Sul comportamente degli elementi periodici in un gruppo di DEDEKIND infinito[1]

Di Guido Zappa, Roma

Ad Andreas Speiser nel suo 60° compleanno.

Negli ultimi anni, in un complesso di lavori, *O. Ore* ha sviluppato lo studio dei gruppi concepiti come strutture.

Tra le strutture, hanno particolare importanza le cosiddette strutture di *Dedekind*, quelle cioè per cui è soddisfatta la relazione (di *Dedekind*): se $A \supset B$, è

$$A \frown (B \smile C) = B \smile (A \frown C)$$

(ove, com'è d'uso, $A \frown B$ indica l'intersezione, $A \smile B$ l'unione di A e B, mentre $A \supset B$ significa che A contiene B).

La totalità dei sottogruppi normali di un gruppo costituisce una struttura di *Dedekind*; da ciò discende la validità, pei sottogruppi normali, di teoremi di decomposizione, quali quello di *Jordan-Hölder*, quello di *Schreier-Zassenhaus*, etc. Onde l'interesse di determinare altre strutture di *Dedekind* costituite da sottogruppi di un gruppo.

A tal fine *Ore*[2]) ha posto il problema di determinare i gruppi in cui la totalità di tutti i sottogruppi costituisce una struttura di *Dedekind* (gruppi che io chiamo gruppi di *Dedekind*). In un mio recente lavoro[3]), ho affrontato e risoluto il problema della determinazione di tutti i gruppi di *Dedekind* finiti.

Quale studio preliminare per la determinazione dei gruppi di *Dedekind* infiniti, nella presente Nota io esamino il comportamento degli elementi periodici in un gruppo di *Dedekind* possedente anche elementi aperiodici. E precisamente, dimostro che, se un gruppo G di *Dedekind* possiede qualche elemento aperiodico, ogni sottogruppo di G costituito solo da elementi periodici è normale in G, e di conseguenza ogni elemento periodico di G è trasformato da ciascun elemento di G in una sua potenza. Tutti gli elementi periodici di G costituiscono un sottogruppo caratteristico F, abeliano o hamiltoniano.

---

[1]) *Anmerkung der Redaktion.* Die vorliegende Arbeit war für die Festschrift Andreas Speiser, Orell Füssli, 1945, berechnet. Wegen verspätetem Eintreffen konnte sie leider nicht mehr in dieselbe aufgenommen werden.

[2]) *O. Ore,* Some Studies on Group Theory. Congrès des Mathématiques à Helsingfors, (1938), pag. 7.

[3]) Caratterizzazione dei gruppi di *Dedekind* finiti. Pontificia Academia Scientiarum, Commentationes, 8, (1944), pp. 443—460.

Se H e K son due sottogruppi di un gruppo di Dedekind, e $H \cap K$ è massimo in K, si ha che H è massimo in $H \cup K$. Infatti, detto L un sottogruppo di $H \cup K$ contenente H, si ha, in base alla relazione di *Dedekind*, $L = H \cup (L \cap K)$. Ma L contiene H, e perciò anche $H \cap K$; onde, essendo $H \cap K$ massimo in K, si ha che, o $L \cap K = H \cap K$ e allora $L = H$, o $L \cap K = K$ e allora $L = H \cup K$. Onde H è massimo in $H \cup K$.

Sia G un gruppo di Dedekind, H e K due suoi sottogruppi, il primo dei quali abbia solo elementi d'ordine finito. Se $H \cap K$ è massimo in K, $H \cup K$ contiene solo elementi d'ordine finito.

Procediamo per assurdo, e supponiamo pertanto che $H \cup K$ contenga un elemento aperiodico a. Detto p un intero > 1, indichiamo con A e con A_p i sottogruppi ciclici generati rispettivamente da a e da a^p. Poiché $H \cap K$ è massimo in K, in base all'osservazione precedente, H è massimo in $H \cup K$; onde $A_p \cup H$ coincide o con H, o con $H \cup K$. Ma non può $A_p \cup H$ coincidere con H, perché H non può contenere l'elemento aperiodico a^p; quindi $A_p \cup H$ coincide con $H \cup K$ e pertanto contiene A. Per la relazione di *Dedekind* è allora $A = A_p \cup (A \cap H)$; e poiché A non ha elementi periodici oltre l'identità, si ha $A \cap H = 1$, $A = A_p$, il che è assurdo. Pertanto $H \cup K$ non ha elementi aperiodici.

Se G è un gruppo di Dedekind, tutti i suoi elementi d'ordine finito costituiscono un sottogruppo caratteristico.

Siano a e b due elementi periodici di G; basterà dimostrare che il gruppo generato da a e b contiene solo elementi periodici. Siano A e B, rispettivamente, i sottogruppi ciclici generati da a e da b, e sia b^m la più piccola potenza di b contenuta in A. Posto $m = p_1 p_2 \dots p_s$ con $p_1, p_2, \dots, p_s$ numeri primi, distinti o no, indichiamo con B_1 il gruppo generato da b^{p_1}, con B_2 il gruppo generato da $b^{p_1 p_2}, \dots$, con B_{s-1} il gruppo generato da $b^{p_1 \cdots p_{s-1}}$, con B_s il gruppo generato da $b^{p_1 \cdots p_s}$. Evidentemente $A \cap B = B_s$. L'indice di B_s in B_{s-1} è il numero primo p_s, quindi B_s è massimo in B_{s-1}; inoltre A ha solo elementi periodici, e $A \cap B_{s-1} = B_s$; quindi, in base al teorema precedente, $A \cup B_{s-1} = A_{s-1}$ ha solo elementi periodici. In modo analogo si dimostra che $A_{s-1} \cup B_{s-2} = A \cup B_{s-2}$ ha solo elementi periodici, ... e così seguitando si giunge a dimostrare che $A \cup B$ ha solo elementi periodici, e il teorema è provato.

Se G è un gruppo di Dedekind, H un suo sottogruppo formato da elementi periodici, d un elemento aperiodico di G, H è mutato in sè da d.

Sia D il sottogruppo generato da d. In base al teorema precedente, gli elementi periodici di $H \cup D$ formano un sottogruppo L, il quale contiene H. Per la relazione di *Dedekind*, deve essere $L = H \cup (L \cap D)$. Ma $L \cap D = 1$, perché D non ha, oltre l'identità, elementi periodici, quindi $L = H$, e pertanto $d^{-1}Hd$, che deve stare in L, coincide con H.

In particolare *ogni elemento periodico di G è trasformato in una sua potenza da ciascun elemento aperiodico.*

Ma di più, *se G contiene qualche elemento aperiodico, ogni elemento periodico di G è trasformato in una sua potenza da ciascun elemento periodico di G.*

Siano infatti a e b due elementi periodici, e d un elemento aperiodico di G. Indichiamo con A, B, D, i gruppi generati, rispettivamente, da a, b, d. Tutti gli elementi periodici di $B \cup D$ sono in B (cfr. dimostrazione teorema precedente) quindi $b \cdot d$ è un elemento aperiodico, e come tale trasforma, in base al teorema precedente, A in sè. Ma anche d, essendo aperiodico, trasforma A in sè, quindi altrettanto deve fare $b = (bd)d^{-1}$. Pertanto b trasforma a in una sua potenza, c. d. d.

In conclusione *gli elementi periodici di un gruppo di Dedekind G contenente qualche elemento aperiodico costituiscono un sottogruppo caratteristico F; ogni sottogruppo di F è normale in G.* Pertanto *F è abeliano o hamiltoniano.*

Il sottogruppo F, essendo abeliano o hamiltoniano, è il prodotto diretto di p-gruppi di *Sylow* (eventualmente in numero infinito) relativi a valori distinti del numero primo p. Ciascuno di questi p-gruppi è abeliano se p è dispari, mentre può essere hamiltoniano se $p = 2$. Se d è un elemento aperiodico di G, e P un sottogruppo di *Sylow* abeliano di F, d trasforma ciascun elemento a di P in una sua potenza a^x, *con x non dipendente da a* (come risulta dalle proprietà degli automorfismi dei gruppi abeliani). Se poi P è un sottogruppo di *Sylow* hamiltoniano di F, esso è necessariamente il prodotto diretto di un gruppo di quaternioni, Q, per un gruppo abeliano R ad elementi tutti del secondo ordine. Un elemento aperiodico d di G deve trasformare ogni elemento di R in sè, mentre, detti a e b due generatori di Q ($a^4 = b^4 = 1$, $a^2 = b^2$, $a^{-1}\,b\,a = b^3$), d può comportarsi con a e b in uno dei tre modi seguenti:

1°) $d^{-1}ad = a$, $d^{-1}bd = b$; 2°) $d^{-1}ad = a^3$, $d^{-1}bd = b$;
3°) $d^{-1}ad = a^3$, $d^{-1}bd = b^3$.

Il terzo caso si riduce, in realtà, al secondo, cambiando il sistema di elementi generatori di Q (ponendo, precisamente, ab al posto di b).

(Reçu le 24 mai 1945.)