Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Sur une proposition de Mlle S. Piccard.

Autor: Sierpinski, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16911

Sur une proposition de M^lle S. Piccard

Par W. SIERPINSKI, Varsovie

Dans son livre *Sur les ensembles de distances*, M^lle *Sophie Piccard* a démontré que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire E congruent à son complémentaire qui n'est pas mesurable L, ne jouit pas de la propriété de Baire et tel que l'ensemble M de tous les nombres positifs qui ne sont pas égaux à une distance entre deux points de E est dénombrable*[1]).

Le but de cette Note est de démontrer cette proposition de M^lle *Piccard sans faire appel à l'hypothèse du continu, en utilisant seulement l'axiome du choix.*

Soit X l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $0<x<2$. Il résulte du théorème de *Zermelo* qu'il existe une suite transfinie $S = \{x_\xi\}_{\xi<\varphi}$ formée de tous les nombres distincts de X et nous pouvons supposer que φ est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu et que $x_1 = 1$. Or, la famille de tous les ensembles parfaits (non vides) $\subset X$ étant de puissance du continu, il existe aussi une suite transfinie $\{P_\xi\}_{\xi<\varphi}$ de type φ, formée de tous ces ensembles.

E étant un ensemble linéaire et a un nombre réel, désignons par $E(a)$ la translation de E de longueur a (c.-à-d. l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $x - a \in E$). Nous définirons maintenant par l'induction transfinie trois suites transfinies $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$, $\{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{c_\xi\}_{\xi<\varphi}$ comme il suit.

Posons $a_1 = 0$, $b_1 = x_2$ et soit c_1 le premier terme de la suite S qui appartient à P_1 et est distinct des nombres 1, $x_2 + 1$ et $x_2 - 1$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $1<\alpha<\varphi$, et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres a_ξ, b_ξ et c_ξ pour $\xi<\alpha$, et soit E_α leur ensemble. L'ensemble E_α est évidemment de puissance $<2^{\aleph_0}$, de même que l'ensemble

$$H_\alpha = X[E_\alpha(1) + E_\alpha(-1) + E_\alpha(x_{1+\alpha} + 1) + E_\alpha(x_{1+\alpha} - 1)] \quad . \qquad (1)$$

L'intervalle $0<x<2-x_{1+\alpha}$ contient donc des nombres qui n'appartiennent pas à H_α : soit a_α le premier de tels nombres de la suite S. Posons $b_\alpha = a_\alpha + x_{1+\alpha}$: nous aurons $b_\alpha \in X$.

L'ensemble parfait P_α, en tant que de puissance $2^{\aleph_0}$, contient des nombres n'appartenant pas à H_α et autres que chacun des nombres

---

[1]) *Sophie Piccard:* Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un esp ace euclidien, Paris 1939, pp. 68—71 (Proposition 15).

$a_\alpha+1$, $a_\alpha-1$, $b_\alpha+1$, $b_\alpha-1$: soit c_α le premier de tels nombres de la suite S.

Les suites $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$, $\{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{c_\xi\}_{\xi<\varphi}$ sont ainsi définies par l'induction transfinie.

Soit Q l'ensemble de tous les nombres a_ξ, b_ξ et c_ξ, où $\xi<\varphi$ et, en désignant par J l'intervalle $0\leqslant x<1$, posons

$$R=Q+[J-(Q+Q(-1))] \tag{2}$$

et

$$E=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(2k)\ . \tag{3}$$

Je dis que l'ensemble E satisfait à la proposition de M[lle] *Piccard.*

D'abord je démontrerai que $CE=E(1)$, c.-à-d. que le complémentaire de E (par rapport à la droite), CE, coïncide avec la translation de E de longueur 1, autrement dit que les formules

$$x\,\epsilon\, E \tag{4}$$

et

$$x+1\,\bar{\epsilon}\, E \tag{5}$$

sont équivalentes.

Soit donc $x\,\epsilon\, E$ et admettons que $x+1\,\epsilon\, E$. D'après (3) il existe des nombres y et z de R et des entiers k et l, tels que

$$x=y+2k \qquad \text{et} \qquad x+1=z+2l\ ,$$

d'où $z-y=1+2(l-k)$. Or, d'après (2), et vu que $Q\subset X$, on trouve $0\leqslant y<2$ et $0\leqslant z<2$, d'où $|z-y|<2$, ce qui donne, $|z-y|$ étant un nombre impair, $z-y=\pm 1$.

D'après $y\,\epsilon\, R$ et (2) on a soit $y\,\epsilon\, Q$, soit $y\,\epsilon\, J-[Q+Q(-1)]$ et pareillement pour z. Distinguons 4 cas.

1) $y\,\epsilon\, Q$, $z\,\epsilon\, Q$. D'après la définition de l'ensemble Q il existe des nombres ordinaux $<\varphi$, α et β, tels que y est un des nombres a_α, b_α, c_α et z est un des nombres a_β, b_β, c_β. Or, comme $0<x_{1+\alpha}\neq 1$, on a $b_\alpha=a_\alpha+x_{1+\alpha}\neq a_\alpha\pm 1$ et, comme $c_\alpha\neq a_\alpha\pm 1$ et $c_\alpha\neq b_\alpha\pm 1$, et vu que $z-y=\pm 1$, on conclut sans peine qu'il ne peut pas être $\alpha=\beta$. On a donc $\alpha\neq\beta$, soit $\alpha>\beta$. Alors, vu la définition de a_α, b_α et c_α, on a $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha\,\bar{\epsilon}\, E_\alpha(1)+E_\alpha(-1)$, donc $y\,\bar{\epsilon}\, E_\alpha(1)+E_\alpha(-1)$. Or, on a a_β, b_β, $c_\beta\,\epsilon\, E_\alpha$, d'où $a_\beta\pm 1$, $b_\beta\pm 1$, $c_\beta\pm 1\,\epsilon\, E_\alpha(1)+E_\alpha(-1)$: comme $y=$

$z \pm 1$ et z est un des nombres a_β, b_β, c_β, on aurait donc $y \in E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$, ce qui est impossible. Le cas 1) est donc impossible.

2) $y \in Q$, $z \in J - [Q + Q(-1)]$. On a donc $z = y \pm 1 \in Q(1) + Q(-1)$, ce qui est impossible, puisque $z \in J$, $z \bar{\in} Q(-1)$ et $J \cdot Q(1) = 0$.

3) $y \in J - [Q + Q(-1)]$, $z \in Q$. Ce cas se traite comme le cas 2).

4) $y \in J - [Q + Q(-1)]$, $z \in J - [Q + Q(-1)]$. On a dans ce cas y, $z \in J$, donc $0 \leqslant y < 1$, $0 \leqslant z < 1$ et $|y - z| < 1$, contrairement à $y - z = \pm 1$.

Nous avons donc démontré que la formule (4) entraîne la formule (5).

Soit maintenant $x \bar{\in} E$ et distinguons deux cas:

1) $\mathrm{E}x = 2k$ (où $\mathrm{E}x$ désigne l'entier le plus grand $\leqslant x$). On a donc $2k \leqslant x < 2k + 1$, d'où $x \in J(2k)$. Vu que $x \bar{\in} E$, on a, d'après (3), $x \bar{\in} R(2k)$, donc, d'après (2), $x \bar{\in} Q(2k)$ et $x \bar{\in} J(2k) - [Q(2k) + Q(2k-1)]$, ce qui donne tout de suite $x \in Q(2k-1)$ et $x + 1 \in Q(2k) \subset R(2k) \subset E$, donc $x + 1 \in E$.

2) $\mathrm{E}x = 2k - 1$. On a donc $2k - 1 \leqslant x < 2k$ et $x + 1 \in J(2k)$. S'il était $x + 1 \bar{\in} E$, on aurait $x + 1 \bar{\in} R(2k)$, donc $x + 1 \bar{\in} Q(2k)$ et $x + 1 \in J(2k) - [Q(2k) + Q(2k-1)]$, ce qui donne $x + 1 \in Q(2k-1)$ et $x \in Q(2k-2) \subset R(2k-2) \subset E$, contrairement à l'hypothèse que $x \bar{\in} E$. On a donc $x + 1 \in E$.

Nous avons ainsi démontré que la formule (5) entraîne la formule (4).

L'équivalence des formules (4) et (5) est ainsi établie et on a $CE = E(1)$.

Il résulte de la définition de l'ensemble E que E a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans l'intervalle $(0, 2)$. Il en résulte, comme on sait, que E est dans $(0, 2)$ de mesure extérieure $=2$ et de deuxième catégorie dans toute portion de l'intervalle $(0, 2)$. Or, comme $CE = E(1)$, l'ensemble CE est dans l'intervalle $(1, 2)$ de mesure extérieure $= 1$ et de deuxième catégorie dans toute portion de $(1, 2)$. Il s'en suit tout de suite que E n'est pas mesurable L et ne jouit pas de la propriété de Baire.

Or, soit M l'ensemble de tous les nombres impairs. Je dis que pour qu'un nombre réel positif d soit une distance entre deux points de E, il faut et il suffit qu'on ait $d \bar{\in} M$.

En effet, si $x \in E$ et $d = 2k + 1$, où k est un entier, on a $x + d \in E(2k+1)$. Or, d'après (3) on a $E(2k) = E$, donc $E(2k+1) = E(1) = CE$. On a donc $x + d \bar{\in} E$. Cela prouve qu'il n'existe aucun couple de points de E entre lesquels la distance serait $= d$.

D'autre part, si $d \bar{\in} M$, $d>0$, on a $\delta = d - 2\mathrm{E}\frac{d}{2} \neq 1$ et, comme $0 \leqslant d - 2\mathrm{E}\frac{d}{2} < 2$, on a $0 \leqslant \delta < 2$. Si $\delta = 0$, on a $d = 2\mathrm{E}\frac{d}{2}$ et, si $x_0 \in E$, on a $x_0 + d \in E\left(2\mathrm{E}\frac{d}{2}\right) = E$, c.-à-d. $x_0 + d \in E$. Si $\delta \neq 0$, on a $0 < \delta < 2$, $\delta \neq 1$, et il existe un nombre ordinal $\alpha < \varphi$, tel que $\delta = x_{1+\alpha}$, d'où $b_\alpha = a_\alpha + \delta = a_\alpha + d - 2\mathrm{E}\frac{d}{2}$ et, comme $a_\alpha \in E$, $b_\alpha \in E$, $b_\alpha + 2\mathrm{E}\frac{d}{2} \in E\left(2\mathrm{E}\frac{d}{2}\right) = E$, a_α et $b_\alpha + 2\mathrm{E}\frac{d}{2}$ sont deux points de E entre lesquels la distance est $= d$.

L'ensemble E satisfait donc à la proposition de Mlle Piccard, qui se trouve ainsi démontrée.

(Reçu le 1er mars 1946.)