**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 18 (1945-1946)

**Artikel:** Formula di Cauchy (n+1)- dimensionale per le funzioni analitiche di n variabili complesse.

**Autor:** Martinelli, Enzo

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-16891

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Formula di Cauchy $(n+1)$-dimensionale per le funzioni analitiche di $n$ variabili complesse [1]

Di Enzo Martinelli, Roma

*Ad Andreas Speiser nel suo 60° compleanno.*

**1.** La teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa poggia sopra due risultati fondamentali di *Cauchy*: il primo e il secondo teorema integrale (o formula integrale). Che cosa può dirsi circa l'estensione di questi alle funzioni di più variabili complesse?

È noto che, per $n$ variabili, l'estensione del primo teorema dà luogo ad $n$ teoremi integrali distinti, dove le varietà d'integrazione sono cicli di dimensioni rispettive $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$, appartenenti allo $S_{2n}$ ove si rappresentano le variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$. Gli $n$ teoremi posson venir espressi compendiosamente così:

$$\int_{V_{n+l}} f(z_1, \ldots, z_n)\, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{z}_{\alpha_l}) = 0 \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

essendo $V_{n+l}$ cicli $(n+l)$-dimensionali omologhi a zero[2]) nel campo di olomorfismo della $f(z_1, \ldots, z_n)$, $\bar{z}_\alpha$ complesso coniugato di $z_\alpha$, ed $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ una combinazione qualunque di classe $l$ degl'interi $1, \ldots, n$ [3]). Ciascuno dei precedenti teoremi è altresì sufficiente a caratterizzare tra le funzioni continue $f(z_1, \ldots, z_n)$, quelle che sono analitiche (estensione dei teoremi di *Morera* e *Severi*).

È naturale la presunzione che, parallelamente agli $n$ teoremi integrali, sussistano altrettante formule integrali, estensioni della formula di *Cauchy*, nelle quali compaiano integrazioni sopra cicli di dimensione $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$. Per la dimensione $n$ si tratta di un'estensione già da molto tempo nota in forma rudimentale, e di recente in forma generale, ove la varietà d'integrazione è sottomessa soltanto a condizioni topologiche[4]). La formula corrispondente alla dimensione

---

[1]) *Anmerkung der Redaktion.* Die vorliegende Arbeit war für die Festschrift Andreas Speiser, Orell Füssli, 1945, berechnet. Wegen verspätetem Eintreffen konnte sie leider nicht mehr in diese aufgenommen werden.

[2]) È lecito di riferirsi all'omologia con divisione, che nel seguito indicheremo col segno $\approx$, riservando il segno $\sim$ per l'omologia ordinaria.

[3]) Per $l = 0$ si tratta del classico risultato di *Poincaré*; per $l = n - 1$ cfr. *W. Wirtinger*, „Monatshefte für Math. und Phys." (1937), B. 45, pag. 418; per $l$ qualunque e per i teoremi inversi cfr. un mio lavoro in „Memorie R. Acc. Italia" (1938), vol. IX, pag. 269.

[4]) Per $n = 2$ cfr. un mio lavoro in „Rend. R. Acc. Lincei" (1937), t. 25, pag. 33; per $n$ qualunque cfr. *B. Segre*, „Atti 1° Congresso Unione Mat. Ital." (1937), pag. 174, nonché un mio lavoro in „Commentarii Math. Helvetici", t. 17 (1944), pag. 201.

$2n - 1$ appare nel mio lavoro citato in[3]). Restavano da determinare le formule corrispondenti a tutte le dimensioni intermedie. Faccio ora un altro passo verso la risoluzione completa della questione, presentando la formula integrale corrispondente alla dimensione $n + 1$, mentre mi riservo di trattare il caso generale in un prossimo lavoro.

È opportuno premettere qualche convenzione. Supporremo intanto che il punto $O$ della regione di olomorfismo $R_{2n}$ (anche non univalente) della funzione analitica $f(z_1, \ldots, z_n)$, nel quale si vuole esprimere il valore della funzione stessa, coincida coll'origine delle coordinate dello $S_{2n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ $(z_j = x_j + iy_j, j = 1, \ldots, n)$. Ciò per abbreviare la scrittura, senza ledere la generalità, poiché si passa al caso di un punto $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ sostituendo $z_j$ con $z_j - \zeta_j$. Porremo inoltre: $z_j \bar{z}_j = |z_j|^2 = s_j$. Infine conveniamo di indicare tra parentesi quadre uno o più valori, come $[\alpha]$, $[\alpha, \beta]$, ecc., che s'intenda di escludere nella variabilità di un indice nella successione degli interi $1, \ldots, n$. Così p. es. si scriverà succintamente $\bar{z}_{1 \ldots [\alpha] \ldots} \bar{z}_n$ in luogo di $\bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{\alpha-1} \bar{z}_{\alpha+1} \ldots \bar{z}_n$; $\underset{[\alpha]}{\Sigma_j}, \underset{[\alpha]}{\Pi_j}$ (e simili) per indicare rispett. simboli di somma e di prodotto dove l'indice $j$ può percorrere gl'interi $1, \ldots, n$ con esclusione di $\alpha$. In ogni altro simbolo di somma, come $\Sigma_j$, $\Sigma_\alpha$, ecc., senza indicazione di valori da escludere, s'intende che l'indice può percorrere tutti gl'interi $1, \ldots, n$.

Ciò posto, la formula che stabiliremo è la seguente:

$$(1) \qquad (-2\pi i)^n (\Sigma_j \lambda_j N_j) f(0, \ldots, 0) =$$

$$\int_{V_{n+1}} f(z_1, \ldots, z_n) \sum\nolimits_\alpha \bar{z}_{1 \ldots [\alpha] \ldots} \bar{z}_n \sum_{[\alpha]}{}_k \frac{1}{s_\alpha + s_k} \left\{ \frac{\lambda_k}{\underset{[k]}{\Pi_j} (s_k + s_j)} - \frac{\lambda_\alpha}{\underset{[\alpha]}{\Pi_j} (s_\alpha + s_j)} \right\} d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha),$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono parametri complessi *arbitrari*[5]), $V_{n+1}$ è un ciclo $(n + 1)$-dimensionale orientabile dello $S_{2n}$, soddisfacente alle condizioni topologiche che sono oltre precisate, insieme al significato degli interi $N_1, \ldots, N_n$.

Si considerino gli $\binom{n}{2}$ spazi caratteristici $S_{2n-4}$ uscenti dal punto $O$ in $S_{2n}$, di equazioni rispettive:

$$z_\alpha = z_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n\,;\ \alpha \neq \beta)\,.$$

---

[5]) L'introduzione dei parametri $\lambda j$ è diretta a condensare in una sola formula simmetrica un gruppo di $n$ formule diverse, che rispondono al problema nel caso $(n + 1)$-dimensionale; mentre nei casi $n$-dimensionale e $(2n - 1)$-dimensionale le formule relative sono univocamente determinate.

Indicato con $T_{2n-4}$ l'insieme di questi spazi, *le condizioni cui deve soddisfare il ciclo* $V_{n+1}$ *per la validità della* (1) *sono le seguenti:*

$$V_{n+1} \subset R_{2n} - T_{2n-4}\,; \tag{I}$$

$$V_{n+1} \approx 0 \quad in \quad (R_{2n} - T_{2n-4}) + O. \tag{II}$$

Osserviamo fin d'ora che la (I) serve ad assicurare che la forma differenziale integranda a secondo membro della (1) sia regolare sopra $V_{n+1}$. Infatti, entro la regione $R_{2n}$ di olomorfismo della $f(z_1, \ldots, z_n)$ possono presentarsi singolarità della predetta forma integranda soltanto in corrispondenza all'annullarsi di qualcuno dei denominatori del tipo $s_\alpha + s_\beta$; quindi per $|z_\alpha|^2 + |z_\beta|^2 = 0$, cioè $z_\alpha = z_\beta = 0$: vale a dire sopra $T_{2n-4}$.

Per definire gl'interi $N_j$, che sono caratteri topologici del ciclo $V_{n+1}$ dipendenti dalla sua posizione rispetto a $T_{2n-4}$, o, più precisamente, dalla sua condizione d'allacciamento con $T_{2n-4}$, consideriamo in ciascun piano caratteristico coordinato $z_j (j = 1, \ldots, n)$ dello $S_{2n}$ (di equazioni $z_1 = \ldots_{[j]} \ldots = z_n = 0$), una semiretta $t_j$ uscente dall'origine, ed orientata nel verso che fa allontanare dall'origine stessa, p. es. il semiasse reale orientato ordinariamente. Le $n$ semirette individuano un $n$-edro *solido* $E_n$, che può pensarsi (per concretarne più facilmente l'immagine) come proiezione da $O$ di un $(n-1)$-simplesso $e_{n-1}$. Entro $e_{n-1}$ si considerino gli $n$ cicli $(n-3)$-dimensionali $h^j_{n-3} (j = 1, \ldots, n)$ che sono contorno delle singole facce del simplesso. Per proiezione da $O$ si ottengono altrettanti cicli $(n-2)$-dimensionali $H^j_{n-2}$, che appartengono ad $E_n$ e, come si verifica subito, a $T_{2n-4}$[6]). Supporremo i cicli $H^j_{n-2} (j = 1, \ldots, n)$ ordinati in guisa che $H^j_{n-2}$ sia quello dei cicli che non ha punti sul piano caratteristico $z_j$. Per proiezione da $O$ della faccia $k^j_{n-2}$ di $e_{n-1}$ che ha per contorno $h^j_{n-3}$, si ottiene un $(n-1)$-edro solido, che indicheremo con $K^j_{n-1}$, il quale ha per contorno $H^j_{n-2}$, ed è individuato dalle semirette $t_{1, \ldots [j] \ldots}, t_n$. Supporremo fissata in $K^j_{n-1}$ l'orientazione determinata dall'$(n-1)$-edro delle direzioni delle predette semirette orientate ed ordinate, quando $j$ è dispari; l'orientazione opposta, quando $j$ è pari. Con ciò resta fissata un'orientazione altresì sui cicli contorno $H^j_{n-2}$, tenuto conto della quale si verifica subito che $\Sigma_j H^j_{n-2} = 0$.

---

[6]) Si tratta di cicli *relativi* della varietà aperta $T_{2n-4}$. Se si chiude lo $S_{2n}$ euclideo coll'aggiunta di un punto all'infinito, il quale viene ad aggiungersi a $T_{2n-4}$ ed ai cicli $H^j_{n-2}$, questi divengono cicli *assoluti* (n. 4). (Per i concetti di ciclo relativo e assoluto, cfr. p. es. *Lefschetz*, Topology, New York, 1930, pag. 17.)

Ciò premesso, l'intero $N_j$ è definito come *indice d'allacciamento di* $V_{n+1}$ *e* $H^j_{n-2}$ *entro lo* $S_{2n}$ *orientato mediante il* $2n$*-edro delle direzioni positivi degli assi ordinati* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$; cioè, in simboli:

$$N_j = All\,(V_{n+1}\,,\ H^j_{n-2}) = [V_{n+1}\,,\ K^j_{n-1}]\,, \tag{2}$$

dove con la parentesi quadra si simboleggia l'indice di *Kronecker* delle varietà indicate[7]). Giova avvertire che gl'interi $N_j$ non sono fra loro indipendenti, ma legati dalla relazione $\Sigma_j N_j = 0$, la quale si deduce subito osservando che $\Sigma_j N_j$ deve uguagliare l'indice d'allacciamento di $V_{n+1}$ col ciclo nullo $\Sigma_j H^j_{n-2}$.

Aggiungiamo che, affinché la formula (1) serva di fatto ad esprimere il valore della $f(z_1, \ldots, z_n)$ nel punto $O$, occorre ancora, naturalmente, sia soddisfatta la condizione:

$$\Sigma_j \lambda_j N_j \neq 0\,. \tag{III}$$

È sempre possibile soddisfare alla (III) con conveniente scelta dei parametri arbitrari $\lambda_j$, purché non siano tutti nulli gl'interi $N_j$ (il che accade soltanto allorché sia $V_{n+1} \approx 0$ in $S_{2n} - T_{2n-4}$; cfr. n. 5). D'altra parte è facile costruire cicli soddisfacenti alle condizioni (I), (II), e con gl'interi ad essi relativi non simultaneamente nulli (sono tali p. es. i cicli $\Gamma^{kh}$ di cui nel n. 4).

Osserviamo infine che, mentre per $n = 1$ la formula (1) non si può scrivere, per $n=2$ essa riducesi alla formula $(2n-1)$-dimensionale sopra citata. In tal caso, infatti, $T_{2n-4} = T_0$ si riduce al punto $O$, $V_{n+1} = V_3$ ad una ipersuperficie chiusa di $S_4$, $N_1 = -N_2$ al numero delle volte che $V_3$ racchiude il punto $O$. Riferendosi per es. ad una $V_3$ racchiudente semplicemente $O$ $(N_1 = -N_2 = 1)$, la (1) diviene:

$$-4\pi^2(\lambda_1-\lambda_2)\,f(0,0) = (\lambda_1-\lambda_2)\int\limits_{V_3} f(z_1, z_2)\,\frac{\bar z_1\, d(z_1, z_2, \bar z_2(z_1\bar z_1) - \bar z_2\, d(z_1, z_2, \bar z_1)}{(z_1\bar z_1 + z_2\bar z_2)^2}\,,$$

formula che, soppresso il fattore inessenziale $\lambda_1 - \lambda_2$, coincide colla formula $(2n-1)$-dimensionale per $n = 2$.

**2.** Otterremo la dimostrazione della (1) percorrendo la strada seguente, che cominciamo coll'indicare per sommi capi. In primo luogo si proverà che la forma differenziale integranda a secondo membro della (1), che

---

[7]) Per la nozione e le proprietà degl'indici di *Kronecker* e d'allacciamento, cfr. p. es. *Alexandroff-Hopf*, Topologie (Berlin 1935), cap. XI.

chiameremo brevemente $\omega$, è non soltanto regolare in $R_{2n} - T_{2n-4}$ (come già osservato al n. 1) ma anche *integrabile*; vale a dire che si annulla identicamente il differenziale di *Cartan* $d\omega$ della forma stessa. Ciò assicura intanto che il secondo membro della (1) non si altera sostituendo $V_{n+1}$ con un qualunque ciclo omologo nel campo di regolarità di $\omega$, cioè in $R_{2n} - T_{2n-4}$. Tenuto conto di questo, si sostituirà poi $V_{n+1}$ (o un suo multiplo) con una somma di cicli di struttura nota e comunque prossimi ad $O$, e si mostrerà che, al tendere di questi cicli ad $O$, la somma degl'integrali corrispondenti tende al valore che appare nel primo membro della (1).

Cominciamo dalla verifica del primo punto: $d\omega = 0$. Posto

$$\omega = f(z_1, \ldots, z_n) \sum\nolimits_\alpha \Phi_\alpha(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha)\,,$$

ricordiamo[8]) che il calcolo di $d\omega$ può eseguirsi rispetto alle variabili $z_j, \bar{z}_j (j = 1, \ldots, n)$ pensate come indipendenti e che, per l'analiticità della $f(z_1, \ldots, z_n)$, risulta $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0\ (j = 1, \ldots, n)$. Si ha allora:

$$d\omega = \frac{(-1)^n}{2} f \sum\nolimits_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta}\right) d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta)\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta} = \bar{z}_{1 \ldots [\alpha\beta] \ldots} \bar{z}_n \left(\Phi_\beta + \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial s_\alpha} - \Phi_\alpha - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial s_\beta}\right)\,. \tag{3}$$

Un facile calcolo dà poi:

$$\Phi_\beta + \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial s_\alpha} = \sum_{[\alpha\beta]}{}_k \frac{\lambda_k s_k}{(s_\alpha + s_k)\ (s_\beta + s_k) \prod\limits_{[k]}{}_j (s_k + s_j)} -$$

$$- \sum_{[\alpha]}{}_k \frac{\lambda_\alpha s_\alpha}{(s_\alpha + s_\beta)\ (s_\alpha + s_k) \prod\limits_{[\alpha]}{}_j (s_\alpha + s_j)} - \sum_{[\beta]}{}_k \frac{\lambda_\beta s_\beta}{(s_\alpha + s_\beta)\ (s_\beta + s_k) \prod\limits_{[\beta]}{}_j (s_\beta + s_j)} +$$

$$+ \frac{\lambda_\alpha s_\beta}{(s_\alpha + s_\beta)^2 \prod\limits_{[\alpha]}{}_j (s_\alpha + s_j)} + \frac{\lambda_\beta s_\alpha}{(s_\alpha + s_\beta)^2 \prod\limits_{[\beta]}{}_j (s_\beta + s_j)}\,,$$

espressione che risulta simmetrica rispetto agl'indici $\alpha$, $\beta$, onde uguaglia altresì $\Phi_\alpha + \dfrac{\partial \Phi_\alpha}{\partial s_\beta}$. Dalle (2), (3) segue pertanto $d\omega = 0$.

---

[8]) Cfr. alla pag. 273 del mio lavoro cit.: „Mem. R. Acc. It." (1938), vol. IX.

**3.** Passiamo alla seconda parte della dimostrazione. Secondo quanto si è detto al n. 2, per calcolare il secondo membro della (1) può sostituirsi a $V_{n+1}$ un qualunque ciclo omologo in $R_{2n} - T_{2n-4}$. Ora, in base all'ipotesi (II) del n. 1, sappiamo che $V_{n+1} \approx 0$ in $(R_{2n} - T_{2n-4}) + O$, cioè che un conveniente multiplo $mV_{n+1}$ del ciclo $V_{n+1}$ ($m$ intero non nullo) è contorno di una varietà $M_{n+2}$ di $(R_{2n} - T_{2n-4}) + O$, la quale può sempre costruirsi passante per $O$ [9]). Un intorno comunque piccolo di $O$ sopra $M_{n+2}$ ha per contorno un ciclo $V'_{n+1} \sim mV_{n+1}$ in $R_{2n} - T_{2n-4}$. Onde, diviso per $m$ il secondo membro della (1), è lecito sostituire a $V_{n+1}$ il nuovo ciclo $V'_{n+1}$, il quale potrà supporsi contenuto in un $n$-cilindro $C_{2n}$ di equazioni $|z_1| \leqslant r, \ldots, |z_n| \leqslant r$, con raggio $r$ arbitrariamente piccolo, e che noi assumeremo tale che l'$n$-cilindro appartenga per intero alla regione $R_{2n}$.

Il calcolo del secondo membro della (1) è così ridotto al calcolo di $\int_{V'_{n+1}} \omega$ e questo, quando si conosco la base rispetto all'omologia con divisione per i cicli $(n+1)$-dimensionali di $C_{2n} - T_{2n-4}$, potrà ulteriormente ridursi al calcolo dell'integrale di $\omega$ sopra i cicli base. È d'uopo pertanto determinare la detta base, ciò che è equivalente, come vedremo, alla determinazione della base $(n+1)$-dimensionale di $S_{2n} - T_{2n-4}$; alla ricerca della quale ci rivolgiamo perciò nel n. seguente, estendendo un procedimento usato da *B. Segre* nel lavoro citato da principio.

**4.** Si considerino in $S_{2n} - T_{2n-4}$ le varietà $(n+1)$-dimensionali $A^j_{n+1}$ $(j = 1, \ldots, n)$ definite dalle equazioni:

$$|z_1| = \ldots_{[j]} \ldots = |z_n| = r\,, \qquad |z_j| \leqslant r\,.$$

Le varietà $A^j_{n+1}$, ciascuna delle quali è prodotto topologico di $n-1$ circonferenze e di un cerchio, appartengono al contorno di $C_{2n}$. Cominciamo col dimostrare che $S_{2n} - T_{2n-4}$ può *contrarsi omotopicamente* sopra la varietà $\Sigma_j A^j_{n+1}$.

Sia $P(z_1, \ldots, z_n)$ un punto qualunque di $S_{2n} - T_{2n-4}$. Posto $z_j = \varrho_j e^{i\theta_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, sia $\varrho_k$ il minore $\varrho_j$ (ovvero, se il minimo dei $\varrho_j$ è raggiunto in corrispondenza a due o più valori dell'indice $j$, sia $\varrho_k$ uno dei $\varrho_j$ minimi arbitrariamente scelto). S'indichi poi con $\varrho$ il valore

---

[9]) Da una varietà che non passi per $O$ se ne ottiene subito un'altra che soddisfa a questa condizione mediante l'aggiunta di un tubicino $(n+2)$-dimensionale che conduca ad $O$. D'altronde, se esiste una $M_{n+2}$ non passante per $O$, vuol dire che $V_{n+1} \approx 0$ in $R_{2n} - T_{2n-4}$, onde il secondo membro della (1) è nullo, ed è nullo anche il primo poiché valgono zero tutti gl'indici d'allacciamento $N_j$ di $V_{n+1}$ con i cicli $H^j_{n-2}$ di $T_{2n-4}$.

minimo di $\varrho_{1\ldots[k]\ldots\varrho_n}$. Ciò posto, consideriamo la trasformazione che muta $P$ nel punto $P^{(t)}$ di coordinate:

$$\begin{cases} z_j^{(t)} = [\varrho_j + t(r - \varrho_j)]\, e^{i\theta_j} & (j = 1, \ldots, [k], \ldots, n) \\ z_k^{(t)} = [\varrho_k + t(r\,\dfrac{\varrho_k}{\varrho} - \varrho_k)]\, e^{i\theta_k}\,, \end{cases} \tag{4}$$

essendo $t$ un parametro reale definito nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 1$.

Non è difficile riconoscere che questa trasformazione, per qualunque $t$ dell'intervallo detto, è univoca e continua al variare di $P$ in $S_{2n} - T_{2n-4}$. Basta tener conto delle seguenti osservazioni. In primo luogo è sempre $\varrho \neq 0$, poiché, essendo esclusi i punti di $T_{2n-4}$, può annullarsi uno solo al più dei $\varrho_j$, e quindi $\varrho_k$. In secondo luogo, quando $\varrho_k = 0$, pur risultando $\theta_k$ indeterminato, non viene da ciò indotta alcuna indeterminazione nella posizione di $P^{(t)}$, giacché si ha allora $z_k^{(t)} = 0$ per ogni $t$. Infine, quando per un dato punto $P$ esistano più $\varrho_k$ minimi, l'indeterminazione che ne consegue per le (4) in relazione alla scelta di $\varrho_k$, è soltanto apparente, perché di fatto, essendo allora $\varrho_k = \varrho$, le (4) riduconsi alle

$$z_j^{(t)} = [\varrho_j + t(r - \varrho_j)]\, e^{i\theta_j} \qquad (j = 1, \ldots, n)\,,$$

che sono indipendenti dall'indice $k$.

Si osservi ora che, per $t = 0$ il punto $P^{(t)}$ coincide con $P$, e per $t = 1$ col punto di coordinate

$$\begin{cases} z_j^{(1)} = r e^{i\theta_j} & (j = 1, \ldots, [k], \ldots, n) \\ z_k^{(1)} = r\,\dfrac{\varrho_k}{\varrho}\, e^{i\theta_k}\,, \end{cases}$$

il quale appartiene ad $A_{n+1}^k$, in quanto $|z_k^{(1)}| = r\,\dfrac{\varrho_k}{\varrho} \leqslant r$. Inoltre, se già il punto $P$ sta sopra $\Sigma_j A_{n+1}^k$, risulta $\varrho_k = 0$, onde $P^{(t)}$ coincide con $P$ per ogni $t$. Si conclude dunque che, al variare di $t$ da 0 ad 1, la trasformazione considerata definisce effettivamente una contrazione omotopica di $S_{2n} - T_{2n-4}$ in $\Sigma_j A_{n+1}^j$, secondo desideravasi.

L'esistenza di siffatta contrazione, assicura che ogni ciclo assoluto (cioè tutto al finito) di $S_{2n} - T_{2n-4}$ può ridursi omotopicamente sopra $\Sigma_j A_{n+1}^j$, e quindi che ha un suo omologo su tal varietà. D'altra parte, se un ciclo $\Gamma$ di $\Sigma_j A_{n+1}^j$ è $\sim 0$ in $S_{2n} - T_{2n-4}$, vuol dire che esiste una varietà $L_{n+2}$ di $S_{2n} - T_{2n-4}$ che ha per contorno $\Gamma$; onde applicando ad $L_{n+2}$ la contrazione omotopica, $L_{n+2}$ si trasforma in una varietà (sin-

golare) $L'_{n+2}$ di $\Sigma_j A^j_{n+1}$ che ha ancora per contorno $\Gamma$, e quindi $\Gamma$ è altresì $\sim 0$ sopra $\Sigma_j A^j_{n+1}$. Da ciò si trae che come base per i cicli al finito di $S_{2n} - T_{2n-4}$, di qualunque dimensione (e a noi interessa la dimensione $n+1$), può prendersi una base per i cicli della stessa dimensione sopra $\Sigma_j A^j_{n+1}$.

La determinazione di una base di dimensione $n+1$ sopra $\Sigma_j A^j_{n+1}$ è d'altronde immediata. Si osservi invero che le varietà $A^j_{n+1}$ s'incontrano soltanto nei punti del comune contorno costituito dall'$n$-toro (prodotto di $n$ circonferenze) di equazioni $|z_1| = \cdots = |z_n| = r$. Supponiamo le varietà $A^j_{n+1}$ orientate in guisa che il loro comune contorno risulti orientato allo stesso modo per qualunque $j$. Si soddisfa a tale requisito p. es. orientando $A^j_{n+1}$ mediante l' $(n+1)$-edro di direzioni uscenti dal punto $x_1 = \cdots = x_n = r$, $y_1 = \cdots = y_n = 0$, delle quali la prima è parallela ed equiversa al semiasse positivo delle $x_j$, e le rimanenti ordinatamente ai semiassi positivi delle $y_1, \ldots, y_n$. (Tale orientazione è la stessa o l'opposta, a seconda della parità o disparità di $j$, di quella che si otterrebbe assumendo orientazioni destrorse per le $n-1$ circonferenze e per il cerchio di cui $A^j_{n+1}$ è prodotto topologico, quando questo si pensi eseguito considerando i piani coordinati $z_1, \ldots, z_n$ nell'ordine naturale). In queste condizioni le $\binom{n}{2}$ varietà

$$\Gamma^{kh}_{n+1} = A^k_{n+1} - A^h_{n+1} \quad (k, h = 1, \ldots, n \; ; \; k \neq h)$$

sono dunque cicli orientati $(n+1)$-dimensionali della varietà $\Sigma_j A^j_{n+1}$. Di questi gli $n-1$ cicli $\Gamma^{k1}, \Gamma^{k2}_{\ldots[k]\ldots} \Gamma^{kn}$, per ogni $k$ *fissato*, formano evidentemente *una base sopra la varietà stessa, e quindi in* $S_{2n} - T_{2n-4}$.

Prima di passare ad applicare il risultato ottenuto al calcolo dell'integrale di cui al n. 3, osserviamo quanto segue. Coll'aggiunta di un punto all'infinito, possiamo pensare lo $S_{2n}$ euclideo come uno *spazio sferico* $\overline{S}_{2n}$. L'aggiunta del punto stesso a $T_{2n-4}$, muta $T_{2n-4}$ in una varietà chiusa $\overline{T}_{2n-4}$, e risulta $S_{2n} - T_{2n-4} = \overline{S}_{2n} - \overline{T}_{2n-4}$. I teoremi concernenti la *dualità di Alexandroff*[10]), ci assicurano allora l'esistenza in $\overline{T}_{2n-4}$ di una base di dimensione $n-2$ *duale* della base di dimensione $n+1$ determinata in $S_{2n} - T_{2n-4}$, siffatta che i mutui coefficienti d'allacciamento dei cicli fondamentali delle due basi diano luogo ad una matrice unitaria. Ebbene, dico che una base duale della $\Gamma^{k1}_{n+1,\ldots[k]\ldots}$,

---

[10]) Cfr. p. es. il trattato di *Alexandroff-Hopf*, cap. XI.

$\Gamma^{kn}_{n+1}$, è costituita dai cicli $H^1_{n-2}$, $H^2_{n-2}, \ldots [k] \ldots, H^n_{n-2}$ di $\overline{T}_{2n-4}$, definiti al n. 1. Si tratta di valutare gl'indici d'allacciamento:

$$All\,(\Gamma^{k\alpha}_{n+1}, H^\beta_{n-2}) = [\Gamma^{k\alpha}_{n+1}, K^\beta_{n-1}] = [A^k, K^\beta] - [A^\alpha, K^\beta]\,,$$

per $\alpha = 1, \ldots [k] \ldots, n$ e $\beta = 1, \ldots [k] \ldots, n$, essendo $K^\beta_{n-1} \to H^\beta_{n-2}$ secondo si è detto al n. 1. Risulta in ogni caso $[A^k, K^\beta] = 0$, e altresì $[A^\alpha, K^\beta] = 0$ per $\alpha \neq \beta$. Ricordata l'orientazione fissata per $S_{2n}$ e per $K^\beta_{n-1}$ al n. 1, risulta inoltre $[A^\alpha, K^\alpha] = -1$; onde si ha in definitiva:

$$All\,(\Gamma^{k\alpha}_{n+1}, H^\beta_{n-2}) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{per} \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, [k], \ldots, n)\,, \tag{5}$$

il che prova l'asserto.

**5.** Ritorniamo al ciclo $V'_{n+1}$ di $C_{2n} - T_{2n-4}$, di cui al principio del n. 3. Se si tien conto che la contrazione costruita nel n. precedente conserva ogni punto di $C_{2n}$ su cui agisce entro $C_{2n}$ stesso, si trae senz'altro che la base $(n+1)$-dimensionale determinata sopra $\Sigma_j A^j_{n+1}$, è base pei cicli di quella dimensione sia in $S_{2n} - T_{2n-4}$ che in $C_{2n} - T_{2n-4}$. Può scriversi allora:

$$V'_{n+1} \approx \sum_{[k]} {}_\alpha\, c_{k\alpha}\, \Gamma^{k\alpha}_{n+1} \quad \text{in} \quad C_{2n} - T_{2n-4}\,, \tag{6}$$

con $k$ arbitrariamente fissato e $c_{k\alpha}$ convenienti interi. Per determinare i coefficienti $c_{k\alpha}$, si osservi che la (6) stessa è valida a maggior ragione in $S_{2n} - T_{2n-4}$, dove è anche $V'_{n+1} \sim m V_{n+1}$; quindi risulta

$$m\, V_{n+1} \approx \sum_{[k]} {}_\alpha\, c_{k\alpha}\, \Gamma^{k\alpha}_{n+1} \quad \text{in} \quad S_{2n} - T_{2n-4}\,.$$

E quest'ultima, a sua volta, sussiste a maggior ragione in $S_{2n} - H^\beta_{n-2}$ $(\beta = 1, \ldots [k] \ldots, n)$, onde si ha:

$$m\, All\,(V_{n+1}, H^\beta_{n-2}) = \sum_{[k]} {}_\alpha\, c_{k\alpha}\, All\,(\Gamma^{k\alpha}_{n+1}, H^\beta_{n-2})\,.$$

Tenuto conto delle (5) e del significato degli interi $N_j$ (n. 1), se ne deducono le relazioni:

$$c_{k\beta} = m\, All\,(V_{n+1}, H^\beta_{n-2}) = m N_\beta \quad (\beta = 1, \ldots [k] \ldots, n)\,, \tag{7}$$

che determinano i coefficienti $c_{k\beta}$ (e mostrano ch'essi sono indipendenti dall'indice $k$).

Ricordato che (n. 3) la sostituzione di $V_{n+1}$ con $V'_{n+1}$ nel secondo membro della (1) è lecita previa divisione per l'intero $m$, e tenuto conto delle (6), (7), risulta che il secondo membro della (1) equivale a

$$\int\limits_{\substack{\Sigma_\alpha N_\alpha \Gamma^{k\alpha}_{n+1} \\ [k]}} \omega = \sum_{[k]}{}_\alpha N_\alpha \int\limits_{\Gamma^{k\alpha}_{n+1}} \omega =$$

$$= \sum_{[k]}{}_\alpha N_\alpha \Big[ \int\limits_{A^k_{n+1}} \omega - \int\limits_{A^\alpha_{n+1}} \omega \Big] = \sum{}_\alpha N_\alpha \Big[ \int\limits_{A^k_{n+1}} \omega - \int\limits_{A^\alpha_{n+1}} \omega \Big] . \tag{8}$$

Finalmente, poiché $\Sigma_\alpha N_\alpha = 0$ (n. 1), si ha per il secondo membro della (1) l'espressione:

$$- \sum{}_\alpha N_\alpha \int\limits_{A^\alpha_{n+1}} \omega . \tag{9}$$

**6.** Siamo ormai all'ultimo passo: la valutazione della somma d'integrali (9).

Fruiamo della seguente rappresentazione parametrica di $A^\alpha_{n+1}$:

$$z_j = r e^{i\theta_j} \qquad (j = 1, \ldots [\alpha] \ldots, n) , \qquad z_\alpha = \varrho_\alpha e^{i\theta_\alpha} , \tag{10}$$

ove i parametri sono: $\theta_1, \ldots, \theta_n$ variabili da 0 a $2\pi$, e $\varrho_\alpha$ variabile da 0 ad $r$. Tenuto conto delle (10) e delle altre che se ne deducono:

$$\bar{z}_j = r e^{-i\theta_j} \qquad (j = 1, \ldots [\alpha] \ldots, n) , \qquad \bar{z}_\alpha = \varrho_\alpha e^{-i\theta_\alpha} , \tag{11}$$

risulta sopra $A^\alpha_{n+1}$ :

$$\left.\begin{aligned} d(z_j, \bar{z}_j) &= d(r e^{i\theta_j} , \quad r e^{-i\theta_j}) = - r^2 d(\theta_j , \ \theta_j) = 0 \ \text{ per } j \neq \alpha \\ d(z_\alpha, \bar{z}_\alpha) &= d(\varrho_\alpha e^{i\theta_\alpha}, \ \varrho_\alpha e^{-i\theta_\alpha}) = - 2 i \varrho_\alpha d(\varrho_\alpha , \theta_\alpha) . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Pertanto, tutte le $n$ forme differenziali monomie nelle quali si spezza $\omega = f(z_1, \ldots, z_n) \Sigma_j \Phi_j d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_j)$, si annullano identicamente sopra $A^\alpha_{n+1}$ all'infuori di $f(z_1, \ldots, z_n) \Phi_\alpha d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha)$. L'espressione (9) si riduce così a

$$- \sum{}_\alpha N_\alpha \int\limits_{A^\alpha_{n+1}} f(z_1, \ldots, z_n) \ \Phi_\alpha \, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha) . \tag{13}$$

Ora osserviamo che, se si fa tendere $r$ a zero, variano nella (13) le varietà d'integrazione $A^{\alpha}_{n+1}$, ma non varia il valore della (13) stessa. Infatti, la variazione di $r$ produce in sostanza una variazione omotopica entro $C_{2n} - T_{2n-4}$ del ciclo $\sum_{\alpha}{}_{[k]} N_\alpha \Gamma^{k\alpha}_{n+1}$ al quale è esteso l'integrale (8), integrale che, come si è visto, equivale a (13). E poiché la sostituzione del ciclo d'integrazione con altro omologo nel campo di regolarità della forma integranda $\omega$, non altera il valore dell'integrale (n. 2), si conclude come si è asserito. Tenuto conto di ciò e della continuità della $f(z_1, \ldots, z_n)$, la (13) può sostituirsi con:

$$-f(0, \ldots, 0) \sum_\alpha N_\alpha \lim_{r \to 0} \int_{A^{\alpha}_{n+1}} \Phi_\alpha \, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha) \, . \tag{14}$$

In base alle (10), (11), (12) si ha poi su $A^{\alpha}_{n+1}$:

$$\Phi_2 = r^{n-1} e^{-i(\theta_1 + \cdots [\alpha] \cdots + \theta_n)} \sum_{[\alpha]}{}^{k} \frac{1}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)} \left\{ \frac{\lambda_k}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)\,(2r^2)^{n-2}} - \frac{\lambda_\alpha}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)^{n-1}} \right\},$$

$$d(z_j, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha) = 2(-1)^n r^{n-1} e^{i(\theta_1 + \cdots [\alpha] \cdots + \theta_n)} \varrho_\alpha \, d(\varrho_\alpha, \theta_1, \ldots, \theta_n) \, ; \text{ [11]}$$

da cui:

$$\int_{A^{\alpha}_{n+1}} \Phi_\alpha d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha) =$$

$$= (-2\pi i)^n r^{2n-2} \left[ \frac{\sum_{[\alpha]}{}_k \lambda_k}{(2r^2)^{n-2}} \int_0^r \frac{d\varrho_\alpha^2}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)^2} - (n-1)\lambda_\alpha \int_0^r \frac{d\varrho_\alpha^2}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)^n} \right] =$$

$$= (-2\pi i)^n \left[ \frac{\sum_k \lambda_k}{2^{n-1}} - \lambda_\alpha \right],$$

che coincide col suo limite per $r \to 0$, dato che risulta indipendente da $r$.

---

[11]) Si badi che, data l'orientazione fissata al n. 4 per $A^{\alpha}_{n+1}$, $d(\varrho_\alpha, \theta_1 \ldots, \theta_n)$ risulta positivo su tale varietà. Pertanto il successivo calcolo dell'integrale sopra $A^{\alpha}_{n+1}$, si fa trasformando l'integrale stesso in un integrale multiplo ordinario mediante la semplice sostituzione delle espressioni ottenute per $\Phi_\alpha$ e $d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha)$.

Sostituendo nella (14) si ha:

$$-f(0,\ldots,0)\ (-2\pi i)^n\left[\frac{1}{2^{n-1}}\ \Sigma_k \lambda_k\ \Sigma_\alpha N_\alpha - \Sigma_\alpha \lambda_\alpha N_\alpha\right],$$

e, tenendo ancora una volta conto che $\Sigma_\alpha N_\alpha = 0$, si ottiene finalmente

$$f(0,\ldots,0)\,(-2\pi i)^n\ \Sigma_\alpha \lambda_\alpha N_\alpha\,,$$

che non differisce dal primo membro della (1). La formula stessa è pertanto dimostrata.

(Reçu le 24 mai 1945.)