Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 19 (1946-1947)

Artikel: Zur Defektrelation ganzer Funktionen endlicher Ordnung.

Autor: Pfluger, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17337

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Defektrelation ganzer Funktionen endlicher Ordnung

Von A. Pfluger, Zürich

1. Die Defektrelation in der Theorie der meromorphen Funktionen besagt, daß eine in $|z|<\infty$ meromorphe Funktion nur abzählbar viele defekte Werte haben kann und daß die Summe ihrer Defekte höchstens gleich 2 ist[1]). Kann man diese Aussage verschärfen, wenn die meromorphe Funktion von endlicher Ordnung ist? Hat eventuell die Anzahl der defekten Werte eine endliche Schranke, die nur von der Ordnung abhängig ist? Für beliebige meromorphe Funktionen ist dies sicher nicht der Fall [2]). Dagegen ist die Frage für ganze Funktionen noch nicht entschieden. Die Tatsache, daß eine ganze Funktion von endlicher Ordnung ϱ höchstens 2ϱ verschiedene endliche Zielwerte besitzt [3]), läßt die Existenz einer solchen Schranke vermuten. Denn bis jetzt sind keine defekten Werte bekannt, die nicht zugleich Zielwerte wären.

Zu dieser Frage möchte ich im folgenden einen kleinen Beitrag leisten, indem ich solche ganze Funktionen von endlicher Ordnung ϱ untersuche, deren Defektsumme den Betrag 2 erreicht [4]). Es läßt sich in diesem Falle beweisen, daß es höchstens $\varrho+1$ defekte Werte (einschließlich ∞) gibt. Die Ordnung ist überdies positiv ganz und die Defekte sind (ganze) Vielfache von $\frac{1}{\varrho}$. Ich kann aber nicht zeigen, daß jeder defekte Wert zugleich ein Zielwert ist.

2. Es sei $w(z)$ eine ganze Funktion. Wir bezeichnen mit $n(r,a)$ die Anzahl ihrer a-Stellen in $|z|\leqq r$, setzen

$$N(r,a)=\int_1^r \frac{n(t,a)}{t}\,dt\,, \qquad r>1\,, \tag{2.1}$$

---

[1]) vgl. die Originalarbeit „Zur Theorie der meromorphen Funktionen" in den Acta math. 46 (1925) von *R. Nevanlinna* bzw. sein Buch „Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes". Paris 1929. Letzteres wird im folgenden mit R. N. bezeichnet. Zur Defektrelation vgl. R. N. p. 80.

[2]) R. N. p. 93.

[3]) *L. Ahlfors*, Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. Acta Acad. Aboensis. Math. et Phys. 6 (1932).

[4]) Daß ich gerade diesen extremen Fall betrachte, wird abgesehen vom Erfolgsstandpunkt auch durch die folgende „Idee" motiviert: Wenn schon bei maximaler Defektsumme 2 die Zahl der defekten Werte durch die Ordnung beschränkt ist, so wird dies a fortiori bei kleinerer Defektsumme zu erwarten sein.

und

$$m(r,a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| \dfrac{1}{w(r\,e^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi & \text{für } a \neq \infty \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| w(r\,e^{i\varphi}) \right| d\varphi & \text{für } a = \infty\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$T(r) = m(r,\infty) \tag{2.3}$$

ist die Charakteristik der ganzen Funktion $w(z)$[5]).

$$\delta(a) = 1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{N(r,a)}{T(r)}$$

heißt der Defekt des Wertes a. Nach dem ersten Hauptsatz gilt auch

$$\delta(a) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r,a)}{T(r)} \tag{2.4}$$

und daher $0 \leqslant \delta(a) \leqslant 1$. Ist $\delta(a) > 0$, so heißt a ein defekter Wert. Die ganze Funktion $w(z)$ hat ∞ als defekten Wert mit dem maximalen Defekt 1. Nach der Defektrelation ist die Menge der defekten Werte abzählbar und die Summe ihrer Defekte ist höchstens gleich 2. Daß die Defektsumme den Wert 2 erreicht, ist ein Sonderfall. Denn es gilt die schärfere Relation

$$\sum_{(a)} \delta(a) + \liminf_{r \to \infty} \frac{N_1(r)}{T(r)} \leqslant 2\ ; \tag{2.5}$$

links wird über alle defekten Werte summiert, $n_1(r)$ bezeichnet die Nullstellenzahl der Ableitung $w'(z)$ in $|z| \leqslant r$ und es ist

$$N_1(r) = \int_1^r \frac{n_1(t)}{t}\, dt\ . \tag{2.1a}$$

Gilt für eine Zahl λ bei hinreichend großem r die Ungleichung $T(r) < r^\lambda$, so ist $w(z)$ von endlicher Ordnung. Die untere Grenze ϱ dieser Zahlen λ ist die Ordnung der Funktion $w(z)$.

Der zu beweisende Satz lautet nun

Satz A. *Ist die ganze Funktion $w(z)$ von endlicher Ordnung ϱ und erreicht die Summe aller Defekte den Wert 2, so ist die Ordnung notwendig*

---

[5]) Bei meromorphen Funktionen ist noch das Glied $N(r,\infty)$ hinzuzufügen.

positiv ganz. Die Defekte sind (ganze) Vielfache von $\frac{1}{\varrho}$. *Es gibt also höchstens* $\varrho + 1$ *verschiedene defekte Werte.*

3. Wir zeigen zunächst, daß die Ordnung positiv ganz ist. Ein Spezialfall ist bekannt: Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit einem *Borel*schen Ausnahmewert ($\neq \infty$) sind von positiver ganzzahliger Ordnung. Dasselbe gilt auch, wenn ein endlicher Wert den maximalen Defekt 1 erreicht. Dies stützt sich zur Hauptsache auf folgenden Satz [6]: *Ist eine nichtganze Zahl* $\varrho > 0$ *gegeben, so existiert dazu eine Zahl* $\varkappa(\varrho) > 0$, *so daß für jede meromorphe Funktion der Ordnung* ϱ

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, a) + N(r, b)}{T(r)} \geqslant \varkappa(\varrho) \tag{3.1}$$

für jedes Zahlenpaar a, b *(einschließlich* ∞*) mit* $a \neq b$. Im Falle ganzer Funktionen ($b = \infty$) kann (3.1) durch die etwas schärfere Ungleichung ($\log M(r) \geqslant T(r)$)

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, a)}{\log M(r)} \geqslant \varkappa(\varrho) \tag{3.2}$$

ersetzt werden[1]). Hat also $a \neq \infty$ den Defekt 1, so ist ϱ ganz, der Fall $\varrho = 0$ nicht ausgeschlossen. Dies kann aber nicht eintreten, da eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$ keine endlichen defekten Werte besitzt [8]). Daraus folgt zugleich, daß eine ganze Funktion mit der Defektsumme 2 notwendig von der Ordnung $\varrho \geqslant \frac{1}{2}$ ist. Wir brauchen uns also fürderhin um den Fall $\varrho = 0$ nicht mehr zu kümmern.

Es sei nun die Defektsumme gleich 2. Die Ungleichung (2.5) liefert dann $\liminf_{r \to \infty} \frac{N_1(r)}{T(r)} = 0$. Aber daraus kann für unsere Zwecke nichts gewonnen werden. Der zweite Hauptsatz ergibt jedoch für endliche Ordnungen eine schärfere Beziehung als (2.5). Sind nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_q$ ($q \geqslant 3$) voneinander verschiedene Werte (einschließlich ∞), so ist

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) < 2T(r) - N_1(r) + S(r)$$

und zufolge der endlichen Ordnung für alle $r > 0$

$$S(r) < O(\log r) .$$

---

[6]) R. N. p. 51.

[7]) Dies ergibt sich aus dem Beweis des vorangehenden Satzes (vgl. Note 6 hievor). Das $\varkappa(\varrho)$ in (3.2) kann kleiner sein als in (3.1), ist aber noch positiv.

[8]) R. N. p. 55.

Daraus folgt nun für positive Ordnung $[\log r = o\,(T(r))]$

$$\sum_{\nu=1}^{q} \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,a_\nu)}{T(r)} + \limsup_{r\to\infty} \frac{N_1(r)}{T(r)} \leqslant 2$$

für jedes $q \geqslant 3$ und somit wegen (2.4)

$$\sum_{(a)} \delta(a) + \limsup_{r\to\infty} \frac{N_1(r)}{T(r)} \leqslant 2\ , \tag{3.3}$$

wenn über alle defekten Werte summiert wird. Diese Summe erreicht aber nach Voraussetzung den Wert 2 und es ist daher

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N_1(r)}{T(r)} = 0\ ^{9)}\ . \tag{3.4}$$

Nun ist $\log M(r) \geqslant T(r)$. Setzen wir $M_1(r) = \underset{|z|=r}{Max}\,|\,w'(z)\,|$, so folgt durch Integration sofort $M(r) - |\,w(0)\,| \leqslant r M_1(r)$ und somit

$$\log M_1(r) > [1 + o(1)] \log M(r)\ . \tag{3.5}$$

Es ist also

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N_1(r)}{\log M_1(r)} = 0\ .$$

Ein Vergleich mit (3.2) zeigt, daß die Ordnung von $w'(z)$ und damit von $w(z)$ ganzzahlig und gemäß einer frühern Bemerkung auch positiv sein muß. Damit ist der leichte Teil unserer Behauptung bewiesen. Die Defektsumme einer ganzen Funktion von nicht ganzer Ordnung ist also immer < 2. Etwas schärfer gilt noch der folgende Satz: *Ist eine nichtganze Zahl $\varrho > 0$ gegeben, so existiert dazu eine Zahl $\varkappa(\varrho) > 0$, so daß die Defektsumme jeder ganzen Funktion der Ordnung ϱ die Ungleichung*

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant 2 - \varkappa(\varrho)$$

erfüllt. Denn Funktion und Ableitung haben dieselbe Ordnung. Alles übrige ergibt sich aus (3.2), (3.3) und (3.5).

---

[9]) Hieraus kann ich aber nicht etwa schließen, daß die Nullstellen der Ableitung w' (auf welche sich N_1 bezieht) den Defekt 1 besitzen. Denn $T(r)$ ist die Charakteristik von w und es ist mir nicht bekannt, ob die Charakteristiken von w und w' asymptotisch gleich sind.

4. Um die tieferwiegende Behauptung des Satzes A zu beweisen, werden wir ausgiebig von (3.4) Gebrauch machen. (3.4) besagt, daß die Ableitung w' verhältnismäßig wenige Nullstellen besitzt. Der Prototyp für diese Situation ist die Funktion

$$w(z) = \int_0^z e^{\zeta^\varrho} d\zeta \tag{4.1}$$

von der positiven Ordnung ϱ, ein bekanntes Beispiel zur Defektrelation[10]). Hier ist

$$\log | w'(re^{i\varphi}) | = r^\varrho \cos \varrho\varphi \ . \tag{4.2}$$

In den Winkelräumen

$$W'_\nu : \quad | \varphi - 2\nu \tfrac{\Pi}{\varrho} | < \tfrac{\Pi}{2\varrho} , \qquad \nu = 0, 1, \ldots, \varrho - 1$$

ist $\cos \varrho\varphi$ positiv, dagegen negativ in den Winkelräumen

$$W''_\nu : \quad | \varphi - (2\nu + 1) \tfrac{\Pi}{\varrho} | < \tfrac{\Pi}{2\varrho} , \qquad \nu = 0, 1, \ldots, \varrho - 1 \ .$$

Es gilt nun innerhalb der

$$\left.\begin{matrix} W'_\nu \\ W''_\nu \end{matrix}\right\} \lim_{r\to\infty} w(re^{i\varphi}) = \left\{\begin{matrix} \infty , & \text{Zielwert } \infty \\ a_\nu , & \text{endliche Zielwerte}^{11}) . \end{matrix}\right.$$

Also nur die Winkelräume W'_ν liefern wesentliche Beiträge zur Charakteristik $T(r)$. Für die Defekte der $a_0, a_1, \ldots, a_{\varrho-1}$ fallen dagegen nur die W''_ν in Betracht. Jeder Winkelraum W''_ν liefert zum Defekt $\delta(a_\nu)$ einen Beitrag von der Höhe $\frac{1}{\varrho}$. Die Defektsumme erreicht also den Wert 2 und es sind genau $\varrho + 1$ verschiedene defekte Werte vorhanden, ∞ mit dem Defekt 1, die übrigen je mit dem Defekt $\frac{1}{\varrho}$[12]).

Die betrachtete Funktion (4.1) ist das Standardbeispiel für unsern Satz A sowohl in bezug auf die Behauptung als auch im Hinblick auf die Beweismethode. Es wird für das Gelingen des Beweises ausschlaggebend sein, daß wir aus (3.4) eine hinreichend genaue Kenntnis über das asymptotische Verhalten der Ableitung w' gewinnen können, etwa ein Analogon zu (4.2).

---

[10]) R. N. p. 90.

[11]) Es ist $a_\nu = e^{\frac{2\pi i\nu}{\varrho}} \int_0^\infty e^{-r^\varrho} dr \ , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \varrho - 1 \ .$

[12]) Hier ist jeder defekte Wert zugleich Zielwert.

Zur Charakterisierung dieses asymptotischen Verhaltens ist die Funktion r^ϱ für unsere Zwecke zu grob. Es ist mir auch nicht gelungen, die Charakteristik $T(r)$ als Vergleichsfunktion heranzuziehen[13]). Sie entbehrt gewisse Eigenschaften, die bei r^ϱ trivialerweise erfüllt sind. Hinreichend genaue und zugleich maniable Vergleichsfunktionen erhalten wir mit Hilfe der *präzisen Wachstumsordnung*[14]). Als solche bezeichnen wir eine Funktion $\varrho(r)$, die im Intervall $(0,\infty)$ positiv ist, Rechts- und Linksableitungen besitzt, die stückweise übereinstimmen, und welche den Bedingungen

$$\lim_{r\to\infty} \varrho(r) = \varrho > 0 \ , \qquad \lim_{r\to\infty} \varrho'(r)\, r \log r = 0 \tag{4.3}$$

genügt. Wir nennen

$$V(r) = r^{\varrho(r)}$$

eine *Vergleichsfunktion*. Für hinreichend große r ist $V(r)$ monoton wachsend und

$$V(t) = [1 + o(1)] \left(\frac{t}{r}\right)^{\varrho} \cdot V(r) \qquad (r \to \infty) \tag{4.4}$$

für $k^{-1} r \leqslant t \leqslant k\, r$ und ein beliebiges, aber festes $k > 1$. Dies ergibt sich leicht aus (4.3).

Von nun an bezeichne $w(z)$ immer eine ganze Funktion, die den Voraussetzungen des Satzes A genügt. Zu w existiert eine Funktion $V(r)$ mit

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{V(r)} = 1 \ . \tag{4.5}$$

Es ist dann w von der Ordnung ϱ, der präzisen Ordnung $\varrho(r)$ und $V(r)$ heißt eine Vergleichsfunktion zu w[15]). Aus (3.4), (4.5), (2.1a) und (4.4) folgt dann

$$n_1(r) = o\big(V(r)\big) \ . \tag{4.6}$$

Zur spätern Verwendung sei noch bemerkt, daß $V(r)$ zugleich für w' eine Vergleichsfunktion ist und daß insbesondere

---

[13]) Dies wäre sehr vorteilhaft; es könnte dann gezeigt werden, daß unter den Voraussetzungen des Satzes A jeder defekte Wert zugleich Zielwert ist.

[14]) vgl. *G. Valiron*, Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse 1923, p. 46.

[15]) *G. Valiron* hat bewiesen, daß zu jeder ganzen Funktion positiver endlicher Ordnung eine präzise Ordnung gehört. Vgl. Note 14 hievor.

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_1(r)}{V(r)} = 1 \ . \tag{4.7}$$

Denn aus der *Cauchy*schen Integralformel für w' (aus w) folgt $M_1(r) \leqslant M(r+1)$ und daraus wegen (4.4) und (4.5) $\log M_1(r) < [1+o(1)]\,V(r)$. Der Rest ergibt sich aus (3.5).

5. *Das asymptotische Verhalten von w' und w.* Den nötigen Aufschluß über das Verhalten von w' gewinnen wir aus dem nachfolgenden Satz B, der in einer frühern Arbeit bewiesen wurde und von dem wir nur einen besonders einfachen Spezialfall benützen werden [16]).

Satz B. *Die Ordnung der ganzen Funktion $G(z)$ sei positiv und ganz. Die (von null verschiedenen) Nullstellen $z_1, z_2, \ldots$ seien meßbar bezüglich einem $V(r)$ (von der Ordnung ϱ) und $N(\varphi)$ sei ihre Maßfunktion. Dann ist*

$$\frac{\log|G(re^{i\varphi})|}{V(r)} = h(\varphi) + \Re\left[\overline{C}\left(\pi i - \frac{1}{\varrho}\right) + \frac{r^\varrho \overline{T(r)}}{V(r)}\right] e^{i\varrho\varphi} + \varepsilon(r,\varphi) \ ,$$

wobei

$$h(\varphi) = -\int_0^{2\pi} \theta \sin\varrho\,\theta \cdot dN(\varphi+\theta) \ , \quad C = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi\theta} dN(\theta) \ ,$$

$$\varrho T(r) = \begin{cases} \bar{c}_\varrho + \sum\limits_{|z_\nu| \leqslant r} \bar{z}_\nu^{-\varrho} & \text{(Geschlecht } \varrho) \\ \sum\limits_{|z_\nu| > r} \bar{z}_\nu^{-\varrho} & \text{(Geschlecht } \varrho - 1) \end{cases}$$

gesetzt wird und für $r \to \infty$ die Ungleichungen

$\varepsilon(r,\varphi) < o(1)$ *gleichmäßig im ganzen Intervall* $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ *und*
$\varepsilon(r,\varphi) > o(1)$ *auf Teilmengen, die von r abhängen, deren Maß aber beliebig nahe bei 2π liegt, gültig sind.*

Es sei nun $G(z) = w'(z)$ und $V(r)$ die zu w gehörige Vergleichsfunktion. Wegen (4.6) ist $N(\varphi) \equiv 0$ und daher auch $h(\varphi) \equiv 0$ und $C = 0$. Wir setzen

$$P(r) = \frac{r^\varrho T(r)}{V(r)} \ , \quad |P(r)| = A(r) \ , \quad \arg P(r) = \alpha(r) \ , \tag{5.1}$$

$$H(r,\varphi) = \Re\left(\overline{P(r)} e^{i\varrho\varphi}\right) = A(r)\cos\big(\varrho\varphi - \alpha(r)\big) \ . \tag{5.2}$$

---

[16]) Über ganze Funktionen ganzer Ordnung. Comm. Math. Helv. 18 (1946), p. 177—203; insbesondere Satz 3, p. 197. Der oben benützte Spezialfall könnte auf wenigen Seiten bewiesen werden. Den Spezialfall $\varrho(r) =$ konst. bewies *M. L. Cartwright* (Proc. London Math. Soc. (2) 33 (1932), p. 209—224).

Dann folgt aus Satz B

$$\log |w'(re^{i\varphi})| < (H(r,\varphi) + \varepsilon(r))\, V(r)\ , \qquad \lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0 \tag{5.3}$$

und $\log M_1(r) = (A(r) + o(1))V(r)$. Letzteres ergibt in Verbindung mit (4.7) $\limsup_{r\to\infty} A(r) = 1$. Die Schwankungen von $H(r,\varphi)$ werden bei festem φ und $r\to\infty$ sehr klein. Um dies zu zeigen, wählen wir ein festes $k>1$ und $r \leqslant t \leqslant kr$. Dann ist wegen (5.1) und (5.2)

$$\begin{aligned} |H(t,\varphi) - H(r,\varphi)| &= R\left(\overline{P(t)} - \overline{P(r)}\right) e^{i\varrho\varphi}| \leqslant |P(t) - P(r)| \\ &\leqslant \left|\left(\frac{t^\varrho}{V(t)} - \frac{r^\varrho}{V(r)}\right) T(r)\right| + \frac{t^\varrho}{V(t)}\left|T(t) - T(r)\right| . \end{aligned}$$

Gemäß (4.4) ist $\dfrac{t^\varrho}{V(t)} - \dfrac{r^\varrho}{V(r)} = o(1)\dfrac{r^\varrho}{V(r)}$, aus der Definition von $T(r)$ (Satz B) und aus (4.6) folgt $T(t) - T(r) = \dfrac{1}{\varrho}\cdot\dfrac{o(1)V(t)}{r^\varrho}$ und daher $P(t) - P(r) = o(1)\left(A(r) + \dfrac{k^\varrho}{\varrho}\right) = o(1)$. Es ist also $|H(t,\varphi) - H(r,\varphi)| < \eta(r,k)$ für $k^{-1}r \leqslant t \leqslant kr$ mit $\lim_{r\to\infty}\eta(r,k) = 0$ bei beliebigem, aber festem $k>0$. Schließlich kann man durch kleine Abänderungen von $A(r)$, ohne dadurch (5.3) zu stören, immer erreichen, daß für $r>0$ auch $A(r)>0$ ist. Zusammenfassend erhalten wir

Lemma 1. *Es ist*

$$\log |w'(re^{i\varphi})| < (H(r,\varphi) + \varepsilon(r))\, V(r)\ , \qquad \lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0\ ,$$

wobei $H(r,\varphi)$ *den folgenden 3 Bedingungen genügt*

1. $H(r,\varphi) = A(r)\cos(\varrho\varphi - \alpha(r))\ , \qquad A(r)>0\ ,$
2. $\limsup_{r\to\infty} A(r) = 1\ ,$
3. $|H(t,\varphi) - H(r,\varphi)| < \eta(r,k)$ *für* $rk^{-1} \leqslant t \leqslant kr$ *mit* $\lim_{r\to\infty}\eta(r,k) = 0$ *bei festem* $k>1$.

Aus dem vorangehenden Lemma ergibt sich sofort eine Majorante für $|w|$. Durch Integration folgt zunächst für ein positives $\lambda<1$

$$| w(re^{i\varphi}) | \leqslant M(\lambda r) + \int_{\lambda r}^{r} | w'(te^{i\varphi}) | \, dt \; . \tag{5.4}$$

Bei festem λ ergeben (4.4) und (4.5)

$$\log M(\lambda r) < \big(\lambda^{\varrho} + \varepsilon(r, \lambda)\big) V(r) \; ^{17)} \; . \tag{5.5}$$

Anderseits ist $V(r)$ monoton wachsend für hinreichend große r und daher nach Lemma 1 (insbesondere Bedingung 3 mit $k = \lambda^{-1}$)

$$\log | w'(te^{i\varphi}) | < \big(H(r, \varphi) + \eta(r, \lambda^{-1}) + \varepsilon(r, \lambda)\big) V(r) \tag{5.6}$$

für $\lambda r \leqslant t \leqslant r$. Nun lassen wir mit r auch $k = \lambda^{-1}$ hinreichend langsam gegen ∞ gehen, so daß noch $r\lambda \to \infty$, aber $\eta(r, \lambda^{-1}) \to 0$ und $\varepsilon(r, \lambda) \to 0$ gehen. Beachten wir ferner, daß $\log r = o\big(V(r)\big)$, so wird wegen (5.5) und (5.6) aus (5.4)

$$| w(re^{i\varphi}) | < e^{\varepsilon(r) V(r)} + e^{(H(r,\varphi) + \varepsilon(r)) V(r)}$$

oder

$$\log | w(re^{i\varphi}) | < \big(\overset{+}{H}(r, \varphi) + \varepsilon(r)\big) V(r), \qquad r > 0 \; .$$

Daraus folgt

Lemma 2. *Für jede Konstante a gilt*

$$\log | w(re^{i\varphi}) - a | < \big(\overset{+}{H}(r, \varphi) + \varepsilon(r, a)\big) V(r) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{r \to \infty} \varepsilon(r, a) = 0 \; .$$

6. *Berechnung der Charakteristik.*

Hiefür bietet Lemma 2 einen Ansatz. Wir benötigen aber noch eine Abschätzung in der andern Richtung. Aus (4.6) und der *Jensen*schen Formel folgt

$$\int_0^{2\pi} \log | w'(re^{i\varphi}) | \, d\varphi = o\big(V(r)\big)$$

und daraus in Verbindung mit Lemma 1

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log | w'(re^{i\varphi}) | \, d\varphi = \Big[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} H(r, \varphi) \, d\varphi + o(1) \Big] V(r) \; , \quad r > 0 \; , \tag{6.1}$$

---

[17]) $\varepsilon(r)$ und $\varepsilon(r, \lambda)$ bezeichnen im folgenden immer Größen, die nur von r bzw. r und λ abhängen und die mit $r \to \infty$ (bei festem λ) gegen Null streben. Neu auftretende Größen dieser Art werden nicht durch besondere Bezeichnung von den alten unterschieden.

für 2 beliebige Winkel φ_1 und φ_2. Der Satz über die logarithmische Ableitung (2. Hauptsatz) speziell bei endlicher Ordnung[18]) liefert bei beliebiger Konstante a die Abschätzung

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| \frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi < O(\log r) \ , \quad r > 0 \ .$$

Hieraus folgt wegen (6.1) und $\overset{+}{\log} \left| \frac{w'}{w-a} \right| \geqslant \log |w'| - \log |w-a|$

Lemma 3. *Für jede Konstante a und für irgend 2 Winkel φ_1 und φ_2 $(>\varphi_1)$ gilt*

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log |w(re^{i\varphi}) - a| \, d\varphi > \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} H(r, \varphi) \, d\varphi - o(1) \right] V(r) \ , \quad r > 0 \ .$$

Nun zerlegen wir das Intervall $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ in Teilintervalle oder, was für unsere Zwecke geeigneter ist, wir zerlegen die Peripherie des Einheitskreises $(z = e^{i\varphi})$ in Teilbogen. Die Zerlegung ist von r abhängig. Zufolge (5.2) gibt es nämlich für jedes r genau ϱ getrennte Kreisbogen $\alpha_1^r, \alpha_2^r, \ldots, \alpha_\varrho^r$, je von der Länge $\frac{\pi}{\varrho}$, auf welchen $H(r, \varphi) \leqslant 0$, und analog ϱ Kreisbogen $\beta_1^r, \beta_2^r, \ldots, \beta_\varrho^r$, auf denen $H(r, \varphi) \geqslant 0$ ist. Die Reihenfolge der Bogen α_ν^r bzw. β_ν^r spielt noch keine Rolle.

Gemäß Lemma 2 gilt

$$\overset{+}{\log} |w(re^{i\varphi}) - a| = o\big(V(r)\big) \tag{6.2}$$

auf den Bogen α_ν^r. Diese liefern also keinen wesentlichen Beitrag zur Charakteristik. Anderseits folgt aus Lemma 2 und Lemma 3 für die Bogen β_ν^r

$$\begin{aligned} \int_{\beta_\nu^r} \log |w(r\,e^{i\varphi}) - a| \, d\varphi &= \int_{\beta_\nu^r} \overset{+}{\log} |w(r\,e^{i}\varphi) - a| \, d\varphi + o(V(r)) \\ &= \left[\int_{\beta_\nu^r} H(r, \varphi) \, d\varphi + o(1) \right] V(r) = \left[\frac{2A(r)}{\varrho} + o(1) \right] V(r) \ . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dies liefert zunächst

---

[18]) R. N. p. 63.

$$\int_{\beta_\nu^r} \overset{-}{\log} \mid w(re^{i\varphi}) - a \mid d\varphi = o\big(V(r)\big) \mid \,, \quad r > 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \varrho \,. \tag{6.4}$$

Wird in (6.3) $a = 0$ gesetzt und über alle Bogen β_ν^r summiert, so folgt in Verbindung mit (2.3)

$$T(r) = \left[\frac{A(r)}{\pi} + o(1)\right] V(r) \,, \quad r > 0 \,. \tag{6.5}$$

7. *Berechnung der Defekte.*

∞ hat den Defekt 1. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, sollen sich im folgenden die Defekte immer nur auf endliche Werte beziehen. Gemäß der Bedingung 2 des Lemmas 1 wählen wir eine feste Folge $0 < r_1 < r_2 < \cdots, r_n \to \infty$, auf der $A(r)$ größer ist als eine feste positive Zahl, z. B.

$$A(r_n) > \tfrac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots \,. \tag{7.1}$$

Die zu r_n gehörigen Bogen α_ν und β_ν bezeichnen wir jetzt mit $\alpha_\nu^{(n)}$ und $\beta_\nu^{(n)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \varrho)$. Nun ist nach (7.1), (6.5) und (6.4)

$$\int_{\beta_\nu^{(n)}} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{w(r_n e^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi = o\big(T(r_n)\big) \,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \varrho \,. \tag{7.2}$$

Es wird sich nachträglich herausstellen, worauf (7.2) schon hinweist, daß nämlich die Bogen $\beta_\nu^{(n)}$ für die Berechnung der Defekte belanglos sind. Setzen wir

$$D_\nu^n = \frac{1}{T(r_n)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_\nu^{(n)}} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{w(r_n e^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi \,, \quad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \ldots, \varrho \,, \\ r = 1, 2, \ldots \,, \end{array} \tag{7.3}$$

so ist nach (2.2), (2.4), und (7.2)

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{\varrho} D_\nu^n \geqslant \delta(a) \,. \tag{7.4}$$

Zur gewählten Folge $\{r_n\}$ geben wir nun ein Verfahren an, das zu jedem defekten Wert a eindeutig eine ganze Zahl $k (1 \leqslant k \leqslant \varrho)$ und für jedes n eindeutig eine Gruppe von k Bogen $\alpha_\nu^{(n)}$ zuordnet. Wir nennen k die Multiplizität des defekten Wertes a und bezeichnen die zu a und n gehörige Gruppe der $\alpha_\nu^{(n)}$ mit $A_1^n, A_2^n, \ldots, A_k^n$. Es wird sich zeigen, daß

sowohl die Multiplizität k wie auch die Folge der Gruppen $(A_1^n, A_2^n, \ldots, A_k^n)$ zum Defekt des Wertes a in engster Beziehung steht.

Nun zur Konstruktion. Es sei a ein defekter Wert, also $\delta(a) > 0$. Für jedes n ordnen wir die D_ν^n der Größe nach an — das größte an erster Stelle — und numerieren um, wenn es nötig ist auch die Bogen $\alpha_\nu^{(n)}$. Es gelte also für jedes n

$$\begin{array}{c} \alpha_1^{(n)}, \quad \alpha_2^{(n)}, \quad \ldots, \quad \alpha_\varrho^{(n)} \\ D_1^n \geqslant D_2^n \geqslant \ldots \geqslant D_\varrho^n \geqslant 0 \ , \end{array} \tag{7.5}$$

wobei entsprechende Elemente in gleicher Kolonne stehen. Wir setzen $\liminf\limits_{n \to \infty} D_\nu^n = d_\nu$ und erhalten

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_\varrho \geqslant 0 \ . \tag{7.6}$$

Wegen (7.4) ist sicher $d_1 > 0$. Die Nummer der letzten nicht verschwindenden Zahl in der Folge (7.6) bezeichnen wir mit $k (d_k > 0, d_{k+1} = 0)$. Dies ist die Multiplizität des defekten Wertes a. $(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_k^{(n)})$ ist die zu a und n gehörige Gruppe, die wir mit $(A_1^n, A_2^n, \ldots, A_k^n)$ bezeichnet haben.

Gemäß (7.3), (7.5), (7.6), (6.5), (6.2) und (7.1) gilt nun offenbar für $\nu = 1, 2, \ldots, k$

$$\int\limits_{A_\nu^n} \log | w(r_n e^{i\varphi}) - a | \, d\varphi < -\big(2\pi d_k - o(1)\big) T(r_n) < -\big(d_k - o(1)\big) V(r_n) \ , \qquad d_k > 0 \ . \tag{7.7}$$

Daraus folgt, daß innerhalb der Bogen A_ν^n $w(r_n e^{i\varphi})$ gegen a strebt für $n \to \infty$; insbesondere gilt

$$\lim_{n \to \infty} w(r_n e^{i\varphi_\nu^{(n)}}) = a \ , \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k \ , \tag{7.8}$$

wenn wir mit $\varphi_\nu^{(n)}$ die Mitte des Bogens A_ν^n bezeichnen. Zufolge Lemma 3 ist nämlich für jedes φ und $\eta > 0$

$$\int\limits_{\varphi}^{\varphi + \eta} \log | w(r e^{i\varphi}) - a | \, d\varphi > -\eta \big(A(r) + \varepsilon(r)\big) V(r) \ .$$

$\overline{A}_\nu^n$ bezeichne den Teilbogen

$$| \varphi - \varphi_\nu^{(n)} | \leqslant \frac{\pi}{2\varrho} - \eta, \qquad 0 < \eta < \operatorname{Min}\left(\frac{\pi}{4\varrho}, \frac{d_k}{4}\right) ,$$

dann wird aus (7.7)

$$\int_{\overline{A}_\nu^n} \log | w(r_n e^{i\varphi}) - a | \, d\varphi < -\left(\tfrac{1}{2} d_k - o(1)\right) V(r_n) \; .$$

Also existiert in $\overline{A}_\nu^n$ ein Φ_ν^n mit

$$\lim_{n \to \infty} w(r_n e^{i\Phi_\nu^n}) = a \; , \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k \; . \tag{7.9}$$

Anderseits ist

$$w(re^{i\varphi}) - w(re^{i\Phi}) = i \int_{\Phi}^{\varphi} w'(re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta$$

und daher gemäß Lemma 1 und (7.1) auf $\overline{A}_\nu^n$

$$|w(r_n e^{i\varphi}) - w(r_n e^{i\Phi_\nu^n})| < \frac{\pi}{\varrho} \cdot r \cdot e^{\left(-\frac{1}{2} d_k + o(1)\right) V(r_n)} \; .$$

Da die rechte Seite gegen Null strebt, folgt aus (7.9) die Behauptung (7.8).

Wir sehen also, daß zu jedem defekten Wert a und jedem n eine Gruppe $(A_1^n, A_2^n, \ldots, A_k^n)$ der Bogen $\alpha_\nu^{(n)}$ existiert, auf deren Mitten $\varphi_\nu^{(n)}$ die Beziehung (7.8) erfüllt ist. Es sei nun b irgendein anderer defekter Wert $(b \neq a)$, l seine Multiplizität und $(B_1^n, B_2^n, \ldots, B_l^n)$ die zu b und n gehörige Gruppe der $\alpha_\nu^{(n)}$. Dann haben die beiden Gruppen $(A_1^n, A_2^n, \ldots, A_k^n)$ und $(B_1^n, B_2^n, \ldots, B_l^n)$ für alle n von einem gewissen n_0 an keinen Bogen gemeinsam. Denn sonst müßte $a = b$ sein, weil für die Mitten der B_ν^n eine zu (7.8) entsprechende Beziehung mit b an Stelle von a gilt. Es seien nun

a_1 ,	a_2 ,	a_3 ,	...	die defekten Werte,
k_1 ,	k_2 ,	k_3 ,	...	ihre Multiplizitäten und
$(A_\nu^n)_1$,	$(A_\nu^n)_2$,	$(A_\nu^n)_3$,	...	die zugehörigen Gruppen der $\alpha_\nu^{(n)}$.

Irgend zwei Gruppen $(A_\nu^n)_i$ und $(A_\nu^n)_j$ $(i \neq j)$ haben für alle hinreichend großen n kein gemeinsames Element. Die Anzahl der $\alpha_\nu^{(n)}$ ist aber für jedes n gleich ϱ und deshalb die Anzahl der defekten Werte $(\neq \infty)$ höchstens gleich ϱ. Bezeichnet p ihre genaue Anzahl, so gilt

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_p \leqslant \varrho \; . \tag{7.10}$$

Weiter erfüllt jeder defekte Wert a mit der Multiplizität k die Ungleichung

$$\delta(a) \leqslant \frac{k}{\varrho} \; . \tag{7.11}$$

Denn es folgt aus Lemma 3 und (6.2)

$$\int\limits_{\alpha_\nu^{(n)}} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w(r_n e^{i\varphi}) - a}\right| d\varphi < \left[-\int\limits_{\alpha_\nu^{(n)}} H(r_n, \varphi)\, d\varphi + o(1)\right] V(r_n)$$

$$= \left(\frac{2A(r_n)}{\varrho} + o(1)\right) V(r_n)$$

und somit aus (7.3) wegen (6.5) und (7.1)

$$\limsup_{n\to\infty} D_\nu^n \leqslant \frac{1}{\varrho}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \varrho\,. \tag{7.12}$$

Wir dürfen annehmen, daß $k < \varrho$ ist. Denn für $k = \varrho$ folgt (7.11) unmittelbar aus (7.12) und (7.4). Dann existiert eine Teilfolge $\{n_j\}$, so daß $\lim\limits_{j\to\infty} D_\nu^{n_j} = 0$ für $\nu = k + 1$ und somit wegen (7.5) auch für $\nu = k + 2, k + 3, \ldots, \varrho$. Es ist also

$$\frac{k}{\varrho} \geqslant \sum_{\nu=1}^{k} \limsup_{j\to\infty} D_\nu^{n_j} \geqslant \liminf_{j\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\varrho} D_\nu^{n_j} \geqslant \delta(a)\,.$$

Allein aus der Bedingung (4.6) (und endliche Ordnung) haben wir zeigen können, daß für alle defekten Werte ihre Multiplizitäten und Defekte den Ungleichungen (7.10) und (7.11) genügen. Nun benützen wir noch einmal, daß die Summe aller Defekte den Wert 2 erreicht bzw. die Defektsumme aller $a \neq \infty$ gleich 1 ist. Dies liefert nämlich in Verbindung mit (7.10) und (7.11) die Bedingung

$$1 = \sum_{i=1}^{p} \delta(a_i) \leqslant \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_p}{\varrho} \leqslant 1\,,$$

welche nur möglich ist, wenn sowohl

$$\delta(a_i) = \frac{k_i}{\varrho}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

als auch

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_p = \varrho$$

ist. Damit ist Satz A bewiesen.

(Eingegangen den 12. März 1946.)