Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Le funzioni periodiche di più variabili.

Autor: Severi, Francesco

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16890

Le funzioni periodiche di più variabili [1]

Di FRANCESCO SEVERI, Roma

Ad Andreas Speiser
nel suo 60° compleanno.

Mi propongo di dar conto sommario qui[2]) di un piano di ricerche tuttora inedite, dirette a costruire una teoria generale delle funzioni periodiche di più variabili, a cui mi hanno condotto talune importanti questioni di geometria algebrica.

Le funzioni argomento del mio studio abbracciano la vastissima categoria di tutte le funzioni di più variabili, che ammettono un *teorema d'addizione* nel senso di *Weierstrass* e che sono state oggetto sopratutto di una profonda Memoria di *Painlevé*[3]), il quale ha dimostrato in proposito il seguente teorema fondamentale enunciato da *Weierstrass* nelle sue lezioni, ma di cui non si possedeva la dimostrazione: π funzioni (funzionalmente indipendenti) di π variabili, ammettenti un teorema di addizione, si esprimono algebricamente con π funzioni abeliane proprie o degeneri di π variabili aventi gli stessi periodi (e razionalmente con $\pi + 1$ funzioni siffatte).

L'analiticità delle funzioni di cui si parla non occorre: basta ch'esse sieno continue, a derivate prime continue per valori reali delle variabili. Da questa ipotesi, come ha osservato lo stesso *Painlevé*[4]) e come risulta dalla sua dimostrazione, consegue l'analiticità.

La ricerca di *Painlevé* completa e libera da qualche obiezione i risultati classici di *Picard* (1889—1895) sulle superficie e varietà algebriche possedenti gruppi continui abeliani, transitivi, di trasformazioni birazionali, aventi la dimensione uguale a quella della superficie o varietà ambiente.

L'esistenza di un gruppo siffatto sopra una V_π algebrica (irriducibile) di dimensione π, equivale all'esistenza su V_π di π integrali di differenziali totali (integrali semplici, come si dice), funzionalmente (e quindi linearmente) indipendenti i quali ammettono complessivamente un teorema d'inversione con funzioni analitiche uniformi, meromorfe al finito. Se questi integrali son tutti di prima specie, la V_π è una varietà

---

[1]) *Anmerkung der Redaktion.* Die vorliegende Arbeit war für die Festschrift Andreas Speiser, Orell Füssli, 1945, berechnet. Wegen verspätetem Eintreffen konnte sie leider nicht mehr in diese aufgenommen werden.

[2]) Per onorare il Collega illustre ed amico *Andreas Speiser* nel suo sessantesimo compleanno, lieto di riaffermare in questa occasione la mia simpatia a Lui e alla sua Patria.

[3]) Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition (Acta Mathematica, t. 27, 1903; volume in onore di *Abel*), p. 1.

[4]) Loc. cit., p. 5.

avente il punto (cioè ognuna delle coordinate di questo) funzione abeliana, 2π volte periodica, di π variabili (che son poi gl'integrali di 1ª specie). La varietà è inoltre di *rango* 1 (secondo l'accezione di *Enriques-Severi* nelle loro ricerche sulle superficie iperellittiche): cioè un suo punto proviene da un sol punto del parallelepipedo dei periodi nello spazio euclideo $S_{2\pi}$ ove si posson distendere le π variabili complesse.

Una tal varietà è stata designata (da *Enriques-Severi* e da *Castelnuovo*) colla denominazione, che useremo nel seguito, di *varietà di Picard*.

Essa inoltre ammette π *divisori*, cioè certi π interi, che intervengono a caratterizzare la matrice dei suoi π integrali semplici di 1ª specie, che son poi i periodi delle funzioni a cui essa dà luogo. Tali interi non son che i divisori elementari della forma bilineare principale appartenente a quella matrice e sono stati considerati dal punto di vista aritmetico da *Frobenius* (1879) e dal punto di vista geometrico da *Severi* (1905) e da *Enriques-Severi* (1907)[5]). Nella matrice dei periodi vi sono oltre questi interi, che posson assumere, sotto certe condizioni aritmetiche, valori arbitrari, $\frac{\pi(\pi+1)}{2}$ *moduli* variabili con continuità (sotto ben note condizioni puramente qualitative). Al variare dei divisori e dei moduli si ottiene ogni possibile *corpo di funzioni abeliane di π variabili*, un corpo essendo costituito dalla totalità delle funzioni razionali del punto di una V_π di Picard o, ciò che è lo stesso, da *tutte* le funzioni di π variabili meromorfe, al finito, 2π volte periodiche, i cui periodi hanno matrici *equivalenti*.

La identificazione dalle funzioni di π variabili $u_1, \ldots, u_\pi$, ammettenti un teorema d'addizione, con le funzioni più volte periodiche, uniformizzanti il punto di una certa varietà algebrica a π dimensioni, deriva da ciò, che, come si riconosce agevolmente, quelle funzioni costituiscon l'integrale generale (dipendente algebricamente dalle costanti d'integrazione):

$$x_1(u_1, u_2, \ldots, u_\pi), \quad x_2(u_1, u_2, \ldots, u_\pi), \ldots, x_\pi(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$$

di un sistema differenziale del tipo:

$$du_r = A_{r1}dx_1 + A_{r2}dx_2 + \cdots + A_{r\pi}dx_\pi \quad (r = 1, 2, \ldots, \pi),$$

i cui secondi membri son differenziali esatti a coefficienti A_{rs} algebrici.

Lo studio delle funzioni cui ci riferiamo può muovere altresì dalla

---

[5]) Per quel che concerne le funzioni abeliane rinvio alle belle litografie di *F. Conforto*, **Funzioni abeliane e matrici di Riemann** (Corsi del Reale Istituto di alta matematica, Roma, Libreria dell'Università, 1942).

considerazione della relazione fra il numero π delle variabili e il numero ν dei periodi. S'intende che si parla di *periodi simultanei* nelle π variabili, cioè di vettori dello spazio rappresentativo $S_{2\pi}$ delle variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, i quali operano sul punto $(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$. E che, alludendo al numero ν dei periodi, s'intende che si tratti di *periodi indipendenti*, ossia di ν vettori non legati da alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti interi non tutti nulli.

Ebbene, si riconosce agevolmente, come hanno fatto *Clebsch-Gordan*[6]) e *Frobenius*[7]), che una funzione di π variabili complesse $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ con $\nu > 2\pi$ periodi, ammette in conseguenza periodi infinitesimi, donde poi segue che la funzione riducesi a dipendere da meno di π variabili, le nuove essendo combinazioni lineari delle antiche[8]).

Il caso $\nu > 2\pi$ non offre pertanto interesse, in quanto conduce a funzioni che soltanto in apparenza dipendon da π variabili. Per le funzioni dipendenti effettivamente dalle π variabili u, è dunque sempre $\nu \leqslant 2\pi$; e se $\nu = 2\pi$ e trattasi di funzioni meromorfe (al finito), si cade nelle funzioni abeliane, per le quali esiste già una teoria largamente sviluppata. Si tratta perciò di prendere in considerazione le funzioni per cui $\nu < 2\pi$: funzioni analitiche, meromorfe al finito. Esse sono le funzioni abeliane degeneri, in quanto limiti di funzioni abeliane o, come più spesso le chiamiamo, essendo importante di studiarle anche a prescinder da questa loro origine, *funzioni quasi abeliane*.

1. Rievocati così i principali precedenti storico-bibliografici della teoria, riferisco brevemente sui miei risultati.

Chiamo *varietà quasi abeliana* una varietà V_π possedente un gruppo continuo abeliano, transitivo, ∞^π, di trasformazioni birazionali in sè: le *trasformazioni β di seconda specie*. E diciamo "di seconda specie" perchè si dimostra che la varietà contiene in ogni caso (cosa già osservata da *Castelnuovo* per le varietà di Picard) una serie continua ∞^π di *trasfor-*

---

[6]) Theorie der Abelschen Funktionen (Leipzig, Teubner, 1866), p. 130. L'asserzione non è ivi esplicita; ma il lemma del passo citato la contiene.

[7]) Über die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Funktionen, Abhandlung 1 (Crelle's Journal, 1884), p. 17.

[8]) Ved. p. es. *Conforto*, loc. cit., p. 15. È evidente che una funzione di $q < \pi$ variabili, considerata come funzione anche di altre $\pi - q$ variabili, ammette periodi aventi nulle le q componenti corrispondenti alle q variabili che compaiono effettivamente e arbitrarie le altre; sicché essa ammette periodi di accumulazione e quindi periodi infinitesimi. Se il numero dei periodi è $\nu > 2\pi$, rilsulta da quanto precede che non posson esistere π funzioni, funzionalmente indipendenti, con quei periodi. Estensione della proprietà classica inerente alle funzioni di una variabile, le quali non posson avere più di due periodi senza esser costanti.

mazioni α *di prima specie*, le quali son involutorie e moltiplicate a due a due dànno tutte le trasformazioni di 2ª specie.

Una notevole classe di V_π quasi abeliane, il cui studio è più accessibile e può servire di guida al caso generale, è quella che proviene dalle curve algebriche, attraverso la teoria delle *serie lineari neutre*, che sviluppo sistematicamente in modo preliminare nella mia ricerca. Ecco qualche indicazione in proposito, tralasciando per brevità i precedenti. Sopra una curva C di genere $p \geqslant 0$ (ci riferiamo, com'è lecito nella geometria delle trasformazioni birazionali, ad un modello senza punti multipli) sieno date δ_1 coppie distinte di punti distinti e δ_2 coppie distinte di punti coincidenti. Queste $\delta = \delta_1 + \delta_2$ coppie definiscono un campo di serie lineari neutre, brevemente un *campo neutro* γ, costituito dalle serie lineari per le quali le δ coppie date son neutre (cioè presentano ognuna una condizione al più ai gruppi di ciascuna delle serie considerate, che debbano contenerla). L'intero $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ si chiama *genere virtuale* del campo neutro γ o della C su cui è fissato questo campo.

Il teorema di unicità e di esistenza della serie lineare neutra completa $|G|_\gamma$, che contiene un dato gruppo G di punti della curva, non vale incondizionatamente come nel *campo assoluto* di tutte le serie lineari di C. Esso vale soltanto con riferimento ai *gruppi ordinari*, che sono i gruppi rispetto ai quali i punti delle coppie neutre hanno la stessa molteplicità ($\geqslant 0$) che i punti stessi hanno nel gruppo generico della serie. Avuto riguardo ai gruppi ordinari valgono i concetti di somma e di sottrazione fra serie lineari neutre.

Esiste una ed una sola serie lineare $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ del campo γ: è la *serie canonica neutra* e, riferendosi a questa, si ottiene il teorema di *Riemann-Roch* per le serie di γ. In particolare un gruppo di π punti generici di C è non speciale in γ e definisce una serie lineare neutra ∞^0. La varietà V_π imagine della totalità dei gruppi di π punti di C apparisce pertanto l'analoga, nei riguardi del campo γ, della varietà V_p' (varietà di *Jacobi*) imagine della totalità dei gruppi di p punti di C. E l'analogia si spinge oltre, perchè si prova agevolmente, sulla base dei precedenti concetti, che V_π possiede un gruppo continuo Γ abeliano, transitivo, ∞^π di trasformazioni birazionali; sicché V_π è una varietà quasi abeliana (e si aggiunge di *Jacobi*, per ricordare la sua analogia colla V_p'). Sopra C si posson inoltre definire π *integrali abeliani neutri di 1ª specie*, costituenti un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$: p di questi son dati dagl'integrali abeliani di 1ª specie di C $u_1, u_2, \ldots, u_p$; δ_1 da integrali di 3ª specie $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ aventi ognuno una coppia di singolarità logaritmiche *pure* (cioè non sovrapposte a singolarità polari), nei punti di una delle δ_1 coppie neutre a punti distinti; δ_2 da integrali di 2ª specie $u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ aventi ognuno un polo di 1º ordine in uno dei punti delle δ_2 coppie neutre a punti coincidenti.

Vale pel predetto sistema lineare un *teorema di Abel* ed un *teorema d'inversione*, perfettamente analoghi ai teoremi che loro corrispondono nel campo assoluto e che non valgono naturalmente nel dato campo neutro. Da ciò discende che *il punto di V_π è funzione uniforme meromorfa al finito degl'integrali semplici neutri di 1ª specie di V_π a $2p + \delta_1$ periodi.* Gl'integrali semplici neutri di 1ª specie di V_π son quelli che provengono dagl'integrali abeliani neutri di 1ª specie di C.

La varietà V_π è d'irregolarità superficiale p e dei $2p + \delta_1$ periodi predetti, $2p$ (i periodi ciclici) son relativi ad altrettanti cicli lineari (omologicamente indipendenti) di V_π e gli altri (i periodi polari) son relativi a cicli lineari nulli ognun dei quali è concatenato, in un punto generico, con una delle due varietà logaritmiche di un integrale neutro di V_π, il quale è, in via assoluta, di 3ª specie.

2. Le funzioni $(2p + \delta_1)$-periodiche sopra accennate sono funzioni quasi abeliane *speciali*, secondo la denominazione che già *Poincaré* aveva adottato per designare le funzioni abeliane provenienti da una curva algebrica, le quali dipendono da un numero di moduli variabili con continuità, minore di quello da cui dipendono le più generali funzioni abeliane.

Esse si posson considerare come funzioni abeliane speciali degeneri, cioè come limiti di funzioni abeliane di π variabili, 2π volte periodiche: nel passaggio al limite vi sono δ_1 coppie di periodi ciclici in ciascuna delle quali un periodo diviene polare e l'altro tende all'infinito e δ_2 coppie di periodi ciclici, in ciascuna delle quali i due periodi vanno all'infinito.

La considerazione delle funzioni quasi abeliane speciali, collegata con un teorema d'inversione esteso (erweitertes Umkehrproblem) in cui intervengono, oltre agl'integrali di 1ª specie, integrali di 3ª specie e, come limiti di questi, integrali di 2ª specie, trovasi già in *Clebsch-Gordan*; ma la mia trattazione, a partire dalle serie lineari neutre, è più aderente al contenuto geometrico e conduce a molte nuove proprietà, offrenti opportuni orientamenti per lo studio delle funzioni quasi abeliane generali.

In proposito sono anzitutto da porre in rilievo le proprietà seguenti, spettanti ad una V_π quasi abeliana di Jacobi:

a) Il gruppo continuo Γ esistente su V_π non è assolutamente transitivo, come nel caso d'un'ordinaria varietà di Jacobi, ma *generalmente tran-*

sitivo, perché esiste una varietà algebrica K, invariante per Γ, le cui componenti, tutte a $\pi - 1$ dimensioni, son le varietà singolari degl'integrali neutri.

Le coppie $A_j, B_j (j = 1, 2, \ldots, \delta_1)$ di varietà logaritmiche dell'integrale di 3ª specie u_{p+j}, sono algebricamente equivalenti e la loro intersezione (A_j, B_j) è il luogo dei punti d'indeterminazione (punti singolari inessenziali di 2ª specie) dell'integrale u_{p+j}. Sulla varietà polare $A_{\delta_1+l} (l = 1, \ldots, \delta_2)$ dell'integrale di 2ª specie $u_{p+\delta_1+l}$ il luogo dei punti d'indeterminazione è invece costituito da una varietà caratteristica $(A_{\delta_1+l}, A_{\delta_1+l})$ segata su A_{δ_1+l} da una varietà infinitamente vicina.

b) La varietà V_π, a differenza d'un'ordinaria varietà di Jacobi, la quale, una volta privata di eventuali varietà eccezionali[9]) (il che è possibile), non contiene varietà razionali, possiede un'involuzione ∞^p di varietà razionali M_δ. Esiste poi su V_π un'involuzione razionale di varietà N_p, unisecanti delle M_δ e tutte birazionalmente equivalenti alla V'_p di Jacobi, inerente a C. La V_π è insomma il *prodotto* $V'_p \times S_\delta$ della V'_p per uno spazio lineare S_δ: in particolare per $p = 0$ è birazionalmente equivalente ad un S_δ.

Da notarsi che per $\delta = 1, 2, \ldots$ si ottiene da V_π la varietà delle $(p + 1)$-ple, delle $(p + 2)$-ple, ... di punti della curva C; la quale varietà si può così considerare (in infiniti modi diversi, come poi diremo) quale varietà quasi abeliana; mentre la varietà delle p-ple è (in un sol modo) abeliana.

c) La V_π contiene infinite varietà razionali, non eliminabili in blocco con una trasformazione birazionale. Vi son addirittura sistemi continui di varietà siffatte, che sono analoghe alle curve eccezionali di 2ª specie, caratterizzanti (secondo *Castelnuovo-Enriques*) le rigate e le superficie razionali. Esse costituiscono una delle maggiori difficoltà nello studio generale delle V_π quasi abeliane. Una E di queste varietà non si può trasformare in una varietà E' di dimensione diversa, senza che, simultaneamente, una varietà F ad essa appartenente (contenente E o contenuta in E) si muti in una varietà F' di dimensione diversa appartenente ad E' (contenuta in E' o contenente E').

d) Nel caso della V_π quasi abeliana di Jacobi le varietà eccezionali si dominano meglio, perchè quelle che son eccezionali rispetto alle trasformazioni α e β sono soltanto le varietà d'indeterminazione degl'inte-

---

[9]) Ricordo (riferendomi a modelli privi di punti multipli d'una varietà algebrica) che sopra una varietà algebrica una varietà è *eccezionale* quando con una trasformazione birazionale della varietà ambiente cambia di dimensione.

grali u (e naturalmente le loro trasformate) e una varietà *razionale* $E_{\pi-1}$, che rappresenta le π-ple speciali di punti di C, la quale contiene ognuna delle varietà d'indeterminazione (A_j, A_j), $(A_{\delta_1+l}, A_{\delta_1+l})$. Essa non può mutarsi in una varietà di dimensione inferiore (come invece è possibile senza inconvenienti nel caso di un'ordinaria varietà di Jacobi) senza che le predette varietà a $\pi - 2$ dimensioni si mutino in varietà a $\pi - 1$ dimensioni.

Le α e le β portano $E_{\pi-1}$ in un sistema continuo di varietà irriducibili $E'_{\pi-2}$, che invadono tutta la V_π e ogni varietà d'indeterminazione in un sistema continuo di varietà $F_{\pi-1}$ (dipendente naturalmente dalla varietà d'indeterminazione). Un punto d'indeterminazione vien portato da ∞^1 trasformazioni di 1ª (o di 2ª) specie, in una curva razionale, la quale al variare del punto nella relativa varietà d'indeterminazione, descrive un sistema $\infty^{\pi-2}$, contenuto in un'involuzione $\infty^{\pi-1}$, invadente V_π ; ecc.ecc.

Risulta da ciò che la varietà K non è, in modo assoluto, invariante per Γ; è invero invariante soltanto la varietà stessa privata dei punti d'indeterminazione, mentre questi son portati dovunque su V_π .

e) La V_π non si può considerare in un sol modo come varietà quasi abeliana di *Jacobi*. Già basta a provarlo il fatto che, dati C e i valori degl'interi δ_1, δ_2, il gruppo Γ è suscettibile di variare con continuità, al variare su C delle coppie neutre. Sicché *sulla medesima* V_π, varietà imagine delle π-ple di punti di C, vi sono infiniti gruppi continui del tipo Γ e quindi infiniti sistemi lineari di integrali neutri e quindi *infiniti corpi di funzioni quasi abeliane*, ognuno dei quali è individuato non dalla sola V_π, ma dalla coppia V_π, Γ. Dato su V_π il gruppo Γ è effettivamente individuato un corpo di funzioni quasi abeliane, perché sono determinati gl'integrali neutri (a meno di una sostituzione lineare non degenere) e i periodi primitivi (a meno di una sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi) e quindi la matrice dei periodi del corpo (a meno di un'equivalenza tra matrici congeneri).

Ritorneremo fra breve più in generale su queste considerazioni.

f) Nello $S_{2\pi}$ euclideo, reale, rappresentativo delle π variabili complesse $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, un campo fondamentale pel corpo di funzioni quasi abeliane definito da V_π, Γ, è costituito da un qualsiasi *prisma indefinito, che abbia come figura direttrice il parallelepipedo dei* $2p + \delta_1$ *periodi.* Quando il corpo si riguarda come limite d'un corpo di funzioni abeliane di π variabili, il parallelepipedo dei 2π periodi di queste si allunga indefinitamente e si riduce ad uno dei prismi indicati, perché le lunghezze di $\delta_1 + 2\delta_2$ de' suoi spigoli tendono all'infinito.

L'insieme dei punti della varietà $V_\pi - K$ si rappresenta biunivocamente nell'insieme I dei punti al finito del prisma, ove naturalmente si considerino in questo come un sol punto due punti di due faccie che differiscan tra loro di un periodo. Ma questa corrispondenza fra i due insiemi aperti non è biunivoca senza eccezione. Sono eccezionali in I una varietà reale a $2(\pi - 2)$ dimensioni imagine di $E_{\pi-2}$ e le varietà a $2(\pi - 1)$ dimensioni, che rappresentano le varietà d'indeterminazione. Tanto l'una che le altre si estendono indefinitamente entro il prisma.

g) Un'ultima proprietà della V_π, nel caso $p = 0$, giova sottolineare, perché occorre anche per la trattazione generale. In tal caso si può assumere a modello di V_π un S_δ: ivi son dati δ_1 integrali semplici di 3ª specie, e δ_2 integrali semplici di 2ª specie, che si riducono a

$$\log R_j (j = 1, 2, \ldots, \delta_1), \quad R_{\delta_1+l} (l = 1, 2, \ldots, \delta_2),$$

ove R_j, R_{δ_1+l} son δ funzioni lineari fratte delle coordinate dei punti di S_δ, le quali in sostanza posson esser scelte (genericamente) ad arbitrio.

Le trasformazioni del gruppo Γ son le trasformazioni cremoniane

$$R_j(P') = c_j R_j(P), \ (j = 1, 2, \ldots, \delta_1); \quad R_{\delta_1+l}(P') = R_{\delta_1+l}(P) + c_{\delta_1+l}, \\ (l = 1, 2, \ldots, \delta_2),$$

ove $c_1, c_2, \ldots, c_\delta$ denotan le costanti delle ∞^δ trasformazioni e P, P' punti corrispondenti.

Le funzioni quasi abeliane associate ad un tal gruppo continuo si riducono a funzioni trigonometriche in δ_1 variabili e razionali in δ_2 variabili.

Più in generale, data in S_δ una qualunque trasformazione cremoniana

$$x'_h = \varphi_h(P) \quad (h = 1, 2, \ldots, \delta), \tag{1}$$

ove le φ son funzioni razionali del punto P e le (1), per generici valori delle x', son razionalmente risolubili rispetto alle coordinate di P, si può considerare in S_δ il gruppo continuo cremoniano del tipo Γ:

$$\varphi_j(P') = c_j \varphi_j(P), \ (j = 1, 2, \ldots, \delta_1); \quad \varphi_{\delta_1+l}(P') = \varphi_{\delta_1+l}(P) + c_{\delta_1+l}, \\ (l = 1, 2, \ldots, \delta_2),$$

il quale dà ancora luogo al corpo delle funzioni predette.

I due gruppi son trasformati l'uno dell'altro mediante la trasformazione cremoniana:

$$R_h(P') = \varphi_h(P) \quad (h = 1, 2, \ldots, \delta)$$

ed è pertanto naturale che dieno luogo allo stesso corpo di funzioni.

3. Passando alle funzioni quasi abeliane generali, avverto anzitutto che *la condizione necessaria e sufficiente perché il gruppo continuo Γ esistente sulla varietà quasi abeliana V_π sia assolutamente transitivo, è che la V_π riducasi ad una varietà abeliana* (*di Picard*).

Occorre dunque considerare l'ipotesi di un Γ generalmente transitivo. Ad esso è associato un sistema lineare Σ, $\infty^{\pi-1}$, di integrali semplici, uno almeno dei quali è necessariamente di 3ª (o di 2ª) specie. Il sistema Σ comprende sempre gli eventuali integrali semplici di 1ª specie di V_π: sieno $u_1, u_2, \ldots, u_p$ e Σ_0 il loro sistema. Si può inoltre trovare in Σ un sistema subordinato Σ_1, ∞^{δ_1-1}, di integrali *essenzialmente di 3ª specie* (cioè tali che nessuna loro combinazione lineare si abbassi di specie), e sieno $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ δ_1 integrali indipendenti di Σ_1; e un sistema subordinato Σ_2, ∞^{δ_2-1}, di integrali *essenzialmente di 2ª specie*, e sieno $u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ δ_2 integrali indipendenti di Σ_2; in guisa che Σ sia il sistema congiungente di $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$. (Non si esclude che uno degl'interi δ_1, δ_2 sia nullo). Si hanno così *tre interi* p, δ_1, δ_2 *caratteristici del gruppo continuo* Γ: il primo dei quali denota l'irregolarità superficiale ($p < \pi$) di V_π.

Il sistema Σ comprende *tutti e soli gl'integrali semplici invarianti pel gruppo continuo* Γ (e per le trasformazioni di 1ª specie).

A questo punto, per procedere oltre nell'analisi delle varietà singolari degli u, le quali son componenti della varietà pura K, a $\pi - 1$ dimensioni, invariante per Γ, occorre approfondire e ampliare talune proprietà della mia teoria della base per la totalità delle varietà subordinate a una data.

Ma dopo ciò ci s'imbatte ancora in una grave difficoltà dipendente dal fatto che K può contenere a priori componenti eccezionali, di dimensione $\pi - 1$; le quali sarebbero dunque luoghi di punti singolari essenziali o polari e non di punti d'indeterminazione.

La ricerca è limitata da questo momento a coppie V_π, Γ, le quali, con trasformazioni birazionali, possan ridursi a tali che non vi sieno altri punti eccezionali per le α, β all'infuori dei punti d'indeterminazione. *Chiamo L quest'ipotesi eventualmente limitativa* sul cui valore dirò poi qualche cosa. L'ipotesi L è certo verificata nel caso di una V_π quasi abeliana di Jacobi; in ogni caso se $p \leqslant 3$; nel caso $\delta = 1$ e p qualunque e nel caso di δ_2 qualunque e $\delta_1 = 0$.

Designamo con $\overline{K}$ la varietà costituita dalle componenti di K, a due a due coniugate in una e quindi in tutte le α, che son varietà logaritmiche degl'integrali di Σ_1, cioè di tutti gl'integrali di Σ.

Secondo un teorema fondamentale della teoria della base, più componenti di K, che comprendano *tutte* le varietà logaritmiche di un dato integrale di 3ª specie di V_π, son algebricamente legate. Bisogna pertanto portare in modo speciale l'attenzione sui legami algebrici fra le componenti di K. Ebbene, occorrono qui due concetti: il primo è quello di *legame semplice* fra un certo numero τ di varietà algebriche a $\pi - 1$ dimensioni di una varietà V_π, ossia di un legame algebrico fra le τ varietà, tra cui ve ne siano $\tau - 1$ algebricamente indipendenti; e il secondo quello di *legame autoconiugato.* Un legame fra un numero pari $C_1, C_{t+1}; \ldots; C_t, C_{2t}$ di coppie di varietà di K, coniugate nelle α, dicesi autoconiugato quando ha la forma:

$$\lambda_1(C_1 - C_{t+1}) + \lambda_2(C_2 - C_{t+2}) + \cdots + \lambda_t(C_t - C_{2t}) \equiv 0 .$$

Nell'ipotesi L dimostro il seguente *teorema fondamentale:*

Gl'integrali essenzialmente di 3ª specie e invarianti pel gruppo continuo Γ sono tanti, indipendenti, quanti sono i legami (indipendenti) semplici e autoconiugati fra le componenti della varietà invariante K e si possono scegliere in modo che abbian soltanto singolarità logaritmiche pure.

Resta così precisato anche il significato geometrico degl'interi δ_1, δ_2.

Dal teorema fondamentale discendono importanti conseguenze e cioè:

a) *Una V_π d'irregolarità superficiale nulla, mutata in sè da un gruppo continuo ∞^π abeliano, transitivo, di trasformazioni birazionali, è razionale.*

b) Una V_π algebrica, mutata in sè da un gruppo continuo Γ, ∞^π, abeliano, transitivo di trasformazioni birazionali, ha l'irregolarità superficiale $p \leqslant \pi$. *Condizione necessaria e sufficiente perché sia $p < \pi$ è che Γ contenga un sottogruppo abeliano razionale, la cui dimensione è $\delta = \pi - p$. La V_π è birazionalmente equivalente al prodotto di una varietà di Picard V'_p e di uno spazio lineare S_δ. Viceversa, ogni tal prodotto soddisfa alle ipotesi.*

Ne deriva che, anche nel caso di una V_π quasi abeliana generale, come nel caso delle V_π speciali, *la varietà contiene addirittura un gruppo continuo infinito di trasformazioni birazionali in sè e sistemi di gruppi del tipo Γ.*

Infine dimostro che per un dato Γ (soddisfacente ad L) e pel corpo delle funzioni quasi abeliane determinato dalla coppia V_π, Γ la matrice dei $2p + \delta_1$ periodi si può ridurre al tipo

$$\begin{vmatrix} A & \Omega & 0 \\ 0 & \Omega_1 & B \\ 0 & \Omega_2 & 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

ove in ciascuna delle prime due colonne son compendiate p verticali e nell'ultima δ_1: nella prima orizzontale son compendiate p orizzontali, nella seconda δ_1, nella terza δ_2. Inoltre A, B son due determinanti degli ordini rispettivi p e δ_1, aventi nulli tutti gli elementi tranne quelli della diagonale principale, che, per A, sono uguali a $\frac{2\pi i}{d_1}, \frac{2\pi i}{d_2}, \ldots, \frac{2\pi i}{d_p}$, essendo $d_1, d_2, \ldots, d_p$ i divisori di V_π, cioè di V'_p, e per B son tutti uguali a $2\pi i$. La matrice $|A\Omega|$ è un'ordinaria matrice (di *Riemann*) di un corpo di funzioni abeliane a p variabili. Essa si chiamerà la *matrice abeliana associata al dato corpo di funzioni quasi abeliane.*

4. Circa il valore dell'ipotesi L, pongo anzitutto in luce una proprietà di una V_π contenente un gruppo del tipo Γ, non vincolato ad L.

Ogni integrale di 3ª specie invariante per Γ possiede almeno una varietà d'indeterminazione a $\pi - 2$ dimensioni. (La stessa cosa non vale per ogni integrale semplice di 3ª specie sopra una varietà, il quale può avere soltanto singolarità logaritmiche, mentre un integrale di 2ª specie ha sempre varietà d'indeterminazione). Ognuna delle varietà d'indeterminazione di un integrale di 3ª (o di 2ª) specie è eccezionale per le α, β. I punti di una, irriducibile, di queste varietà, vengon portati dalle α, β in curve razionali f di un sistema involutorio $\infty^{\pi-1}$, che riempie V_π e che è mutato in sè dalle α, β. Se sopra la generica f è possibile fissare razionalmente un punto, si perviene ai teoremi a), b) del n. prec. indipendentemente da L. Sembra molto probabile che si possa giungere a fissare razionalmente un punto sulle f; ma non mi è dato di affermarlo nello stadio attuale della ricerca.

Un altro modo per cercar di svincolarsi dall'ipotesi L è di trovare le relazioni qualitative e quantitative che intercedono fra gli elementi delle matrici Ω, Ω_1, Ω_2: problema per la cui soluzione conviene tener d'occhio sia antichi lavori di *Frobenius* sulle funzioni abeliane (Crelle's Journal, 1884), sia una mia Memoria recente (Reale Accademia d'Italia, 1938) sulle relazioni fra i periodi degl'integrali d'una varietà. Ivi si parla di integrali di 1ª specie, ma il procedimento è applicabile con opportuni complementi anche agl'integrali di 2ª e di 3ª specie.

Una volta trovati questi legami, bisogna dimostrare che, per ogni corpo di funzioni quasi abeliane relative agl'interi p, δ_1, δ_2; $d_1, d_2, \ldots, dp$, la matrice dei periodi è riducibile alla (2) e che le relazioni trovate son necessarie e sufficienti per l'esistenza delle funzioni stesse, di cui si riescirà in tal modo a costruire le effettive espressioni analitiche probabilmente con sole serie theta, intermediarie e funzioni razionali di esponenziali.

5. La questione or ora accennata si connette col problema delicato dei moduli di un corpo di funzioni quasi abeliane. La ricerca dei moduli di un corpo siffatto equivale alla ricerca dei moduli di una coppia V_π, Γ; e siccome i moduli di V_π si conoscono e sono i $\frac{p(p+1)}{2}$ periodi distinti che figurano sulla matrice Ω della (2), il problema riducesi a cercare i moduli di un gruppo Γ sopra una data V_π. Così si cercan nel fatto i moduli di un corpo di funzioni quasi abeliane sopra V_π, perché si prova agevolmente che due gruppi continui Γ, Γ' su V_π dànno lo stesso corpo allora e soltanto allora che si ottengono l'uno dall'altro con una trasformazione birazionale di V_π.

Ci limiteremo a segnalar la delicatezza del problema sull'esempio di una V_π quasi abeliana di Jacobi. Il facile computo dei moduli dell'ente C, γ, ove C è una data curva di genere p e γ un campo neutro su essa fissato, fornisce nello stesso tempo i moduli dei corpi di funzioni quasi abeliane speciali corrispondenti ai singoli γ (per dati δ_1, δ_2); ma da questo punto di vista tali corpi vengon considerati come *distinti* quando non posson ottenersi l'uno dall'altro con trasformazioni birazionali *senza eccezione* della V_π in sè; mentre essi posson benissimo non esser distinti rispetto a tutte le trasformazioni birazionali di V_π in sè (vogliam dire anche rispetto a quelle che introducono o fanno sparire varietà eccezionali). Così è di fatto già nel caso semplice $p = 0$, in cui si trovano dal primo punto di vista $2\delta_1 + \delta_2 - 3$ moduli, mentre non ve n'è alcuno [n. 2, g)] dal secondo punto di vista.

6. La mia ricerca generale si chiude per ora con un *teorema di struttura* delle funzioni quasi abeliane (generali e speciali):

Ogni funzione quasi abeliana di un dato corpo, avente gl'interi caratteristici p, δ_1, δ_2 *e la matrice abeliana associata* M, *riducesi, con una conveniente sostituzione lineare non degenere sulle variabili* $u_1, \ldots, u_p$,

$u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}, u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ ($\pi = p + \delta_1 + \delta_2$) *ad una funzione razionale nelle ultime* δ_2 *variabili e negli esponenziali di* $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, *i coefficienti di questa funzione essendo funzioni razionali di trascendenti intere delle* $u_1, u_2, \ldots, u_p$, *talune delle quali son funzioni intermediarie relative alla matrice* M. *Quando* $\delta_2 = 0$, *i coefficienti suddetti si esprimon tutti razionalmente con funzioni intermediarie di* $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Un caso particolare è quello considerato da *Cousin* in un'ampia Memoria del 1910 (Acta mathematica, t. 33, pp. 105—232) e che riguarda una funzione meromorfa di due variabili con 3 periodi non eccezionali (secondo la definizione data da *Cousin* a p. 213) e legata algebricamente alle sue derivate parziali prime. Una tal funzione, a causa appunto della sua struttura (razionale-esponenziale in una variabile a coefficienti funzioni Θ dell'altra variabile) è chiamata da *Cousin semirazionale*.

7. Trattandosi di una teoria tanto complessa è quasi necessario dedicare qualche attenzione anche egli esempi, che posson chiarire i fatti nuovi, che si presentano. Perciò ho trattato estesamente delle *superficie di Jacobi e di Kummer*, nel campo quasi iperellittico. Una V_2 quasi abeliana di *Jacobi* (la designeremo con F) si ottiene da una curva ellittica ($p = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$ oppure $p = 1$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$) o da una curva razionale ($p = 0$, $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 0$; $p = 0$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2$; $p = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$).

Non mi fermo su quest'ultimo caso in cui F si può rappresentare birazionalmente senza eccezione coi punti di un piano, dove si hanno da considerare certi gruppi abeliani ∞^2 di trasformazioni quadratiche.

Mi trattengo sul caso più ricco d'insegnamenti: $p = 1$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$. Allora F è una rigata ellittica. I modelli di questa, che rappresentano senza eccezione la varietà delle coppie di punti di C, sono tutti rigate d'ordine dispari (mentre F quale prodotto di una curva ellittica e di una curva razionale è rappresentata soltanto da rigate di ordine pari). Gl'integrali invarianti per Γ sono un integrale di 1ª specie u e un integrale di 3ª specie v, che ha come curve logaritmiche due certe unisecanti A, B delle generatrici. Il corpo di funzioni quasi iperellittiche definite corrisponde alla tabella di periodi

$$\begin{array}{c|ccc} u & 2\pi i & \omega_1 & 0 \\ v & 0 & \omega_2 & 2\pi i \end{array}$$

ove ω_1, ω_2 posson essere scelti ad arbitrio, con una certa condizione qualitativa.

Le A, B si tagliano in un punto O che è l'unico eccezionale per *ogni* α, β; e la generatrice h uscente da O è l'unica curva eccezionale per ogni α, β. Una α (o β) porta O in una generatrice e h in un punto di questa.

Particolare interesse offre la superficie Φ di ordine minimo, che rappresenta birazionalmente l'involuzione, di 2^0 ordine, generata su F da una α. Tale superficie, razionale, è di 4^0 ordine e possiede una retta doppia e 8 punti doppi fuori di questa: *proprietà che la caratterizzano.* Essa è dunque la *superficie di Plücker*, scoperta nel 1867 dal grande geometra come *superficie di complesso* (Komplexfläche) di un complesso quadratico generale e ritrovata più tardi (*Klein*, *Veiler*, *Segre*) come superficie singolare del complesso quadratico più generale con una retta doppia. Da quanto precede risulta che Φ si può ottenere come limite di una superficie di *Kummer* $\overline{\Phi}$: nel passaggio al limite 8 punti doppi di $\overline{\Phi}$ vanno sugli 8 punti doppi isolati di Φ e altri 8 a coppie sui 4 punti doppi cuspidali di Φ.

Simili rapporti colla geometria della retta ha la superficie analoga a Φ, corrispondente a $p = 1, \delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$: essa è del 4^0 ordine e possiede una retta doppia cuspidale e 4 punti doppi conici fuori di questa. La tabella dei periodi relativi a questo caso, in cui u, v sono, su F, un integrale di 1^a e un integrale di 2^a specie, è

$$\begin{array}{c|cc} u & 2\pi i & \omega_1 \\ v & 0 & \omega_2 \end{array}$$

ove ω_1, ω_2 posson essere scelti ad arbitrio, sotto la condizione che ω_1 non sia imaginario puro. Si ha però un solo corpo di funzioni quasi iperellittiche con 2 periodi, comunque si scelga ω_2.

(Reçu le 24 mai 1945.)