

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1945-1946)

**Artikel:** Sur une proposition de Mlle S. Piccard.  
**Autor:** Sierpinski, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16911>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur une proposition de M<sup>lle</sup> S. Piccard

Par W. SIERPINSKI, Varsovie

Dans son livre *Sur les ensembles de distances*, M<sup>lle</sup> Sophie Piccard a démontré que si  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , il existe un ensemble linéaire  $E$  congruent à son complémentaire qui n'est pas mesurable  $L$ , ne jouit pas de la propriété de Baire et tel que l'ensemble  $M$  de tous les nombres positifs qui ne sont pas égaux à une distance entre deux points de  $E$  est dénombrable<sup>1)</sup>.

Le but de cette Note est de démontrer cette proposition de M<sup>lle</sup> Piccard sans faire appel à l'hypothèse du continu, en utilisant seulement l'axiome du choix.

Soit  $X$  l'ensemble de tous les nombres réels  $x$ , tels que  $0 < x < 2$ . Il résulte du théorème de Zermelo qu'il existe une suite transfinie  $S = \{x_\xi\}_{\xi < \varphi}$  formée de tous les nombres distincts de  $X$  et nous pouvons supposer que  $\varphi$  est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu et que  $x_1 = 1$ . Or, la famille de tous les ensembles parfaits (non vides)  $\subset X$  étant de puissance du continu, il existe aussi une suite transfinie  $\{P_\xi\}_{\xi < \varphi}$  de type  $\varphi$ , formée de tous ces ensembles.

$E$  étant un ensemble linéaire et  $a$  un nombre réel, désignons par  $E(a)$  la translation de  $E$  de longueur  $a$  (c.-à-d. l'ensemble de tous les nombres réels  $x$ , tels que  $x - a \in E$ ). Nous définirons maintenant par l'induction transfinie trois suites transfinies  $\{a_\xi\}_{\xi < \varphi}$ ,  $\{b_\xi\}_{\xi < \varphi}$  et  $\{c_\xi\}_{\xi < \varphi}$  comme il suit.

Posons  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = x_2$  et soit  $c_1$  le premier terme de la suite  $S$  qui appartient à  $P_1$  et est distinct des nombres  $1$ ,  $x_2 + 1$  et  $x_2 - 1$ . Soit maintenant  $\alpha$  un nombre ordinal donné,  $1 < \alpha < \varphi$ , et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres  $a_\xi$ ,  $b_\xi$  et  $c_\xi$  pour  $\xi < \alpha$ , et soit  $E_\alpha$  leur ensemble. L'ensemble  $E_\alpha$  est évidemment de puissance  $< 2^{\aleph_0}$ , de même que l'ensemble

$$H_\alpha = X[E_\alpha(1) + E_\alpha(-1) + E_\alpha(x_{1+\alpha} + 1) + E_\alpha(x_{1+\alpha} - 1)] . \quad (1)$$

L'intervalle  $0 < x < 2 - x_{1+\alpha}$  contient donc des nombres qui n'appartiennent pas à  $H_\alpha$ : soit  $a_\alpha$  le premier de tels nombres de la suite  $S$ . Posons  $b_\alpha = a_\alpha + x_{1+\alpha}$ : nous aurons  $b_\alpha \in X$ .

L'ensemble parfait  $P_\alpha$ , en tant que de puissance  $2^{\aleph_0}$ , contient des nombres n'appartenant pas à  $H_\alpha$  et autres que chacun des nombres

<sup>1)</sup> Sophie Piccard: Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien, Paris 1939, pp. 68—71 (Proposition 15).

$a_\alpha + 1, a_\alpha - 1, b_\alpha + 1, b_\alpha - 1$ : soit  $c_\alpha$  le premier de tels nombres de la suite  $S$ .

Les suites  $\{a_\xi\}_{\xi < \varphi}$ ,  $\{b_\xi\}_{\xi < \varphi}$  et  $\{c_\xi\}_{\xi < \varphi}$  sont ainsi définies par l'induction transfinie.

Soit  $Q$  l'ensemble de tous les nombres  $a_\xi$ ,  $b_\xi$  et  $c_\xi$ , où  $\xi < \varphi$  et, en désignant par  $J$  l'intervalle  $0 \leq x < 1$ , posons

$$R = Q + [J - (Q + Q(-1))] \quad (2)$$

et

$$E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(2k) . \quad (3)$$

Je dis que l'ensemble  $E$  satisfait à la proposition de Mlle Piccard.

D'abord je démontrerai que  $CE = E(1)$ , c.-à-d. que le complémentaire de  $E$  (par rapport à la droite),  $CE$ , coïncide avec la translation de  $E$  de longueur 1, autrement dit que les formules

$$x \in E \quad (4)$$

et

$$x + 1 \in E \quad (5)$$

sont équivalentes.

Soit donc  $x \in E$  et admettons que  $x + 1 \in E$ . D'après (3) il existe des nombres  $y$  et  $z$  de  $R$  et des entiers  $k$  et  $l$ , tels que

$$x = y + 2k \quad \text{et} \quad x + 1 = z + 2l ,$$

d'où  $z - y = 1 + 2(l - k)$ . Or, d'après (2), et vu que  $Q \subset X$ , on trouve  $0 \leq y < 2$  et  $0 \leq z < 2$ , d'où  $|z - y| < 2$ , ce qui donne,  $|z - y|$  étant un nombre impair,  $z - y = \pm 1$ .

D'après  $y \in R$  et (2) on a soit  $y \in Q$ , soit  $y \in J - [Q + Q(-1)]$  et pareillement pour  $z$ . Distinguons 4 cas.

1)  $y \in Q$ ,  $z \in Q$ . D'après la définition de l'ensemble  $Q$  il existe des nombres ordinaux  $< \varphi$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , tels que  $y$  est un des nombres  $a_\alpha$ ,  $b_\alpha$ ,  $c_\alpha$  et  $z$  est un des nombres  $a_\beta$ ,  $b_\beta$ ,  $c_\beta$ . Or, comme  $0 < x_{1+\alpha} \neq 1$ , on a  $b_\alpha = a_\alpha + x_{1+\alpha} \neq a_\alpha \pm 1$  et, comme  $c_\alpha \neq a_\alpha \pm 1$  et  $c_\alpha \neq b_\alpha \pm 1$ , et vu que  $z - y = \pm 1$ , on conclut sans peine qu'il ne peut pas être  $\alpha = \beta$ . On a donc  $\alpha \neq \beta$ , soit  $\alpha > \beta$ . Alors, vu la définition de  $a_\alpha$ ,  $b_\alpha$  et  $c_\alpha$ , on a  $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$ , donc  $y \in E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$ . Or, on a  $a_\beta, b_\beta, c_\beta \in E_\alpha$ , d'où  $a_\beta \pm 1, b_\beta \pm 1, c_\beta \pm 1 \in E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$ : comme  $y =$

$z \pm 1$  et  $z$  est un des nombres  $a_\beta, b_\beta, c_\beta$ , on aurait donc  $y \in E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$ , ce qui est impossible. Le cas 1) est donc impossible.

2)  $y \in Q, z \in J - [Q + Q(-1)]$ . On a donc  $z = y \pm 1 \in Q(1) + Q(-1)$ , ce qui est impossible, puisque  $z \in J, z \notin Q(-1)$  et  $J \cdot Q(1) = 0$ .

3)  $y \in J - [Q + Q(-1)], z \in Q$ . Ce cas se traite comme le cas 2).

4)  $y \in J - [Q + Q(-1)], z \in J - [Q + Q(-1)]$ . On a dans ce cas  $y, z \in J$ , donc  $0 \leq y < 1, 0 \leq z < 1$  et  $|y - z| < 1$ , contrairement à  $y - z = \pm 1$ .

Nous avons donc démontré que la formule (4) entraîne la formule (5).

Soit maintenant  $x \in E$  et distinguons deux cas:

1)  $\text{Ex} = 2k$  (où  $\text{Ex}$  désigne l'entier le plus grand  $\leq x$ ). On a donc  $2k \leq x < 2k + 1$ , d'où  $x \in J(2k)$ . Vu que  $x \in E$ , on a, d'après (3),  $x \in R(2k)$ , donc, d'après (2),  $x \in Q(2k)$  et  $x \in J(2k) - [Q(2k) + Q(2k - 1)]$ , ce qui donne tout de suite  $x \in Q(2k - 1)$  et  $x + 1 \in Q(2k) \subset R(2k) \subset E$ , donc  $x + 1 \in E$ .

2)  $\text{Ex} = 2k - 1$ . On a donc  $2k - 1 \leq x < 2k$  et  $x + 1 \in J(2k)$ . S'il était  $x + 1 \notin E$ , on aurait  $x + 1 \notin R(2k)$ , donc  $x + 1 \notin Q(2k)$  et  $x + 1 \in J(2k) - [Q(2k) + Q(2k - 1)]$ , ce qui donne  $x + 1 \in Q(2k - 1)$  et  $x \in Q(2k - 2) \subset R(2k - 2) \subset E$ , contrairement à l'hypothèse que  $x \in E$ . On a donc  $x + 1 \in E$ .

Nous avons ainsi démontré que la formule (5) entraîne la formule (4).

L'équivalence des formules (4) et (5) est ainsi établie et on a  $CE = E(1)$ .

Il résulte de la définition de l'ensemble  $E$  que  $E$  a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans l'intervalle  $(0, 2)$ . Il en résulte, comme on sait, que  $E$  est dans  $(0, 2)$  de mesure extérieure  $= 2$  et de deuxième catégorie dans toute portion de l'intervalle  $(0, 2)$ . Or, comme  $CE = E(1)$ , l'ensemble  $CE$  est dans l'intervalle  $(1, 2)$  de mesure extérieure  $= 1$  et de deuxième catégorie dans toute portion de  $(1, 2)$ . Il s'en suit tout de suite que  $E$  n'est pas mesurable  $L$  et ne jouit pas de la propriété de Baire.

Or, soit  $M$  l'ensemble de tous les nombres impairs. Je dis que pour qu'un nombre réel positif  $d$  soit une distance entre deux points de  $E$ , il faut et il suffit qu'on ait  $d \in M$ .

En effet, si  $x \in E$  et  $d = 2k + 1$ , où  $k$  est un entier, on a  $x + d \in E(2k + 1)$ . Or, d'après (3) on a  $E(2k) = E$ , donc  $E(2k + 1) = E(1) = CE$ . On a donc  $x + d \in E$ . Cela prouve qu'il n'existe aucun couple de points de  $E$  entre lesquels la distance serait  $= d$ .

D'autre part, si  $d \in M$ ,  $d > 0$ , on a  $\delta = d - 2E \frac{d}{2} \neq 1$  et, comme  $0 \leq d - 2E \frac{d}{2} < 2$ , on a  $0 \leq \delta < 2$ . Si  $\delta = 0$ , on a  $d = 2E \frac{d}{2}$  et, si  $x_0 \in E$ , on a  $x_0 + d \in E \left(2E \frac{d}{2}\right) = E$ , c.-à-d.  $x_0 + d \in E$ . Si  $\delta \neq 0$ , on a  $0 < \delta < 2$ ,  $\delta \neq 1$ , et il existe un nombre ordinal  $\alpha < \varphi$ , tel que  $\delta = x_{1+\alpha}$ , d'où  $b_\alpha = a_\alpha + \delta = a_\alpha + d - 2E \frac{d}{2}$  et, comme  $a_\alpha \in E$ ,  $b_\alpha \in E$ ,  $b_\alpha + 2E \frac{d}{2} \in E \left(2E \frac{d}{2}\right) = E$ ,  $a_\alpha$  et  $b_\alpha + 2E \frac{d}{2}$  sont deux points de  $E$  entre lesquels la distance est  $= d$ .

L'ensemble  $E$  satisfait donc à la proposition de M<sup>me</sup> Piccard, qui se trouve ainsi démontrée.

(Reçu le 1<sup>er</sup> mars 1946.)