quad (58)$$

Nach (49c) und (51) folgt daher

$$k_3 = \frac{k_1 - k_2}{2} = n . \quad (59)$$

Wir können nun die Zahlen k_1 , k_2 , k_3 durch l und n ausdrücken und erhalten an Stelle von (49) als vollständige Bedingung für die Geschlossenheit der Kurve

$$A \cotg \frac{\vartheta}{2} = 2(l+n)\pi , \quad (60\text{a})$$

$$A \tg \frac{\vartheta}{2} = 2(l-n)\pi , \quad (60\text{b})$$

$$A \cotg \vartheta = 2n \cdot \pi , \quad (60\text{c})$$

wo l und n ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind und die erste wegen $0 < \vartheta < \pi$ immer positiv ist.

Damit diese Gleichungen für vorgegebenes ϑ lösbar sind, ist notwendig, daß die zwischen ihren linken Seiten bestehenden Abhängigkeiten auch für die rechten Seiten gelten. Bei der Relation (51) ist dies der Fall. Die Relation (54) aber ergibt für die rechten Seiten von (60) die Bedingung

$$l \cos \vartheta = n .$$

Als Hauptergebnis unserer Analyse erhalten wir somit

Satz 12. *Ist das Hauptnormalenbild Γ einer Raumkurve C ein Parallelkreis mit der Poldistanz ϑ und sind außerdem die Bogenlängen von C und Γ proportional, so ist die Raumkurve C dann und nur dann geschlossen, wenn die Poldistanz ϑ die Relation*

$$\boxed{\cos \vartheta = \frac{n}{l}}$$

erfüllt, wobei l eine natürliche und n eine ganze Zahl ist.

Besitzen l und n keinen echten gemeinsamen Teiler, so ist l die Umlaufszahl von Γ und n die Nutationszahl von C .

Wir können nun leicht die Sätze 8 und 9 resp. die Beziehungen (43) und (44) des vorausgehenden Paragraphen bestätigen. Der sphärische Flächeninhalt des einfach durchlaufenen Parallelkreises ist natürlich gegeben durch

$$\Omega_0 = 2\pi(1 - \cos \vartheta) .$$

Für den Flächeninhalt des Hauptnormalenbildes — also des l -mal durchlaufenen Parallelkreises — folgt somit

$$\begin{aligned} \Omega &= l \cdot \Omega_0 \\ &= 2\pi(l - l \cos \vartheta) , \end{aligned}$$

also wegen (61)

$$\Omega = 2(l - n)\pi ,$$

d. h. (43). Weiter gilt wegen $0 < \vartheta < \pi$

$$-1 < \cos \vartheta < 1 ,$$

was in Verbindung mit (61) auf

$$-l < n < l ,$$

d. h. (44) führt.

Zusammenfassend kann man also feststellen, daß die Raumkurve durch die Forderung der Geschlossenheit eine Art „Quantisierung“ erfährt, die äußerlich der Quantisierung des Drehimpulses im Magnetfeld entspricht. Die gemeinsame Wurzel ist natürlich die Kugelsymmetrie.

Die geschlossenen Raumkurven zerfallen im Sinne von Satz 11 in getrennte Klassen, von denen jede einzelne durch ein Zahlenpaar (l, n) charakterisiert wird. Den ersten Schritt zum Nachweis dafür, daß innerhalb einer einzelnen Klasse die Raumkurven untereinander stetig zusammenhängen, würde dann Satz 7 bilden.

Zum Schluß wollen wir noch kurz die Frage nach den *Doppelpunkten* der Kurve (48) erörtern. Wie man unschwer feststellt, hat die Kurve dann und nur dann mehrfache Punkte, wenn ihre Horizontalprojektion mehrfache Punkte hat.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}}{\omega \cos \frac{\vartheta}{2}} &= A ; & \frac{\cos^3 \frac{\vartheta}{2}}{\omega \sin \frac{\vartheta}{2}} &= B \\ \cotg \frac{\vartheta}{2} &= \alpha ; & \tg \frac{\vartheta}{2} &= \beta , \end{aligned}$$

und bezeichnen wir die beiden einem Doppelpunkt entsprechenden Parameterwerte mit σ_1 und σ_2 , so erhalten wir aus der Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{x}(\sigma_2) - \mathfrak{x}(\sigma_1) = 0$$

das System

$$\begin{aligned} A [\cos(\alpha \sigma_2) - \cos(\alpha \sigma_1)] + B [\cos(\beta \sigma_2) - \cos(\beta \sigma_1)] &= 0 \\ A [\sin(\alpha \sigma_2) - \sin(\alpha \sigma_1)] + B [\sin(\beta \sigma_2) - \sin(\beta \sigma_1)] &= 0 , \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich durch elementare Rechnung als vollständige Bedingung für das Auftreten eines Doppelpunktes das System

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 + \sigma_1 &= \pi k \cdot \operatorname{tg} \vartheta \\ \frac{\sin \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right)} &= (-1)^{k-1} \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

wobei k eine ganze Zahl sein muß.

Macht man hier die Variabelntransformation

$$\sigma = l \rho \sin \vartheta \quad (63)$$

so geht (62) mit Rücksicht auf (61) über in

$$\begin{aligned} (\varrho_2 + \varrho_1) n &= \pi \cdot k \\ \frac{\sin \left[\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2} (l + n) \right]}{\sin \left[\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2} (l - n) \right]} &= (-1)^{k-1} \left(\frac{l + n}{l - n} \right)^2 \end{aligned} \quad (64)$$

Aus diesen Gleichungen kann man entnehmen, daß z. B. im Falle maximaler Nutationszahl $n = l - 1$ kein Doppelpunkt auftritt. Es handelt sich dann also um eine einfache geschlossene Raumkurve, die beim Grenzübergang $l \rightarrow \infty$, also $\vartheta \rightarrow 0$ und bei der Normierung

$$\omega \sin \frac{\vartheta}{2} = 1$$

beliebig wenig vom Einheitskreis in der Horizontalebene abweicht. Genauer gesagt, windet sich die Kurve $(l - 1)$ -mal um den Kreis vom Radius $\cos^3 \frac{\vartheta}{2}$ herum in Form einer senkrecht zur Horizontalebene plattgedrückten Schraubenlinie.

(Eingegangen den 15. März 1946.)