Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Formula di Cauchy (n+1)- dimensionale per le funzioni analitiche di n variabili complesse.

Autor: Martinelli, Enzo

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16891

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Formula di Cauchy $(n+1)$-dimensionale per le funzioni analitiche di n variabili complesse [1]

Di Enzo Martinelli, Roma

Ad Andreas Speiser nel suo 60° compleanno.

1. La teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa poggia sopra due risultati fondamentali di *Cauchy:* il primo e il secondo teorema integrale (o formula integrale). Che cosa può dirsi circa l'estensione di questi alle funzioni di più variabili complesse?

È noto che, per n variabili, l'estensione del primo teorema dà luogo ad n teoremi integrali distinti, dove le varietà d'integrazione sono cicli di dimensioni rispettive $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$, appartenenti allo S_{2n} ove si rappresentano le variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$. Gli n teoremi posson venir espressi compendiosamente così:

$$\int_{V_{n+l}} f(z_1, \ldots, z_n)\ d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \ldots, \bar{z}_{\alpha_l}) = 0 \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

essendo V_{n+l} cicli $(n+l)$-dimensionali omologhi a zero[2]) nel campo di olomorfismo della $f(z_1, \ldots, z_n)$, $\bar{z}_\alpha$ complesso coniugato di z_α, ed $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ una combinazione qualunque di classe l degl'interi $1, \ldots, n$ [3]). Ciascuno dei precedenti teoremi è altresì sufficiente a caratterizzare tra le funzioni continue $f(z_1, \ldots, z_n)$, quelle che sono analitiche (estensione dei teoremi di *Morera* e *Severi*).

È naturale la presunzione che, parallelamente agli n teoremi integrali, sussistano altrettante formule integrali, estensioni della formula di *Cauchy*, nelle quali compaiano integrazioni sopra cicli di dimensione $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$. Per la dimensione n si tratta di un'estensione già da molto tempo nota in forma rudimentale, e di recente in forma generale, ove la varietà d'integrazione è sottomessa soltanto a condizioni topologiche[4]). La formula corrispondente alla dimensione

---

[1]) *Anmerkung der Redaktion.* Die vorliegende Arbeit war für die Festschrift Andreas Speiser, Orell Füssli, 1945, berechnet. Wegen verspätetem Eintreffen konnte sie leider nicht mehr in diese aufgenommen werden.

[2]) È lecito di riferirsi all'omologia con divisione, che nel seguito indicheremo col segno $\approx$, riservando il segno $\sim$ per l'omologia ordinaria.

[3]) Per $l = 0$ si tratta del classico risultato di *Poincaré*; per $l = n - 1$ cfr. *W. Wirtinger*, „Monatshefte für Math. und Phys." (1937), B. 45, pag. 418; per l qualunque e per i teoremi inversi cfr. un mio lavoro in „Memorie R. Acc. Italia" (1938), vol. IX, pag. 269.

[4]) Per $n = 2$ cfr. un mio lavoro in „Rend. R. Acc. Lincei" (1937), t. 25, pag. 33; per n qualunque cfr. *B. Segre*, „Atti 1° Congresso Unione Mat. Ital." (1937), pag. 174, nonché un mio lavoro in „Commentarii Math. Helvetici", t. 17 (1944), pag. 201.

$2n - 1$ appare nel mio lavoro citato in[3]). Restavano da determinare le formule corrispondenti a tutte le dimensioni intermedie. Faccio ora un altro passo verso la risoluzione completa della questione, presentando la formula integrale corrispondente alla dimensione $n + 1$, mentre mi riservo di trattare il caso generale in un prossimo lavoro.

È opportuno premettere qualche convenzione. Supporremo intanto che il punto O della regione di olomorfismo R_{2n} (anche non univalente) della funzione analitica $f(z_1, \ldots, z_n)$, nel quale si vuole esprimere il valore della funzione stessa, coincida coll'origine delle coordinate dello $S_{2n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ $(z_j = x_j + iy_j, j = 1, \ldots, n)$. Ciò per abbreviare la scrittura, senza ledere la generalità, poiché si passa al caso di un punto $O(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ sostituendo z_j con $z_j - \zeta_j$. Porremo inoltre: $z_j \bar{z}_j = |z_j|^2 = s_j$. Infine conveniamo di indicare tra parentesi quadre uno o più valori, come $[\alpha]$, $[\alpha, \beta]$, ecc., che s'intenda di escludere nella variabilità di un indice nella successione degli interi $1, \ldots, n$. Così p. es. si scriverà succintamente $\bar{z}_{1 \ldots [\alpha] \ldots} \bar{z}_n$ in luogo di $\bar{z}_1 \ldots \bar{z}_{\alpha-1} \bar{z}_{\alpha+1} \ldots \bar{z}_n$; $\underset{[\alpha]}{\Sigma_j}, \underset{[\alpha]}{\Pi_j}$ (e simili) per indicare rispett. simboli di somma e di prodotto dove l'indice j può percorrere gl'interi $1, \ldots, n$ con esclusione di α. In ogni altro simbolo di somma, come Σ_j, Σ_α, ecc., senza indicazione di valori da escludere, s'intende che l'indice può percorrere tutti gl'interi $1, \ldots, n$.

Ciò posto, la formula che stabiliremo è la seguente:

$$(1) \qquad (-2\pi i)^n (\Sigma_j \lambda_j N_j) f(0, \ldots, 0) =$$

$$\int_{V_{n+1}} f(z_1, \ldots, z_n) \sum_\alpha \bar{z}_{1 \ldots [\alpha] \ldots} \bar{z}_n \sum_{\substack{k \\ [\alpha]}} \frac{1}{s_\alpha + s_k} \left\{ \frac{\lambda_k}{\underset{[k]}{\Pi_j} (s_k + s_j)} - \frac{\lambda_\alpha}{\underset{[\alpha]}{\Pi_j} (s_\alpha + s_j)} \right\} d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha),$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono parametri complessi *arbitrari*[5]), V_{n+1} è un ciclo $(n + 1)$-dimensionale orientabile dello S_{2n}, soddisfacente alle condizioni topologiche che sono oltre precisate, insieme al significato degli interi $N_1, \ldots, N_n$.

Si considerino gli $\binom{n}{2}$ spazi caratteristici S_{2n-4} uscenti dal punto O in S_{2n}, di equazioni rispettive:

$$z_\alpha = z_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n;\ \alpha \neq \beta) .$$

[5]) L'introduzione dei parametri λj è diretta a condensare in una sola formula simmetrica un gruppo di n formule diverse, che rispondono al problema nel caso $(n + 1)$-dimensionale; mentre nei casi n-dimensionale e $(2n - 1)$-dimensionale le formule relative sono univocamente determinate.

Indicato con T_{2n-4} l'insieme di questi spazi, *le condizioni cui deve soddisfare il ciclo* V_{n+1} *per la validità della* (1) *sono le seguenti:*

$$V_{n+1} \subset R_{2n} - T_{2n-4}\,; \qquad \text{(I)}$$
$$V_{n+1} \approx 0 \quad in \quad (R_{2n} - T_{2n-4}) + O. \qquad \text{(II)}$$

Osserviamo fin d'ora che la (I) serve ad assicurare che la forma differenziale integranda a secondo membro della (1) sia regolare sopra V_{n+1}. Infatti, entro la regione R_{2n} di olomorfismo della $f(z_1, \dots, z_n)$ possono presentarsi singolarità della predetta forma integranda soltanto in corrispondenza all'annullarsi di qualcuno dei denominatori del tipo $s_\alpha + s_\beta$; quindi per $|z_\alpha|^2 + |z_\beta|^2 = 0$, cioè $z_\alpha = z_\beta = 0$: vale a dire sopra T_{2n-4}.

Per definire gl'interi N_j, che sono caratteri topologici del ciclo V_{n+1} dipendenti dalla sua posizione rispetto a T_{2n-4}, o, più precisamente, dalla sua condizione d'allacciamento con T_{2n-4}, consideriamo in ciascun piano caratteristico coordinato $z_j (j = 1, \dots, n)$ dello S_{2n} (di equazioni $z_1 = \dots_{[j]} \dots = z_n = 0$), una semiretta t_j uscente dall'origine, ed orientata nel verso che fa allontanare dall'origine stessa, p. es. il semiasse reale orientato ordinariamente. Le n semirette individuano un n-edro *solido* E_n, che può pensarsi (per concretarne più facilmente l'immagine) come proiezione da O di un $(n-1)$-simplesso e_{n-1}. Entro e_{n-1} si considerino gli n cicli $(n-3)$-dimensionali $h^j_{n-3} (j = 1, \dots, n)$ che sono contorno delle singole facce del simplesso. Per proiezione da O si ottengono altrettanti cicli $(n-2)$-dimensionali H^j_{n-2}, che appartengono ad E_n e, come si verifica subito, a T_{2n-4}[6]). Supporremo i cicli $H^j_{n-2} (j = 1, \dots, n)$ ordinati in guisa che H^j_{n-2} sia quello dei cicli che non ha punti sul piano caratteristico z_j. Per proiezione da O della faccia k^j_{n-2} di e_{n-1} che ha per contorno h^j_{n-3}, si ottiene un $(n-1)$-edro solido, che indicheremo con K^j_{n-1}, il quale ha per contorno H^j_{n-2}, ed è individuato dalle semirette $t_{1, \dots [j] \dots,}\, t_n$. Supporremo fissata in K^j_{n-1} l'orientazione determinata dall'$(n-1)$-edro delle direzioni delle predette semirette orientate ed ordinate, quando j è dispari; l'orientazione opposta, quando j è pari. Con ciò resta fissata un'orientazione altresì sui cicli contorno H^j_{n-2}, tenuto conto della quale si verifica subito che $\Sigma_j H^j_{n-2} = 0$.

[6]) Si tratta di cicli *relativi* della varietà aperta T_{2n-4}. Se si chiude lo S_{2n} euclideo coll'aggiunta di un punto all'infinito, il quale viene ad aggiungersi a T_{2n-4} ed ai cicli H^j_{n-2}, questi divengono cicli *assoluti* (n. 4). (Per i concetti di ciclo relativo e assoluto, cfr. p. es. *Lefschetz*, Topology, New York, 1930, pag. 17.)

Ciò premesso, l'intero N_j è definito come *indice d'allacciamento di* V_{n+1} *e* H^j_{n-2} *entro lo* S_{2n} *orientato mediante il* $2n$*-edro delle direzioni positivi degli assi ordinati* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$; cioè, in simboli:

$$N_j = All\,(V_{n+1}\,,\ H^j_{n-2}) = [V_{n+1}\,,\ K^j_{n-1}]\,, \tag{2}$$

dove con la parentesi quadra si simboleggia l'indice di *Kronecker* delle varietà indicate[7]). Giova avvertire che gl'interi N_j non sono fra loro indipendenti, ma legati dalla relazione $\Sigma_j N_j = 0$, la quale si deduce subito osservando che $\Sigma_j N_j$ deve uguagliare l'indice d'allacciamento di V_{n+1} col ciclo nullo $\Sigma_j H^j_{n-2}$.

Aggiungiamo che, affinché la formula (1) serva di fatto ad esprimere il valore della $f(z_1, \ldots, z_n)$ nel punto O, occorre ancora, naturalmente, sia soddisfatta la condizione:

$$\Sigma_j \lambda_j N_j \neq 0\,. \tag{III}$$

È sempre possibile soddisfare alla (III) con conveniente scelta dei parametri arbitrari λ_j, purché non siano tutti nulli gl'interi N_j (il che accade soltanto allorché sia $V_{n+1} \approx 0$ in $S_{2n} - T_{2n-4}$; cfr. n. 5). D'altra parte è facile costruire cicli soddisfacenti alle condizioni (I), (II), e con gl'interi ad essi relativi non simultaneamente nulli (sono tali p. es. i cicli Γ^{kh} di cui nel n. 4).

Osserviamo infine che, mentre per $n = 1$ la formula (1) non si può scrivere, per $n=2$ essa riducesi alla formula $(2n-1)$-dimensionale sopra citata. In tal caso, infatti, $T_{2n-4} = T_0$ si riduce al punto O, $V_{n+1} = V_3$ ad una ipersuperficie chiusa di S_4, $N_1 = -N_2$ al numero delle volte che V_3 racchiude il punto O. Riferendosi per es. ad una V_3 racchiudente semplicemente O $(N_1 = -N_2 = 1)$, la (1) diviene:

$$-4\pi^2(\lambda_1-\lambda_2)\, f(0,0) = (\lambda_1-\lambda_2) \int_{V_3} f(z_1, z_2)\, \frac{\bar z_1 d(z_1, z_2, \bar z_2(z_1 \bar z_1) - \bar z_2 d(z_1, z_2, \bar z_1)}{(z_1 \bar z_1 + z_2 \bar z_2)^2}\,,$$

formula che, soppresso il fattore inessenziale $\lambda_1 - \lambda_2$, coincide colla formula $(2n-1)$-dimensionale per $n = 2$.

2. Otterremo la dimostrazione della (1) percorrendo la strada seguente, che cominciamo coll'indicare per sommi capi. In primo luogo si proverà che la forma differenziale integranda a secondo membro della (1), che

[7]) Per la nozione e le proprietà degl'indici di *Kronecker* e d'allacciamento, cfr. p. es. *Alexandroff-Hopf*, Topologie (Berlin 1935), cap. XI.

chiameremo brevemente ω, è non soltanto regolare in $R_{2n} - T_{2n-4}$ (come già osservato al n. 1) ma anche *integrabile*; vale a dire che si annulla identicamente il differenziale di *Cartan* $d\omega$ della forma stessa. Ciò assicura intanto che il secondo membro della (1) non si altera sostituendo V_{n+1} con un qualunque ciclo omologo nel campo di regolarità di ω, cioè in $R_{2n} - T_{2n-4}$. Tenuto conto di questo, si sostituirà poi V_{n+1} (o un suo multiplo) con una somma di cicli di struttura nota e comunque prossimi ad O, e si mostrerà che, al tendere di questi cicli ad O, la somma degl'integrali corrispondenti tende al valore che appare nel primo membro della (1).

Cominciamo dalla verifica del primo punto: $d\omega = 0$. Posto

$$\omega = f(z_1, \ldots, z_n) \sum_\alpha \Phi_\alpha(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha),$$

ricordiamo[8]) che il calcolo di $d\omega$ può eseguirsi rispetto alle variabili $z_j, \bar{z}_j (j = 1, \ldots, n)$ pensate come indipendenti e che, per l'analiticità della $f(z_1, \ldots, z_n)$, risulta $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0\ (j = 1, \ldots, n)$. Si ha allora:

$$d\omega = \frac{(-1)^n}{2} f \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta} \right) d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta} = \bar{z}_{1\ldots[\alpha\beta]\ldots}\bar{z}_n \left(\Phi_\beta + \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial s_\alpha} - \Phi_\alpha - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial s_\beta} \right). \tag{3}$$

Un facile calcolo dà poi:

$$\Phi_\beta + \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial s_\alpha} = \sum_{[\alpha\beta]} {}_k \frac{\lambda_k s_k}{(s_\alpha + s_k)(s_\beta + s_k) \prod_{[k]} {}_j (s_k + s_j)} -$$

$$- \sum_{[\alpha]} {}_k \frac{\lambda_\alpha s_\alpha}{(s_\alpha + s_\beta)(s_\alpha + s_k) \prod_{[\alpha]} {}_j (s_\alpha + s_j)} - \sum_{[\beta]} {}_k \frac{\lambda_\beta s_\beta}{(s_\alpha + s_\beta)(s_\beta + s_k) \prod_{[\beta]} {}_j (s_\beta + s_j)} +$$

$$+ \frac{\lambda_\alpha s_\beta}{(s_\alpha + s_\beta)^2 \prod_{[\alpha]} {}_j (s_\alpha + s_j)} + \frac{\lambda_\beta s_\alpha}{(s_\alpha + s_\beta)^2 \prod_{[\beta]} {}_j (s_\beta + s_j)},$$

espressione che risulta simmetrica rispetto agl'indici α, β, onde uguaglia altresì $\Phi_\alpha + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial s_\beta}$. Dalle (2), (3) segue pertanto $d\omega = 0$.

---

[8]) Cfr. alla pag. 273 del mio lavoro cit.: „Mem. R. Acc. It." (1938), vol. IX.

3. Passiamo alla seconda parte della dimostrazione. Secondo quanto si è detto al n. 2, per calcolare il secondo membro della (1) può sostituirsi a V_{n+1} un qualunque ciclo omologo in $R_{2n} - T_{2n-4}$. Ora, in base all'ipotesi (II) del n. 1, sappiamo che $V_{n+1} \approx 0$ in $(R_{2n} - T_{2n-4}) + O$, cioè che un conveniente multiplo mV_{n+1} del ciclo V_{n+1} (m intero non nullo) è contorno di una varietà M_{n+2} di $(R_{2n} - T_{2n-4}) + O$, la quale può sempre costruirsi passante per O [9]). Un intorno comunque piccolo di O sopra M_{n+2} ha per contorno un ciclo $V'_{n+1} \sim mV_{n+1}$ in $R_{2n} - T_{2n-4}$. Onde, diviso per m il secondo membro della (1), è lecito sostituire a V_{n+1} il nuovo ciclo V'_{n+1}, il quale potrà supporsi contenuto in un n-cilindro C_{2n} di equazioni $|z_1| \leqslant r, \ldots, |z_n| \leqslant r$, con raggio r arbitrariamente piccolo, e che noi assumeremo tale che l'n-cilindro appartenga per intero alla regione R_{2n}.

Il calcolo del secondo membro della (1) è così ridotto al calcolo di $\int_{V'_{n+1}} \omega$ e questo, quando si conosco la base rispetto all'omologia con divisione per i cicli $(n+1)$-dimensionali di $C_{2n} - T_{2n-4}$, potrà ulteriormente ridursi al calcolo dell'integrale di ω sopra i cicli base. È d'uopo pertanto determinare la detta base, ciò che è equivalente, come vedremo, alla determinazione della base $(n+1)$-dimensionale di $S_{2n} - T_{2n-4}$; alla ricerca della quale ci rivolgiamo perciò nel n. seguente, estendendo un procedimento usato da *B. Segre* nel lavoro citato da principio.

4. Si considerino in $S_{2n} - T_{2n-4}$ le varietà $(n+1)$-dimensionali A^j_{n+1} $(j = 1, \ldots, n)$ definite dalle equazioni:

$$|z_1| = \ldots_{[j]}\ldots = |z_n| = r\,, \qquad |z_j| \leqslant r\,.$$

Le varietà A^j_{n+1}, ciascuna delle quali è prodotto topologico di $n-1$ circonferenze e di un cerchio, appartengono al contorno di C_{2n}. Cominciamo col dimostrare che $S_{2n} - T_{2n-4}$ può *contrarsi omotopicamente* sopra la varietà $\sum_j A^j_{n+1}$.

Sia $P(z_1, \ldots, z_n)$ un punto qualunque di $S_{2n} - T_{2n-4}$. Posto $z_j = \varrho_j e^{i\theta_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, sia ϱ_k il minore ϱ_j (ovvero, se il minimo dei ϱ_j è raggiunto in corrispondenza a due o più valori dell'indice j, sia ϱ_k uno dei ϱ_j minimi arbitrariamente scelto). S'indichi poi con ϱ il valore

[9]) Da una varietà che non passi per O se ne ottiene subito un'altra che soddisfa a questa condizione mediante l'aggiunta di un tubicino $(n+2)$-dimensionale che conduca ad O. D'altronde, se esiste una M_{n+2} non passante per O, vuol dire che $V_{n+1} \approx 0$ in $R_{2n} - T_{2n-4}$, onde il secondo membro della (1) è nullo, ed è nullo anche il primo poiché valgono zero tutti gl'indici d'allacciamento N_j di V_{n+1} con i cicli H^j_{n-2} di T_{2n-4}.

minimo di $\varrho_{1\ldots[k]\ldots}\varrho_n$. Ciò posto, consideriamo la trasformazione che muta P nel punto $P^{(t)}$ di coordinate:

$$\left\{\begin{aligned} z_j^{(t)} &= [\varrho_j + t(r-\varrho_j)]\, e^{i\theta_j} \quad (j=1,\ldots,[k],\ldots,n) \\ z_k^{(t)} &= [\varrho_k + t(r\frac{\varrho_k}{\varrho} - \varrho_k)]\, e^{i\theta_k}\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

essendo t un parametro reale definito nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 1$.

Non è difficile riconoscere che questa trasformazione, per qualunque t dell'intervallo detto, è univoca e continua al variare di P in $S_{2n} - T_{2n-4}$. Basta tener conto delle seguenti osservazioni. In primo luogo è sempre $\varrho \neq 0$, poiché, essendo esclusi i punti di T_{2n-4}, può annullarsi uno solo al più dei ϱ_j, e quindi ϱ_k. In secondo luogo, quando $\varrho_k = 0$, pur risultando θ_k indeterminato, non viene da ciò indotta alcuna indeterminazione nella posizione di $P^{(t)}$, giacché si ha allora $z_k^{(t)} = 0$ per ogni t. Infine, quando per un dato punto P esistano più ϱ_k minimi, l'indeterminazione che ne consegue per le (4) in relazione alla scelta di ϱ_k, è soltanto apparente, perché di fatto, essendo allora $\varrho_k = \varrho$, le (4) riduconsi alle

$$z_j^{(t)} = [\varrho_j + t(r-\varrho_j)]\, e^{i\theta_j} \qquad (j=1,\ldots,n)\,,$$

che sono indipendenti dall'indice k.

Si osservi ora che, per $t=0$ il punto $P^{(t)}$ coincide con P, e per $t=1$ col punto di coordinate

$$\left\{\begin{aligned} z_j^{(1)} &= r e^{i\theta_j} \quad (j=1,\ldots,[k],\ldots,n) \\ z_k^{(1)} &= r\frac{\varrho_k}{\varrho} e^{i\theta_k}\,, \end{aligned}\right.$$

il quale appartiene ad A_{n+1}^k, in quanto $|z_k^{(1)}| = r\dfrac{\varrho_k}{\varrho} \leqslant r$. Inoltre, se già il punto P sta sopra $\Sigma_j A_{n+1}^k$, risulta $\varrho_k = 0$, onde $P^{(t)}$ coincide con P per ogni t. Si conclude dunque che, al variare di t da 0 ad 1, la trasformazione considerata definisce effettivamente una contrazione omotopica di $S_{2n} - T_{2n-4}$ in $\Sigma_j A_{n+1}^j$, secondo desideravasi.

L'esistenza di siffatta contrazione, assicura che ogni ciclo assoluto (cioè tutto al finito) di $S_{2n} - T_{2n-4}$ può ridursi omotopicamente sopra $\Sigma_j A_{n+1}^j$, e quindi che ha un suo omologo su tal varietà. D'altra parte, se un ciclo Γ di $\Sigma_j A_{n+1}^j$ è ~ 0 in $S_{2n} - T_{2n-4}$, vuol dire che esiste una varietà L_{n+2} di $S_{2n} - T_{2n-4}$ che ha per contorno Γ; onde applicando ad L_{n+2} la contrazione omotopica, L_{n+2} si trasforma in una varietà (singolare) L'_{n+2} di $\Sigma_j A^j_{n+1}$ che ha ancora per contorno Γ, e quindi Γ è altresì ~ 0 sopra $\Sigma_j A^j_{n+1}$. Da ciò si trae che come base per i cicli al finito di $S_{2n} - T_{2n-4}$, di qualunque dimensione (e a noi interessa la dimensione $n+1$), può prendersi una base per i cicli della stessa dimensione sopra $\Sigma_j A^j_{n+1}$.

La determinazione di una base di dimensione $n+1$ sopra $\Sigma_j A^j_{n+1}$ è d'altronde immediata. Si osservi invero che le varietà A^j_{n+1} s'incontrano soltanto nei punti del comune contorno costituito dall'n-toro (prodotto di n circonferenze) di equazioni $|z_1| = \cdots = |z_n| = r$. Supponiamo le varietà A^j_{n+1} orientate in guisa che il loro comune contorno risulti orientato allo stesso modo per qualunque j. Si soddisfa a tale requisito p. es. orientando A^j_{n+1} mediante l' $(n+1)$-edro di direzioni uscenti dal punto $x_1 = \cdots = x_n = r$, $y_1 = \cdots = y_n = 0$, delle quali la prima è parallela ed equiversa al semiasse positivo delle x_j, e le rimanenti ordinatamente ai semiassi positivi delle $y_1, \ldots, y_n$. (Tale orientazione è la stessa o l'opposta, a seconda della parità o disparità di j, di quella che si otterrebbe assumendo orientazioni destrorse per le $n-1$ circonferenze e per il cerchio di cui A^j_{n+1} è prodotto topologico, quando questo si pensi eseguito considerando i piani coordinati $z_1, \ldots, z_n$ nell'ordine naturale). In queste condizioni le $\binom{n}{2}$ varietà

$$\Gamma^{kh}_{n+1} = A^k_{n+1} - A^h_{n+1} \qquad (k, h = 1, \ldots, n \; ; \quad k \neq h)$$

sono dunque cicli orientati $(n+1)$-dimensionali della varietà $\Sigma_j A^j_{n+1}$. Di questi gli $n-1$ cicli Γ^{k1}, $\Gamma^{k2} \ldots_{[k]} \ldots \Gamma^{kn}$, per ogni k *fissato*, formano evidentemente *una base sopra la varietà stessa, e quindi in* $S_{2n} - T_{2n-4}$.

Prima di passare ad applicare il risultato ottenuto al calcolo dell'integrale di cui al n. 3, osserviamo quanto segue. Coll'aggiunta di un punto all'infinito, possiamo pensare lo S_{2n} euclideo come uno *spazio sferico* $\overline{S}_{2n}$. L'aggiunta del punto stesso a T_{2n-4}, muta T_{2n-4} in una varietà chiusa $\overline{T}_{2n-4}$, e risulta $S_{2n} - T_{2n-4} = \overline{S}_{2n} - \overline{T}_{2n-4}$. I teoremi concernenti la *dualità di Alexandroff* [10]), ci assicurano allora l'esistenza in $\overline{T}_{2n-4}$ di una base di dimensione $n-2$ *duale* della base di dimensione $n+1$ determinata in $S_{2n} - T_{2n-4}$, siffatta che i mutui coefficienti d'allacciamento dei cicli fondamentali delle due basi diano luogo ad una matrice unitaria. Ebbene, dico che una base duale della $\Gamma^{k1}_{n+1}, \ldots_{[k]} \ldots$,

---

[10]) Cfr. p. es. il trattato di *Alexandroff-Hopf*, cap. XI.

Γ^{kn}_{n+1}, è costituita dai cicli H^1_{n-2}, $H^2_{n-2}, \ldots [k] \ldots, H^n_{n-2}$ di $\overline{T}_{2n-4}$, definiti al n. 1. Si tratta di valutare gl'indici d'allacciamento:

$$All\,(\Gamma^{k\alpha}_{n+1},\, H^\beta_{n-2}) = [\Gamma^{k\alpha}_{n+1},\, K^\beta_{n-1}] = [A^k, K^\beta] - [A^\alpha, K^\beta]\,,$$

per $\alpha = 1, \ldots [k] \ldots, n$ e $\beta = 1, \ldots [k] \ldots, n$, essendo $K^\beta_{n-1} \rightarrow H^\beta_{n-2}$ secondo si è detto al n. 1. Risulta in ogni caso $[A^k, K^\beta] = 0$, e altresì $[A^\alpha, K^\beta] = 0$ per $\alpha \neq \beta$. Ricordata l'orientazione fissata per S_{2n} e per K^β_{n-1} al n. 1, risulta inoltre $[A^\alpha, K^\alpha] = -1$; onde si ha in definitiva:

$$All\,(\Gamma^{k\alpha}_{n+1},\, H^\beta_{n-2}) = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha = \beta \\ 0 & \text{per } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, [k], \ldots, n)\,, \tag{5}$$

il che prova l'asserto.

5. Ritorniamo al ciclo V'_{n+1} di $C_{2n} - T_{2n-4}$, di cui al principio del n. 3. Se si tien conto che la contrazione costruita nel n. precedente conserva ogni punto di C_{2n} su cui agisce entro C_{2n} stesso, si trae senz'altro che la base $(n+1)$-dimensionale determinata sopra $\Sigma_j A^j_{n+1}$, è base pei cicli di quella dimensione sia in $S_{2n} - T_{2n-4}$ che in $C_{2n} - T_{2n-4}$. Può scriversi allora:

$$V'_{n+1} \approx \sum_{[k]} {}_\alpha\, c_{k\alpha} \Gamma^{k\alpha}_{n+1} \quad \text{in} \quad C_{2n} - T_{2n-4}\,, \tag{6}$$

con k arbitrariamente fissato e $c_{k\alpha}$ convenienti interi. Per determinare i coefficienti $c_{k\alpha}$, si osservi che la (6) stessa è valida a maggior ragione in $S_{2n} - T_{2n-4}$, dove è anche $V'_{n+1} \sim m V_{n+1}$; quindi risulta

$$m\, V_{n+1} \approx \sum_{[k]} {}_\alpha\, c_{k\alpha} \Gamma^{k\alpha}_{n+1} \quad \text{in} \quad S_{2n} - T_{2n-4}\,.$$

E quest'ultima, a sua volta, sussiste a maggior ragione in $S_{2n} - H^\beta_{n-2}$ $(\beta = 1, \ldots [k] \ldots, n)$, onde si ha:

$$m\, All\,(V_{n+1},\, H^\beta_{n-2}) = \sum_{[k]} {}_\alpha\, c_{k\alpha}\, All\,(\Gamma^{k\alpha}_{n+1},\, H^\beta_{n-2})\,.$$

Tenuto conto delle (5) e del significato degli interi N_j (n. 1), se ne deducono le relazioni:

$$c_{k\beta} = m\, All\,(V_{n+1},\, H^\beta_{n-2}) = m N_\beta \quad (\beta = 1, \ldots [k] \ldots, n)\,, \tag{7}$$

che determinano i coefficienti $c_{k\beta}$ (e mostrano ch'essi sono indipendenti dall'indice k).

Ricordato che (n. 3) la sostituzione di V_{n+1} con V'_{n+1} nel secondo membro della (1) è lecita previa divisione per l'intero m, e tenuto conto delle (6), (7), risulta che il secondo membro della (1) equivale a

$$\int_{\sum_{\alpha}^{[k]} N_\alpha \Gamma_{n+1}^{k\alpha}} \omega = \sum_\alpha^{[k]} N_\alpha \int_{\Gamma_{n+1}^{k\alpha}} \omega = \tag{8}$$
$$= \sum_\alpha^{[k]} N_\alpha \Big[\int_{A_{n+1}^k} \omega - \int_{A_{n+1}^\alpha} \omega \Big] = \sum_\alpha N_\alpha \Big[\int_{A_{n+1}^k} \omega - \int_{A_{n+1}^\alpha} \omega \Big] .$$

Finalmente, poiché $\Sigma_\alpha N_\alpha = 0$ (n. 1), si ha per il secondo membro della (1) l'espressione:

$$-\sum_\alpha N_\alpha \int_{A_{n+1}^\alpha} \omega \ . \tag{9}$$

6. Siamo ormai all'ultimo passo: la valutazione della somma d'integrali (9).

Fruiamo della seguente rappresentazione parametrica di A_{n+1}^α:

$$z_j = r e^{i\theta_j} \qquad (j = 1, \ldots [\alpha] \ldots, n) \ , \qquad z_\alpha = \varrho_\alpha e^{i\theta_\alpha} , \tag{10}$$

ove i parametri sono: $\theta_1, \ldots, \theta_n$ variabili da 0 a 2π, e ϱ_α variabile da 0 ad r. Tenuto conto delle (10) e delle altre che se ne deducono:

$$\bar{z}_j = r e^{-i\theta_j} \qquad (j = 1, \ldots [\alpha] \ldots, n) \ , \qquad \bar{z}_\alpha = \varrho_\alpha e^{-i\theta_\alpha} \ , \tag{11}$$

risulta sopra A_{n+1}^α :

$$\left.\begin{aligned} d(z_j, \bar{z}_j) &= d(r e^{i\theta_j}, \ r e^{-i\theta_j}) = -r^2 d(\theta_j, \theta_j) = 0 \ \text{ per } j \neq \alpha \\ d(z_\alpha, \bar{z}_\alpha) &= d(\varrho_\alpha e^{i\theta_\alpha}, \varrho_\alpha e^{-i\theta_\alpha}) = -2i\varrho_\alpha d(\varrho_\alpha, \theta_\alpha) \ . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Pertanto, tutte le n forme differenziali monomie nelle quali si spezza $\omega = f(z_1, \ldots, z_n) \, \Sigma_j \Phi_j d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_j)$, si annullano identicamente sopra A_{n+1}^α all'infuori di $f(z_1, \ldots, z_n) \, \Phi_\alpha d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha)$. L'espressione (9) si riduce così a

$$-\sum_\alpha N_\alpha \int_{A_{n+1}^\alpha} f(z_1, \ldots, z_n) \ \Phi_\alpha \, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha) \ . \tag{13}$$

Ora osserviamo che, se si fa tendere r a zero, variano nella (13) le varietà d'integrazione A^{α}_{n+1}, ma non varia il valore della (13) stessa. Infatti, la variazione di r produce in sostanza una variazione omotopica entro $C_{2n} - T_{2n-4}$ del ciclo $\Sigma_{[k]\alpha} N_\alpha \Gamma^{k\alpha}_{n+1}$ al quale è esteso l'integrale (8), integrale che, come si è visto, equivale a (13). E poiché la sostituzione del ciclo d'integrazione con altro omologo nel campo di regolarità della forma integranda ω, non altera il valore dell'integrale (n. 2), si conclude come si è asserito. Tenuto conto di ciò e della continuità della $f(z_1, \ldots, z_n)$, la (13) può sostituirsi con:

$$-f(0, \ldots, 0) \sum_\alpha N_\alpha \lim_{r \to 0} \int_{A^{\alpha}_{n+1}} \Phi_\alpha \, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha) \; . \tag{14}$$

In base alle (10), (11), (12) si ha poi su A^{α}_{n+1}:

$$\Phi_2 = r^{n-1} e^{-i(\theta_1 + \cdots [\alpha] \cdots + \theta_n)} \sum_{[\alpha]k} \frac{1}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)} \left\{ \frac{\lambda_k}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)\,(2r^2)^{n-2}} - \frac{\lambda_\alpha}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)^{n-1}} \right\},$$

$$d(z_j, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha) = 2(-1)^n r^{n-1} e^{i(\theta_1 + \cdots [\alpha] \cdots + \theta_n)} \varrho_\alpha \, d(\varrho_\alpha, \theta_1, \ldots, \theta_n) \; ; \text{ [11]}$$

da cui:

$$\int_{A^{\alpha}_{n+1}} \Phi_\alpha d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha) =$$

$$= (-2\pi i)^n r^{2n-2} \left[\frac{\sum_{[\alpha]k} \lambda_k}{(2r^2)^{n-2}} \int_0^r \frac{d\varrho_\alpha^2}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)^2} - (n-1)\lambda_\alpha \int_0^r \frac{d\varrho_\alpha^2}{(\varrho_\alpha^2 + r^2)^n} \right] =$$

$$= (-2\pi i)^n \left[\frac{\sum_k \lambda_k}{2^{n-1}} - \lambda_\alpha \right],$$

che coincide col suo limite per $r \to 0$, dato che risulta indipendente da r.

---

[11]) Si badi che, data l'orientazione fissata al n. 4 per A^{α}_{n+1}, $d(\varrho_\alpha, \theta_1 \ldots, \theta_n)$ risulta positivo su tale varietà. Pertanto il successivo calcolo dell'integrale sopra A^{α}_{n+1}, si fa trasformando l'integrale stesso in un integrale multiplo ordinario mediante la semplice sostituzione delle espressioni ottenute per Φ_α e $d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_\alpha)$.

Sostituendo nella (14) si ha:

$$-f(0,\ldots,0)\ (-2\pi i)^n \left[\frac{1}{2^{n-1}}\ \Sigma_k \lambda_k\ \Sigma_\alpha N_\alpha - \Sigma_\alpha \lambda_\alpha N_\alpha\right],$$

e, tenendo ancora una volta conto che $\Sigma_\alpha N_\alpha = 0$, si ottiene finalmente

$$f(0,\ldots,0)\,(-2\pi i)^n\ \Sigma_\alpha \lambda_\alpha N_\alpha\,,$$

che non differisce dal primo membro della (1). La formula stessa è pertanto dimostrata.

(Reçu le 24 mai 1945.)