Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Sulla intersezione di due o più varietà algebriche.
Autor: Longhi, Ambrogio
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16893

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sulla intersezione di due o più varietà algebriche

Di Ambrogio Longhi, Lugano

Ad Andreas Speiser nel suo 60° compleanno.

1. In una Memoria del 1902 il *Fano*[1]) introduce per ogni congruenza di rette dello spazio S_3 a tre dimensioni, accanto all'ordine, alla classe e al rango, un quarto carattere, che, con denominazione suggerita da *C. Segre*, chiama *genere sezionale* della congruenza come pure della superficie immagine di essa sulla quadrica di S_5 rappresentativa delle rette di S_3: perchè il carattere suddetto non è altro che il genere delle sezioni iperpiane di tale superficie.

Estendendo la denominazione del *Segre*, definisco come *genere sezionale* di una varietà algebrica di dimensione $\varrho > 1$ e appartenente ad uno spazio lineare S_r ad r dimensioni, il genere della curva ottenuta segandola con un generico spazio $S_{r-\varrho+1}$.

Dati allora gli ordini e i generi sezionali di due o più varietà, dotate di singolarità qualunque ma in posizione mutua generica e aventi per completa intersezione una varietà V_k di dimensione $k > 0$, è possibile determinare, per questa V_k, il genere se $k = 1$, o il genere sezionale se $k > 1$: e dalla formula stabilita a tale scopo deduco, fra altro, un teorema generale sulla riducibilità di V_k ed alcune proprietà delle curve intersezioni di varietà costituite da ∞^1 spazi.

2. Si considerino dapprima, in S_r, due sole varietà $V_{k_1}^{n_1}$ e $V_{k_2}^{n_2}$: di dimensioni k_1, k_2 abbastanza elevate così che risulti $k_1 + k_2 > r$; di ordini n_1, n_2; di generi sezionali (n. 1) p_1, p_2; dotate di singolarità qualsiansi, ma in posizione generica; e quindi segantisi in una $V_k^{n_1 n_2}$ d'ordine $n_1 n_2$ e di dimensione $k = k_1 + k_2 - r \geqslant 1$.

Se ϱ_i è il primo ceto (eguale alla prima classe) di $V_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2)$, cioè[2]) l'ordine della varietà V_{k_i-1} costituita dai punti di contatto degli S_{k_i} tangenti a $V_{k_i}^{n_i}$ e appoggiantisi ad un dato S_{r-k_i-1}, la curva Γ_i, sezione di $V_{k_i}^{n_i}$ con uno spazio S_{r-k_i+1} condotto per l'S_{r-k_i-1}, incontra la V_{k_i-1} in ϱ_i punti: quelli di contatto delle rette tangenti a Γ_i e incidenti ad S_{r-k_i-1}. Ne segue che ϱ_i è pure il primo rango di Γ_i $(i = 1, 2)$.

---

[1]) *G. Fano*, Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 51 (2), 1902], n. 2.

[2]) *F. Severi*, Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettivi [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 52 (2), 1903], n. 1.

Analogamente si vede che il primo ceto ϱ della varietà $V_k^{n_1 n_2}$ eguaglia il primo rango della curva, Γ, traccia di $V_k^{n_1 n_2}$ sopra un generico spazio S_{r-k+1} (Γ non differendo da $V_k^{n_1 n_2}$ quando $k = 1$).

Per un teorema del *Severi* sui ceti della intersezione di più varietà[3]), si ha ora la relazione:

$$\varrho = n_1 \varrho_2 + n_2 \varrho_1 \,. \tag{1}$$

D'altra parte, i ceti $\varrho_1, \varrho_2, \varrho$ sono facilmente esprimibili (giusta quanto precede) come ranghi delle curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$: di rispettivi ordini $n_1, n_2, n_1 n_2$ e generi p_1, p_2, p.

Sulla varietà $V_{k_i}^{n_i}$, fra singolarità di ogni altra specie, si suppongano perciò esistere ω_i varietà di dimensione $k_i - 1$, tali che una qualunque $V_{k_i-1}^{\mu_{ij}}$ di esse, d'ordine μ_{ij}, venga segata da ogni varietà algebrica di dimensione $r - k_i + 1$, e genericamente posta rispetto a $V_{k_i}^{n_i}$, in punti origini ciascuno di un ramo d'ordine $\alpha_{ij} > 1$ della curva comune alla varietà stessa e a $V_{k_i}^{n_i}$ ($j = 1, 2, \ldots, \omega_i$; $i = 1, 2$).

Il primo rango ϱ_i della curva Γ_i è pertanto calcolabile con la formula:

$$\varrho_i = 2(n_i + p_i - 1) - \sum_{j=1}^{\omega_i} \mu_{ij}(\alpha_{ij} - 1) \qquad (i = 1, 2) \,. \tag{2}$$

La curva Γ, già definita (se $k > 1$) come sezione della varietà $V_k^{n_1 n_2}$ con uno spazio S_{r-k+1}, può altresì ottenersi intersecando $V_{k_i}^{n_i}$ con una varietà di dimensione $r - k_i + 1$: la $V_{r-k_i+1}^{m_i}$, d'ordine $m_i = n_1 n_2 : n_i$, sezione del suddetto S_{r-k+1} con quella delle due varietà $V_{k_1}^{n_1}$, $V_{k_2}^{n_2}$ che è diversa dalla $V_{k_i}^{n_i}$ considerata.

Ne deriva che, sopra Γ, ciascuno degli $m_i \mu_{ij}$ punti d'incontro di $V_{r-k_i+1}^{m_i}$ con la $V_{k_i-1}^{\mu_{ij}}$ singolare appartenente a $V_{k_i}^{n_i}$, è origine di un ramo d'ordine α_{ij}: nè esistono su Γ altri punti origini di rami superlineari, attesa la mutua posizione generica delle $V_{k_1}^{n_1}$, $V_{k_2}^{n_2}$.

Si ha dunque, pel primo rango ϱ di Γ, l'espressione:

$$\varrho = 2(n_1 n_2 + p - 1) - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{\omega_i} \frac{n_1 n_2}{n_i} \mu_{ij}(\alpha_{ij} - 1) \,. \tag{3}$$

Dalla (1), tenuto conto delle (2) e (3), si trae allora:

$$p = (n_1 - 1)(n_2 - 1) + n_1 p_2 + n_2 p_1 \,; \tag{4}$$

---

[3]) *F. Severi*, loc. cit., n. 13.

ed è con ciò risolta la questione proposta nel caso di due varietà. Infatti la formula (4) fornisce il genere p (se $k = 1$), ovvero (se $k > 1$) il genere sezionale p (n. 1), della varietà $V_k^{n_1 n_2}$ (di dimensione $k > 0$) comune a due qualsiansi varietà genericamente situate, di ordini n_1, n_2 e di generi sezionali p_1, p_2.

3. Prima di passare a stabilire la formula più generale, giova soffermarsi alquanto su alcune conseguenze della (4).

Anzitutto, il genere di una V_k luogo di ∞^1 spazi S_{k-1} non differendo dal suo genere sezionale (n. 1), come caso particolare della proposizione del n. 2 si ha l'altra[4]):

In uno spazio S_r, due varietà $V_{k_1}^{n_1}$ e $V_{k_2}^{n_2}$, costituite ciascuna da ∞^1 spazi S_{k_1-1} ed S_{k_2-1}, di rispettivi generi p_1 e p_2, e dotate di singolarità qualsiansi, se sono in posizione generica ed è $k_1 + k_2 = r + 1$, si intersecano in una curva $V_1^{n_1 n_2}$ il cui genere p viene espresso dalla formula (4).

E poichè tale curva $V_1^{n_1 n_2}$ è evidentemente sostegno di due involuzioni $\gamma_{n_1}^1$, $\gamma_{n_2}^1$ (segnatevi dagli spazi generatori delle varietà $V_{k_i}^{n_i}$) di generi p_2 e p_1, in virtù di un teorema del *Castelnuovo*[5]) l'eguaglianza (4) prova che:

Gli spazi generatori delle varietà suddette $V_{k_1}^{n_1}$ e $V_{k_2}^{n_2}$, i quali sono rispettivamente n_2-secanti ed n_1-secanti per la curva $V_1^{n_1 n_2}$, hanno la proprietà che i gruppi degli $n_1 n_2$ punti di appoggio con $V_1^{n_1 n_2}$ di tutti gli spazi di una passanti pei punti di appoggio di uno spazio variabile dell'altra, sono fra loro equivalenti.

Fatta poi l'ipotesi che le $V_{k_i}^{n_i}$ siano, come totalità ∞^1 di spazi, birazionalmente equivalenti, onde $p_1 = p_2 = \pi$, lo stesso accade delle due involuzioni $\gamma_{n_1}^1$, $\gamma_{n_2}^1$ subordinate su $V_1^{n_1 n_2}$: ed allora[6]) la corrispondenza (n_1, n_2) composta con tali involuzioni riesce certo singolare appena sia $\pi \geqslant 1$. Pertanto:

---

[4]) Che è una prima estensione di un noto risultato sulla intersezione di due rigate algebriche dello spazio ordinario: *F. Amodeo*, Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali ... [Annali di Matematica, 20 (2), 1892, p. 235]. — Per una ulteriore estensione vedasi il n. 5.

[5]) *G. Castelnuovo*, Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 15 (5), 1906, p. 342]. Cfr. anche: *L. Berzolari*, Algebraische Transformationen und Korrespondenzen (Encyklop. d. math. Wissensch., IIIC 11, p. 1917).

[6]) *A. Longhi*, Sopra alcune classi di corrispondenze prive di valenza [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 29 (6), 1939], n. 3.

Se le varietà considerate $V_{k_1}^{n_1}$, $V_{k_2}^{n_2}$ non sono razionali, ed hanno gli spazi generatori riferiti biunivocamente, risulta priva di valenza la corrispondenza (n_1, n_2) che si stabilisce sulla curva $V_1^{n_1 n_2}$ loro intersezione chiamando omologhi due punti variabili quando appartengono a spazi generatori omologhi.

4. Riprendendo ora la questione proposta nel n. 1, è facile risolverla in tutta la sua generalità stabilendo il seguente teorema:

In uno spazio a tre o più dimensioni, ν varietà genericamente situate, di rispettivi ordini $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ e generi sezionali (n. 1) $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, *ciascuna con singolarità qualunque, si suppongano intersecarsi in una varietà V_k^n di dimensione $k > 0$: e di ordine $n = n_1 n_2 \ldots n_\nu$.*

Detto allora p il genere della varietà V_k^n se $k = 1$, o il suo genere sezionale (n. 1) *se $k > 1$, vale la formula:*

$$\frac{p-1}{n} = \nu - 1 + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{p_i - 1}{n_i},$$

ossia:

$$p = 1 + (\nu - 1)\, n + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{n}{n_i} (p_i - 1) \,. \tag{5}$$

Poichè, quando $\nu = 2$, la (5) riducesi alla formula (4) del n. 2, basterà dimostrare il teorema nell'ipotesi che esso valga ad esempio par le prime $\nu - 1$ delle ν varietà da considerarsi: $V^{n_1}, V^{n_2}, \ldots, V^{n_\nu}$.

Il genere sezionale della intersezione $\overline{V^{\frac{n}{n_\nu}}}$ di tali $\nu - 1$ varietà sia dunque:

$$\pi = 1 + (\nu - 2)\, \frac{n}{n_\nu} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{n}{n_\nu n_i} (p_i - 1) \,. \tag{6}$$

Ne consegue (n. 2) che il genere, o il genere sezionale, della varietà intersezione di $\overline{V^{\frac{n}{n_\nu}}}$ con V^{n_ν}, ossia della V_k^n comune a tutte le ν varietà V^{n_i}, è:

$$\left(\frac{n}{n_\nu} - 1\right)\left(n_\nu - 1\right) + \frac{n}{n_\nu} p_\nu + n_\nu \pi \,;$$

e quindi coincide appunto, tenuto conto della (6), col valore di p fornito dalla (5).

5. Come corollario del teorema precedente si ha (cfr. n. 3):

In uno spazio S_r, ν varietà $V_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ costituite ciascuna da ∞^1 spazi S_{k_i-1}, di rispettivi generi p_i, e dotate di singolarità qualunque, se sono in posizione generica ed è:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu = (\nu - 1)\, r + 1\,,$$

si intersecano in una curva, d'ordine $n = n_1 n_2 \ldots n_\nu$, avente il genere p dato dalla formula (5).

Altro caso particolare notevole del teorema del n. 4 è il seguente:

In uno spazio ad r dimensioni, $r - 1$ forme qualsiansi, però in posizione mutua generica, di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$, le cui sezioni piane siano rispettivamente di generi $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$, hanno in comune una curva di ordine $n = n_1 n_2 \ldots n_{r-1}$ e di genere:

$$1 + (r - 2)\, n + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{n}{n_i} (p_i - 1)\ .$$

Se le forme sono affatto generiche, è:

$$p_i = \tfrac{1}{2}(n_i - 1)\,(n_i - 2)\,,$$

e ne risulta che[7]):

Il genere della curva intersezione di $r - 1$ forme dello spazio ad r dimensioni, genericamente situate e generali nei loro rispettivi ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$, è:

$$\tfrac{1}{2} n_1 n_2 \ldots n_{r-1} (n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-1} - r - 1) + 1\,.$$

6. È ovvio che il valore di p dato dal teorema del n. 4 va ridotto di δ unità quando la posizione mutua delle ν varietà considerate, da generica, diviene particolare in modo che la loro varietà d'intersezione V_k^n se $k = 1$, o una curva sezione spaziale generica Γ di V_k^n se $k > 1$, acquisti in conseguenza δ punti doppi, o un equivalente numero di punti multipli, ulteriori: i quali si possono chiamare *accidentali* per la V_k^n. È allora $p - \delta$ il genere di Γ (o di V_k^n se $k = 1$) e $2(n + p - 1) - 2\delta$ il primo rango; onde Γ è certo riducibile se $\delta > p$, e riducibile con almeno una parte multipla se $\delta > n + p - 1$. Ne discende il seguente teorema:

---

[7]) Come si può desumere anche da note formule del *Veronese:* cfr. Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen (Math. Annalen, 19, 1882), n. 36.

In uno spazio a quante si vogliano dimensioni, ν varietà irriducibili, con singolarità qualsiansi, di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ e di generi sezionali (n. 1) $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, *segantisi in una V_k^n di dimensione $k > 0$ e di ordine $n = n_1 n_2 \ldots n_\nu$:*

1) non possono avere in comune una varietà di dimensione $k - 1$ e di ordine superiore a:

$$1 + (\nu - 1)\, n + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{n}{n_i} (p_i - 1) ,$$

la quale consti di punti doppi accidentali[8]) *per V_k^n*[9]), *senza che la V_k^n divenga riducibile;*

2) non possono avere in comune una varietà di dimensione $k - 1$ e di ordine superiore a:

$$\nu n + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{n}{n_i} (p_i - 1) ,$$

la quale consti di punti doppi accidentali[8]) *per V_k^n*[9]), *senza che abbiano addirittura in comune una varietà siffatta di dimensione k.*

Come corollario:

La varietà $V_{r-\nu}^{n_1 n_2 \ldots n_\nu}$ completa intersezione di $\nu\,(< r)$ forme di S_r, generali nei loro ordini $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$, è certo riducibile se contiene una $V_{r-\nu-1}^{\omega}$ di ordine:

$$\omega > \tfrac{1}{2} n_1 n_2 \ldots n_\nu (n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu - \nu - 2) + 1 ,$$

in ogni punto della quale due (o più) delle ν forme si tocchino. Ed anzi, quando sia:

$$\omega > \tfrac{1}{2} n_1 n_2 \ldots n_\nu (n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu - \nu) ,$$

---

[8]) Cioè, come si è già precisato nel testo, *dipendenti esclusivamente dalla particolare posizione delle ν varietà di cui la V_k^n è completa intersezione:* cosicchè tali punti doppi scomparirebbero dalla V_k^n qualora si rendesse generica la mutua posizione delle varietà suddette. Ad esempio, è multiplo accidentale per la V_k^n ogni punto multiplo isolato di una delle ν varietà, come pure ogni punto di contatto fra due di esse, per il quale passino tutte le altre.

[9]) In particolare: *di punti (della V_k^n) che siano ciascuno di contatto fra due almeno delle ν varietà.*

una almeno delle $V_{r-\nu}$, *onde la* $V_{r-\nu}^{n_1 n_2 \cdots n_\nu}$ *allora si compone, è tutta costituita da punti che sono ciascuno di contatto fra due (o più) delle* ν *forme.*

Per lo spazio ordinario ($r = 3$, $\nu = 2$) il teorema è già noto[10]).

---

[10]) Cfr. *K. Rohn* und *L. Berzolari*, Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen (Enzyklop. d. math. Wissensch., IIIC 9, p. 1277).

(Reçu le 18 juin 1945.)