Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Sulla intersezione di due o più varietà algebriche.

Autor: Longhi, Ambrogio

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16893

Sulla intersezione di due o più varietà algebriche

Di Ambrogio Longhi, Lugano

Ad Andreas Speiser
nel suo 60° compleanno.

1. In una Memoria del 1902 il *Fano*[1]) introduce per ogni congruenza di rette dello spazio S_3 a tre dimensioni, accanto all'ordine, alla classe e al rango, un quarto carattere, che, con denominazione suggerita da *C. Segre*, chiama *genere sezionale* della congruenza come pure della superficie immagine di essa sulla quadrica di S_5 rappresentativa delle rette di S_3: perchè il carattere suddetto non è altro che il genere delle sezioni iperpiane di tale superficie.

Estendendo la denominazione del *Segre*, definisco come *genere sezionale* di una varietà algebrica di dimensione $\varrho > 1$ e appartenente ad uno spazio lineare S_r ad r dimensioni, il genere della curva ottenuta segandola con un generico spazio $S_{r-\varrho+1}$.

Dati allora gli ordini e i generi sezionali di due o più varietà, dotate di singolarità qualunque ma in posizione mutua generica e aventi per completa intersezione una varietà V_k di dimensione $k > 0$, è possibile determinare, per questa V_k, il genere se $k = 1$, o il genere sezionale se $k > 1$: e dalla formula stabilita a tale scopo deduco, fra altro, un teorema generale sulla riducibilità di V_k ed alcune proprietà delle curve intersezioni di varietà costituite da ∞^1 spazi.

2. Si considerino dapprima, in S_r, due sole varietà $V_{k_1}^{n_1}$ e $V_{k_2}^{n_2}$: di dimensioni k_1, k_2 abbastanza elevate così che risulti $k_1 + k_2 > r$; di ordini n_1, n_2; di generi sezionali (n. 1) p_1, p_2; dotate di singolarità qualsiansi, ma in posizione generica; e quindi segantisi in una $V_k^{n_1 n_2}$ d'ordine $n_1 n_2$ e di dimensione $k = k_1 + k_2 - r \geqslant 1$.

Se ϱ_i è il primo ceto (eguale alla prima classe) di $V_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2)$, cioè[2]) l'ordine della varietà V_{k_i-1} costituita dai punti di contatto degli S_{k_i} tangenti a $V_{k_i}^{n_i}$ e appoggiantisi ad un dato S_{r-k_i-1}, la curva Γ_i, sezione di $V_{k_i}^{n_i}$ con uno spazio S_{r-k_i+1} condotto per l'S_{r-k_i-1}, incontra la V_{k_i-1} in ϱ_i punti: quelli di contatto delle rette tangenti a Γ_i e incidenti ad S_{r-k_i-1}. Ne segue che ϱ_i è pure il primo rango di Γ_i $(i = 1, 2)$.

---

[1]) *G. Fano*, Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 51 (2), 1902], n. 2.

[2]) *F. Severi*, Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettivi [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 52 (2), 1903], n. 1.

Analogamente si vede che il primo ceto ϱ della varietà $V_k^{n_1 n_2}$ eguaglia il primo rango della curva, Γ, traccia di $V_k^{n_1 n_2}$ sopra un generico spazio S_{r-k+1} (Γ non differendo da $V_k^{n_1 n_2}$ quando $k = 1$).

Per un teorema del *Severi* sui ceti della intersezione di più varietà[3]), si ha ora la relazione:

$$\varrho = n_1 \varrho_2 + n_2 \varrho_1 \,. \tag{1}$$

D'altra parte, i ceti $\varrho_1, \varrho_2, \varrho$ sono facilmente esprimibili (giusta quanto precede) come ranghi delle curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$: di rispettivi ordini $n_1, n_2, n_1 n_2$ e generi p_1, p_2, p.

Sulla varietà V_{ki}^{ni}, fra singolarità di ogni altra specie, si suppongano perciò esistere ω_i varietà di dimensione $k_i - 1$, tali che una qualunque $V_{ki-1}^{\mu_{ij}}$ di esse, d'ordine μ_{ij}, venga segata da ogni varietà algebrica di dimensione $r - k_i + 1$, e genericamente posta rispetto a V_{ki}^{ni}, in punti origini ciascuno di un ramo d'ordine $\alpha_{ij} > 1$ della curva comune alla varietà stessa e a V_{ki}^{ni} ($j = 1, 2, \ldots, \omega_i$; $i = 1, 2$).

Il primo rango ϱ_i della curva Γ_i è pertanto calcolabile con la formula:

$$\varrho_i = 2(n_i + p_i - 1) - \sum_{j=1}^{\omega_i} \mu_{ij}(\alpha_{ij} - 1) \qquad (i = 1, 2)\,. \tag{2}$$

La curva Γ, già definita (se $k > 1$) come sezione della varietà $V_k^{n_1 n_2}$ con uno spazio S_{r-k+1}, può altresì ottenersi intersecando V_{ki}^{ni} con una varietà di dimensione $r - k_i + 1$: la V_{r-ki+1}^{mi}, d'ordine $m_i = n_1 n_2 : n_i$, sezione del suddetto S_{r-k+1} con quella delle due varietà $V_{k_1}^{n_1}$, $V_{k_2}^{n_2}$ che è diversa dalla V_{ki}^{ni} considerata.

Ne deriva che, sopra Γ, ciascuno degli $m_i \mu_{ij}$ punti d'incontro di V_{r-ki+1}^{mi} con la $V_{ki-1}^{\mu_{ij}}$ singolare appartenente a V_{ki}^{ni}, è origine di un ramo d'ordine α_{ij}: nè esistono su Γ altri punti origini di rami superlineari, attesa la mutua posizione generica delle $V_{k_1}^{n_1}$, $V_{k_2}^{n_2}$.

Si ha dunque, pel primo rango ϱ di Γ, l'espressione:

$$\varrho = 2(n_1 n_2 + p - 1) - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{\omega_i} \frac{n_1 n_2}{n_i} \mu_{ij}(\alpha_{ij} - 1)\,. \tag{3}$$

Dalla (1), tenuto conto delle (2) e (3), si trae allora:

$$p = (n_1 - 1)(n_2 - 1) + n_1 p_2 + n_2 p_1\,; \tag{4}$$

---

[3]) *F. Severi*, loc. cit., n. 13.

ed è con ciò risolta la questione proposta nel caso di due varietà. Infatti la formula (4) fornisce il genere p (se $k = 1$), ovvero (se $k > 1$) il genere sezionale p (n. 1), della varietà $V_k^{n_1 n_2}$ (di dimensione $k > 0$) comune a due qualsiansi varietà genericamente situate, di ordini n_1, n_2 e di generi sezionali p_1, p_2.

3. Prima di passare a stabilire la formula più generale, giova soffermarsi alquanto su alcune conseguenze della (4).

Anzitutto, il genere di una V_k luogo di ∞^1 spazi S_{k-1} non differendo dal suo genere sezionale (n. 1), come caso particolare della proposizione del n. 2 si ha l'altra[4]):

In uno spazio S_r, due varietà $V_{k_1}^{n_1}$ e $V_{k_2}^{n_2}$, costituite ciascuna da ∞^1 spazi S_{k_1-1} ed S_{k_2-1}, di rispettivi generi p_1 e p_2, e dotate di singolarità qualsiansi, se sono in posizione generica ed è $k_1 + k_2 = r + 1$, si intersecano in una curva $V_1^{n_1 n_2}$ il cui genere p viene espresso dalla formula (4).

E poichè tale curva $V_1^{n_1 n_2}$ è evidentemente sostegno di due involuzioni $\gamma_{n_1}^1$, $\gamma_{n_2}^1$ (segnatevi dagli spazi generatori delle varietà $V_{k_i}^{n_i}$) di generi p_2 e p_1, in virtù di un teorema del *Castelnuovo*[5]) l'eguaglianza (4) prova che:

Gli spazi generatori delle varietà suddette $V_{k_1}^{n_1}$ e $V_{k_2}^{n_2}$, i quali sono rispettivamente n_2-secanti ed n_1-secanti per la curva $V_1^{n_1 n_2}$, hanno la proprietà che i gruppi degli $n_1 n_2$ punti di appoggio con $V_1^{n_1 n_2}$ di tutti gli spazi di una passanti pei punti di appoggio di uno spazio variabile dell'altra, sono fra loro equivalenti.

Fatta poi l'ipotesi che le $V_{k_i}^{n_i}$ siano, come totalità ∞^1 di spazi, birazionalmente equivalenti, onde $p_1 = p_2 = \pi$, lo stesso accade delle due involuzioni $\gamma_{n_1}^1$, $\gamma_{n_2}^1$ subordinate su $V_1^{n_1 n_2}$: ed allora[6]) la corrispondenza (n_1, n_2) composta con tali involuzioni riesce certo singolare appena sia $\pi \geqslant 1$. Pertanto:

---

[4]) Che è una prima estensione di un noto risultato sulla intersezione di due rigate algebriche dello spazio ordinario: *F. Amodeo,* Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali . . . [Annali di Matematica, 20 (2), 1892, p. 235]. — Per una ulteriore estensione vedasi il n. 5.

[5]) *G. Castelnuovo,* Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 15 (5), 1906, p. 342]. Cfr. anche: *L. Berzolari,* Algebraische Transformationen und Korrespondenzen (Encyklop. d. math. Wissensch., IIIC 11, p. 1917).

[6]) *A. Longhi,* Sopra alcune classi di corrispondenze prive di valenza [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 29 (6), 1939], n. 3.

Se le varietà considerate $V_{k_1}^{n_1}$, $V_{k_2}^{n_2}$ non sono razionali, ed hanno gli spazi generatori riferiti biunivocamente, risulta priva di valenza la corrispondenza (n_1, n_2) *che si stabilisce sulla curva $V_1^{n_1 n_2}$ loro intersezione chiamando omologhi due punti variabili quando appartengono a spazi generatori omologhi.*

4. Riprendendo ora la questione proposta nel n. 1, è facile risolverla in tutta la sua generalità stabilendo il seguente teorema:

In uno spazio a tre o più dimensioni, ν varietà genericamente situate, di rispettivi ordini $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ e generi sezionali (n. 1) $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, *ciascuna con singolarità qualunque, si suppongano intersecarsi in una varietà V_k^n di dimensione $k > 0$: e di ordine $n = n_1 n_2 \ldots n_\nu$.*

Detto allora p il genere della varietà V_k^n se $k = 1$, o il suo genere sezionale (n. 1) *se $k > 1$, vale la formula:*

$$\frac{p-1}{n} = \nu - 1 + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{p_i - 1}{n_i},$$

ossia:

$$p = 1 + (\nu - 1)\, n + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{n}{n_i}(p_i - 1) \,. \tag{5}$$

Poichè, quando $\nu = 2$, la (5) riducesi alla formula (4) del n. 2, basterà dimostrare il teorema nell'ipotesi che esso valga ad esempio par le prime $\nu - 1$ delle ν varietà da considerarsi: $V^{n_1}, V^{n_2}, \ldots, V^{n_\nu}$.

Il genere sezionale della intersezione $V^{\frac{n}{n_\nu}}$ di tali $\nu - 1$ varietà sia dunque:

$$\pi = 1 + (\nu - 2)\frac{n}{n_\nu} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{n}{n_\nu n_i}(p_i - 1) \,. \tag{6}$$

Ne consegue (n. 2) che il genere, o il genere sezionale, della varietà intersezione di $V^{\frac{n}{n_\nu}}$ con V^{n_ν}, ossia della V_k^n comune a tutte le ν varietà V^{n_i}, è:

$$\left(\frac{n}{n_\nu} - 1\right)\left(n_\nu - 1\right) + \frac{n}{n_\nu} p_\nu + n_\nu \pi \,;$$

e quindi coincide appunto, tenuto conto della (6), col valore di p fornito dalla (5).

5. Come corollario del teorema precedente si ha (cfr. n. 3):

In uno spazio S_r, ν varietà $V_{k_i}^{n_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ costituite ciascuna da ∞^1 spazi S_{k_i-1}, di rispettivi generi p_i, e dotate di singolarità qualunque, se sono in posizione generica ed è:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu = (\nu - 1)\, r + 1\,,$$

si intersecano in una curva, d'ordine $n = n_1 n_2 \ldots n_\nu$, avente il genere p dato dalla formula (5).

Altro caso particolare notevole del teorema del n. 4 è il seguente:

In uno spazio ad r dimensioni, $r - 1$ forme qualsiansi, però in posizione mutua generica, di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$, le cui sezioni piane siano rispettivamente di generi $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$, hanno in comune una curva di ordine $n = n_1 n_2 \ldots n_{r-1}$ e di genere:

$$1 + (r - 2)\, n + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{n}{n_i}(p_i - 1)\,.$$

Se le forme sono affatto generiche, è:

$$p_i = \tfrac{1}{2}(n_i - 1)(n_i - 2)\,,$$

e ne risulta che[7]):

Il genere della curva intersezione di $r - 1$ forme dello spazio ad r dimensioni, genericamente situate e generali nei loro rispettivi ordini $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$, è:

$$\tfrac{1}{2} n_1 n_2 \ldots n_{r-1} (n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-1} - r - 1) + 1\,.$$

6. È ovvio che il valore di p dato dal teorema del n. 4 va ridotto di δ unità quando la posizione mutua delle ν varietà considerate, da generica, diviene particolare in modo che la loro varietà d'intersezione V_k^n se $k = 1$, o una curva sezione spaziale generica Γ di V_k^n se $k > 1$, acquisti in conseguenza δ punti doppi, o un equivalente numero di punti multipli, ulteriori: i quali si possono chiamare *accidentali* per la V_k^n. È allora $p - \delta$ il genere di Γ (o di V_k^n se $k = 1$) e $2(n + p - 1) - 2\delta$ il primo rango; onde Γ è certo riducibile se $\delta > p$, e riducibile con almeno una parte multipla se $\delta > n + p - 1$. Ne discende il seguente teorema:

[7]) Come si può desumere anche da note formule del *Veronese:* cfr. Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen (Math. Annalen, 19, 1882), n. 36.

In uno spazio a quante si vogliano dimensioni, ν varietà irriducibili, con singolarità qualsiansi, di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ e di generi sezionali (n. 1) $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, *segantisi in una V_k^n di dimensione $k > 0$ e di ordine $n = n_1 n_2 \ldots n_\nu$:*

1) non possono avere in comune una varietà di dimensione $k - 1$ e di ordine superiore a:

$$1 + (\nu - 1)\, n + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{n}{n_i}\,(p_i - 1) \ ,$$

la quale consti di punti doppi accidentali[8]) *per* V_k^n [9]), *senza che la V_k^n divenga riducibile;*

2) non possono avere in comune una varietà di dimensione $k - 1$ e di ordine superiore a:

$$\nu n + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{n}{n_i}\,(p_i - 1) \ ,$$

la quale consti di punti doppi accidentali[8]) *per* V_k^n [9]), *senza che abbiano addirittura in comune una varietà siffatta di dimensione k.*

Come corollario:

La varietà $V_{r-\nu}^{n_1 n_2 \cdots n_\nu}$ completa intersezione di $\nu\,(< r)$ forme di S_r, generali nei loro ordini $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$, è certo riducibile se contiene una $V_{r-\nu-1}^{\omega}$ di ordine:

$$\omega > \tfrac{1}{2} n_1 n_2 \ldots n_\nu\,(n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu - \nu - 2) + 1 \ ,$$

in ogni punto della quale due (o più) delle ν forme si tocchino. Ed anzi, quando sia:

$$\omega > \tfrac{1}{2} n_1 n_2 \ldots n_\nu\,(n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu - \nu) \ ,$$

---

[8]) Cioè, come si è già precisato nel testo, *dipendenti esclusivamente dalla particolare posizione delle ν varietà di cui la V_k^n è completa intersezione:* cosicchè tali punti doppi scomparirebbero dalla V_k^n qualora si rendesse generica la mutua posizione delle varietà suddette. Ad esempio, è multiplo accidentale per la V_k^n ogni punto multiplo isolato di una delle ν varietà, come pure ogni punto di contatto fra due di esse, per il quale passino tutte le altre.

[9]) In particolare: *di punti (della V_k^n) che siano ciascuno di contatto fra due almeno delle ν varietà.*

una almeno delle $V_{r-\nu}$, *onde la* $V_{r-\nu}^{n_1 n_2 \cdots n_\nu}$ *allora si compone, è tutta costituita da punti che sono ciascuno di contatto fra due (o più) delle* ν *forme.*

Per lo spazio ordinario ($r = 3$, $\nu = 2$) il teorema è già noto[10]).

---

[10]) Cfr. *K. Rohn* und *L. Berzolari*, Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen (Enzyklop. d. math. Wissensch., IIIC 9, p. 1277).

(Reçu le 18 juin 1945.)