Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Ein Existenzsatz über reelle definite Polynome.
Autor: Habicht, Walter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16910

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Existenzsatz über reelle definite Polynome

Von Walter Habicht, Stans

Einleitung

1. Sei K der Körper der reellen Zahlen, R^n der n-dimensionale affine Raum mit Koordinaten aus K und Q ein Vollwürfel des R^n, d. h. die Menge der Punkte $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des R^n, für welche die Ungleichungen $-m \leqq \xi_i \leqq m$ $(m \in K;\ i = 1, \ldots, n)$ erfüllt sind. Dann gilt der

Satz von der unteren Schranke.
Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine in Q definierte, daselbst stetige und positive reelle Funktion von n Variablen, so besitzt $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ auf Q eine positive untere Schranke.

Offenbar ist dieser Satz enthalten im Weierstraßschen

Satz vom Minimum.
Eine in Q definierte, daselbst stetige reelle Funktion $\varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$ nimmt in einem Punkt von Q ihr Minimum an.

2. Es entsteht nun die Frage, ob diese beiden Sätze ihre Gültigkeit behalten, wenn man anstatt K einen reell-abgeschlossenen Körper Ω[1]) zugrunde legt und anstatt stetigen Funktionen Polynome mit Koeffizienten aus Ω betrachtet.

Der genannte Weierstraßsche Satz hat topologischen Charakter; bei seinem Beweis spielt die lokale Kompaktheit des Körpers der reellen Zahlen eine wichtige Rolle. Nun existiert in jedem reell-abgeschlossenen Körper Ω eine bestimmte Anordnung und damit eine natürliche Topologie (in welcher die Intervalle die „Umgebungen" sind); der Koordinatenraum R^n über Ω ist dann als Cartesisches Produkt von n Räumen Ω ebenfalls topologisch. Daher liegt der Versuch nahe, den üblichen Beweis des Weierstraßschen Satzes folgendermaßen auf den Fall eines beliebigen reell-abgeschlossenen Körpers Ω zu übertragen: man bette Ω in einen lokal-kompakten geordneten Körper $\overline{\Omega}$ ein, beweise den Satz in der üblichen Weise für den Raum $\overline{R^n}$ über $\overline{\Omega}$ und zeige schließlich, daß für den Fall, wo die stetige Funktion φ ein Polynom über Ω ist, die Koordinaten eines Punktes, in dem φ den Minimalwert annimmt, schon in Ω liegt. — Ein solcher Versuch muß aber scheitern; denn wie man leicht sieht, ist die Anordnung eines lokal-kompakten geordneten Körpers $\overline{\Omega}$

[1]) Vgl. dazu: *B. L. v. d. Waerden*, Moderne Algebra (Berlin 1940), Teil 1, Kapitel 10, sowie *Artin-Schreier*, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Hamb. Abh. 5 (1927) 85—99.

notwendigerweise archimedisch; also muß auch der Teilkörper Ω von $\overline{\Omega}$ archimedisch geordnet (und somit einem reellen Zahlkörper stetig-isomorph) sein. Für einen nicht-archimedisch angeordneten Körper Ω führt also dieser Ansatz nicht zum Ziel.

3. Man muß deshalb nach einer andern Beweismethode suchen. Dementsprechend wird in dieser Arbeit der *Satz von der unteren Schranke für Polynome mit Koeffizienten aus einem reell-abgeschlossenen Körper Ω* (cf. § 5, 4., Satz 11) rein algebraisch bewiesen, d. h. es werden dabei nur benützt:

1. Die Anordnungseigenschaften eines reell-abgeschlossenen Körpers;
2. die Tatsache, daß ein reell-abgeschlossener Körper durch Adjunktion von i algebraisch-abgeschlossen wird;
3. die spezifischen Eigenschaften von *Polynomen* über Ω.

Die ersten beiden Paragraphen enthalten einige vorbereitende Sätze und Definitionen über algebraische Mannigfaltigkeiten resp. Punktmengen des n-dimensionalen affinen Koordinatenraumes R^n über Ω. In § 3 wird die gleichmäßige Stetigkeit eines Polynomes in einem beschränkten Bereich des R^n bewiesen. — Der eigentliche Beweis beginnt mit Satz 9 (cf. § 4, 1.); es wird hier eine Reihe von Ungleichungen aufgestellt, welche in § 5 zum Beweis des Satzes 11 führen.

Den Satz vom Minimum beabsichtige ich in einer späteren Arbeit als Spezialfall eines allgemeineren Satzes zu beweisen; zum Beweis des letzteren wird dabei u. a. das Ergebnis der vorliegenden Arbeit benützt.

§ 1. Reelle algebraische Mannigfaltigkeiten.

1. Sei Ω ein reell-abgeschlossener Körper und R^n der n-dimensionale affine Raum über Ω, d. h. die Menge der n-tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(\xi_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n)$. $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ heißt ein *Punkt* des R^n.

Definition 1.

Unter einer (reellen affinen) Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des R^n verstehen wir die Menge der Punkte $\xi \subset R^n$, in welchen ein System $\mathfrak{S} = \{p_\varrho\}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ von r Polynomen $p_\varrho(x_1, \ldots, x_n)$ in n Variablen mit Koeffizienten aus Ω verschwindet. $\mathfrak{M}$ heißt die zu $\mathfrak{S}$ zugehörige Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{S}$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriges System.

Ist $\{p_\varrho\}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriges System, so wegen der Realität von Ω auch $\{p\}$, wo $p = \sum_{\varrho=1}^{r} p_\varrho^2$. p heiße ein *zu $\mathfrak{M}$ gehöriges Polynom.*

2. Sei $A = \Omega(i)$ der aus Ω durch Adjunktion von $i = \sqrt{-1}$ entstehende algebraisch-abgeschlossene Körper und P^n der n-dimensionale affine Raum über A. $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ $(\zeta_i \in A,\ i = 1, \ldots, n)$ heißt ein *Punkt* von P^n. Weiter verstehen wir unter dem *projektiven* Raum S^n über A die Menge der Klassen untereinander proportionaler $n+1$-tupel $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ $(Z_i \in A,\ i = 0, \ldots, n$, nicht alle $Z_i = 0)$. Eine solche Klasse heißt ein *Punkt* des S^n; die Menge der Punkte des S^n mit $Z_0 \neq 0$ heißt der *eigentliche Teil* E^n des S^n. Die Punkte von E^n lassen sich durch die Zuordnung $\zeta_i = \dfrac{Z_i}{Z_0}$ $(i = 1, \ldots, n)$ eineindeutig auf P^n abbilden. Dabei gehe eine Teilmenge $N \subseteqq E^n$ über in $N' \subseteqq P^n$.

Definition 1*a*

Unter einer (komplexen projektiven) Mannigfaltigkeit M des S^n verstehen wir die Menge der Punkte des S^n, in welchen ein System $\Sigma = \{P_\varrho\}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ von r Formen $P_\varrho(X_0, \ldots, X_n)$ in $n+1$ Variablen mit Koeffizienten aus A verschwindet. M heiße die zu Σ gehörige Mannigfaltigkeit, Σ ein zu M gehöriges Formensystem. Liegen insbesondere die Koeffizienten der P_ϱ schon in Ω, so heiße M eine Ω-Mannigfaltigkeit des S^n.

Ist M eine Ω-Mannigfaltigkeit des S^n, so ist offenbar $\mathfrak{M} = (M \cap E^n)' \cap R^n$ eine Mannigfaltigkeit des R^n. $\mathfrak{M}$ heiße *die zu M gehörige Mannigfaltigkeit des R^n, M eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige Ω-Mannigfaltigkeit des S^n.*

3. Satz 1. *Zu jeder Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des R^n gibt es eine (sogar unendlich viele) zugehörige Ω-Mannigfaltigkeit des S^n.*

Beweis: Sei $\mathfrak{S} = \{p_\varrho\}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriges System, p_ϱ von Grad l_ϱ[2]) und m_ϱ eine beliebige natürliche Zahl $\geqq l_\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Bilden wir das Formensystem $\Sigma = \{P_\varrho\}$, wobei $P_\varrho(X_0, \ldots, X_n) = X_0^{m_\varrho} \cdot p_\varrho\left(\dfrac{X_1}{X_0}, \ldots, \dfrac{X_n}{X_0}\right)$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, sowie die zu Σ gehörige Mannigfaltigkeit M, so gilt offenbar $\mathfrak{M} = (M \cap E^n)' \cap R^n$, q. e. d.

Satz 2. *Ist eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_2$ des R^n echte Teilmannigfaltigkeit einer andern $\mathfrak{M}_1$, d. h. ist $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$, und sind M_2 resp. M_1 zugehörige Ω-Mannigfaltigkeiten des S^n, so ist $M_1 \cap M_2 = M_2^*$ ebenfalls eine zu $\mathfrak{M}_2$ gehörige Ω-Mannigfaltigkeit des S^n, und $M_2^* \subset M_1$.*

Beweis: a) Zunächst ist $M_1 \cap M_2$ wieder eine Ω-Mannigfaltigkeit des S^n. Ferner folgt aus der eineindeutigen Zuordnung $E^n \rightleftarrows P^n$:

---

[2]) Der Grad von p ist der Grad des höchsten homogenen Bestandteils.

$$((M_1 \cap M_2) \cap E^n)' = (M_1 \cap E^n)' \cap (M_2 \cap E^n)' , \tag{1}$$

also weiter

$$((M_1 \cap M_2) \cap E^n)' \cap R^n = ((M_1 \cap E^n)' R^n) \cap ((M_2 \cap E^n)' \cap R^n) = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2 .$$

b) Wäre $M_1 \cap M_2 = M_1$, so hätte man nach (1): $\mathfrak{M}_2 = (M_1 \cap E^n)' \cap R^n = \mathfrak{M}_1$, was nicht der Fall ist.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt unmittelbar

Satz 2a. *Ist eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_2$ des R^n echter Teil einer andern $\mathfrak{M}_1$, d. h. $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$, so gibt es zwei zugehörige Ω-Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 des S^n, so daß $M_2 \subset M_1$ ist.*

4. Satz 3 (Kettensatz). *Eine Folge von Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \cdots$ des R^n, in der jedes $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ echter Teil von $\mathfrak{M}_\nu$ ist, muß nach endlich vielen Schnitten abbrechen.*

Beweis. Nach Satz 3 gibt es eine Kette zugehöriger Ω-Mannigfaltigkeiten des S^n mit $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$. Diese bricht nach dem Kettensatz der algebraischen Geometrie [3]) nach endlich vielen Schritten ab; also muß dasselbe für die Kette $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \cdots$ gelten.

§ 2. Reelle Punktmengen.

1. Während § 1 von algebraischen Mannigfaltigkeiten im R^n handelt, beziehen sich die Sätze dieses Paragraphen allgemeiner auf Punktmengen $\mathfrak{M}$ des R^n. Bekanntlich kann Ω auf genau eine Weise angeordnet werden, indem man alle diejenigen von Null verschiedenen Elemente, welche sich in Ω als Quadrate darstellen lassen, > 0 setzt. Unter dem *Betrag* $|a|$ eines Elementes $a \neq 0$ verstehen wir sodann die positive der beiden Zahlen a und $-a$. Wir gehen aus von einem Punkt $\xi^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ des R^n und einem Element $\varepsilon > 0$ aus Ω.

Definition 2. *Unter der ε-Umgebung $U_\varepsilon(\xi^0)$ des Punktes ξ^0 verstehen wir die Menge der Punkte ξ des R^n, welche sämtliche Ungleichungen*

$$|\xi_i - \xi_i^0| \leqq \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

erfüllen; unter der ε-Umgebung $U_\varepsilon(\mathfrak{M})$ einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ des R^n die Vereinigungsmenge $\{U_\varepsilon(\xi)\}_{\xi \in \mathfrak{M}}$, erstreckt über alle Punkte von $\mathfrak{M}$, oder, falls $\mathfrak{M}$ leer ist, die leere Menge.

---

[3]) Vgl.: *B. L. v. d. Waerden*, Einführung in die Algebraische Geometrie (Berlin, Springer 1939), Kap. IV, § 28, p. 109.

Aus $\mathfrak{M}' \subseteqq \mathfrak{M}$ folgt also $U_\varepsilon(\mathfrak{M}') \subseteqq U_\varepsilon(\mathfrak{M})$, aus $0 < \delta \leqq \varepsilon$ folgt $U_\delta(\mathfrak{M}) \subseteqq U_\varepsilon(\mathfrak{M})$.

Definition 3. *Unter dem ε-Komplement $K_\varepsilon(\xi^0)$ des Punktes ξ^0 verstehen wir die Menge des Punkte ξ des R^n, welche nicht sämtliche Ungleichungen*

$$|\xi_i - \xi_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

erfüllen; unter dem ε-Komplement $K_\varepsilon(\mathfrak{M})$ einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ des R^n den Durchschnitt $(K_\varepsilon(\xi))_{\xi \in \mathfrak{M}}$, erstreckt über alle Punkte von $\mathfrak{M}$, oder, falls $\mathfrak{M}$ leer ist, den ganzen R^n.

Aus $\mathfrak{M}' \subseteqq \mathfrak{M}$ folgt also $K_\varepsilon(\mathfrak{M}') \supseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{M})$, aus $\delta \leqq \varepsilon$ folgt $K_\delta(\mathfrak{M}) \subseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{M})$. Aus $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ und $\xi \subset U_{\varepsilon'}(\mathfrak{M})$ folgt $\xi \not\subset K_\varepsilon(\mathfrak{M})$; ist umgekehrt $\xi \not\subset K_\varepsilon(\mathfrak{M})$, so gibt es ein ε' aus Ω mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ und $\xi \subset U_{\varepsilon'}(\mathfrak{M})$.

Satz 4a. *Seien δ, ε zwei Elemente von Ω mit $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei Punktmengen des R^n. Dann gilt*

$$U_\varepsilon(\mathfrak{A}) \cap K_\delta(\mathfrak{B}) \subseteqq U_\varepsilon\left(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})\right) . \tag{2}$$

Beweis. Ist $\mathfrak{A}$ leer, so ist der Satz trivial. Sei $\mathfrak{A}$ nicht leer; dann gibt es zu $\xi \subset U_\varepsilon(\mathfrak{A}) \cap K_\delta(\mathfrak{B})$ einen Punkt $\xi^0 \subset \mathfrak{A}$, so daß

$$|\xi_i - \xi_i^0| \leqq \varepsilon < \frac{\delta}{2} \qquad (i = 1, \ldots, n) .$$

Wäre $\xi^0 \subset U_{\delta/2}(\mathfrak{B})$, so gäbe es $\xi^* \subset \mathfrak{B}$, so daß

$$|\xi^0 - \xi_i^*| \leqq \frac{\delta}{2} \qquad (i = 1, \ldots, n) ;$$

also wäre

$$|\xi_i - \xi_i^*| \leqq |\xi_i - \xi_i^0| + |\xi_i^0 - \xi_i^*| < \delta \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

also $\xi \not\subset K_\delta(\mathfrak{B})$, was nicht der Fall ist. Also ist $\xi^0 \subset \mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})$ und folglich $\xi \subset U_\varepsilon\left(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})\right)$.

Satz 4b. *Seien δ, ε zwei Elemente von Ω mit $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei Punktmengen des R^n. Dann gilt*

$$K_\varepsilon\left(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})\right) \cap K_\delta(\mathfrak{B}) = K_\varepsilon(\mathfrak{A}) \cap K_\delta(\mathfrak{B}) . \tag{3}$$

Beweis. Jedenfalls ist $K_\varepsilon(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})) \supseteq K_\varepsilon(\mathfrak{A})$. Sei

$$\xi \subset K_\varepsilon(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})) ,$$

aber $\xi \not\subset K_\varepsilon(\mathfrak{A})$. Sei $\varepsilon' \in \Omega$ mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so daß $\xi \subset U_{\varepsilon'}(\mathfrak{A})$. Wäre $\xi \subset K_\delta(\mathfrak{B})$, also $\xi \subset U_{\varepsilon'}(\mathfrak{A}) \overline{\cap} K_\delta(\mathfrak{B})$, so wäre nach Satz 4a:

$$\xi \subset U_{\varepsilon'}(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})) , \quad \text{also} \quad \xi \not\subset K_\varepsilon(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})) .$$

Also kann nicht $\xi \subset K_\delta(\mathfrak{B})$ sein, woraus Satz 4b folgt.

2. Im folgenden sei eine der Koordinaten des R^n, etwa die erste, ausgezeichnet. Dementsprechend bezeichnen wir die Punkte des R^n mit $(\xi, \eta) = (\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$. Wir betrachten nun neben dem R^n einen R^{n-1} über Ω.

Definition 4. *Unter der Projektion eines Punktes (ξ, η) des R^n verstehen wir den Punkt η des R^{n-1}, unter der Projektion $\mathfrak{M}^*$ einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ des R^n die Menge der Projektionen sämtlicher Punkte von $\mathfrak{M}$.*

Unter $U_\varepsilon^*(M^*)$ resp. $K_\varepsilon^*(\mathfrak{M}^*)$ verstehen wir die Mengen $U_\varepsilon(\mathfrak{M}^*) \cap R^{n-1}$ resp. $K_\varepsilon(\mathfrak{M}^*) \cap R^{n-1}$.

Aus $\mathfrak{M}' \subseteqq \mathfrak{M}$ folgt $\mathfrak{M}'^* \subseteqq \mathfrak{M}^*$; für zwei Mengen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ gilt deshalb $(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2)^* \subseteqq \mathfrak{M}_1^* \cap \mathfrak{M}_2^*$.

Definition 5a. Unter dem ε-Supplement $S_\varepsilon(\xi^0, \eta^0)$ des Punktes (ξ^0, η^0) von R^n verstehen wir die Menge der Punkte (ξ, η) des R^n mit

$$\eta_i = \eta_i^0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

und

$$|\xi - \xi^0| \geqq \varepsilon .$$

Die Punkte von $\mathfrak{M}$, die dieselbe Projektion besitzen, seien zu *Fasern* $\mathfrak{F}$ zusammengefaßt.

Definition 5b. Unter dem ε-Supplement $S_\varepsilon(\mathfrak{F})$ einer Faser $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{M}$ verstehen wir den Durchschnitt $(S_\varepsilon(\xi))_{\xi \in \mathfrak{F}}$, erstreckt über alle Punkte von $\mathfrak{F}$, unter dem ε-Supplement $S_\varepsilon(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ die Vereinigungsmenge $\{S_\varepsilon(\mathfrak{F})\}_{\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}}$, erstreckt über alle Fasern von $\mathfrak{M}$, oder, falls $\mathfrak{M}$ leer ist, die leere Menge.

Danach ist also $(S_\varepsilon(\mathfrak{M}))^* \subseteqq \mathfrak{M}^*$.

Satz 5. *Ist $\mathfrak{M}$ eine Punktmenge des R^n und $0 < \delta < \varepsilon$, so liegen alle Punkte von $K_\varepsilon(\mathfrak{M})$, deren Projektionen in $U_\delta^*(\mathfrak{M}^*)$ liegen, in $U_\delta(S_\varepsilon(\mathfrak{M}))$.*

Beweis. Sei $(\xi, \eta) \subset K_\varepsilon(\mathfrak{M})$ und $\eta \subset U_\delta^*(\mathfrak{M}^*)$. Dann gibt es $(\xi^0, \eta^0) \subset \mathfrak{M}$, so daß

$$|\eta_i - \eta_i^0| \leqq \delta < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{4}$$

und

$$|\xi - \xi^0| \geqq \varepsilon$$

ist. Ist weiter $(\bar{\xi}^0, \eta^0)$ ein *beliebiger* Punkt der Faser von $\mathfrak{M}$, auf der (ξ^0, η^0) liegt, so ist auch $|\xi - \bar{\xi}^0| \geqq \varepsilon$; also gilt $(\xi, \eta^0) \subset S_\varepsilon(\mathfrak{M})$; also wegen $(\xi, \eta) \subset U_\delta((\xi, \eta^0))$: $(\xi, \eta) \subset U_\delta(S_\varepsilon(\mathfrak{M}))$.

Danach gilt also $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1 \subseteqq U_\delta(S_\varepsilon(\mathfrak{M}))$, $\mathfrak{N}_2^* \subseteqq K_\delta^*(\mathfrak{M}^*)$.

3. Im folgenden sei Θ die Menge der Punkte (ξ, η) von R^n, deren erste Koordinaten zwischen zwei festen Schranken liegen:

$$\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2 \qquad (\xi_1, \xi_2 \in \Omega) \ . \tag{5}$$

Eine Punktmenge $\mathfrak{C}^\theta$, die aus lauter *Fasern von Θ* besteht, heiße eine *zylindrische* Punktmenge von Θ. Für zwei solche gilt $(\mathfrak{C}_1^\theta \cap \mathfrak{C}_2^\theta)^* = \mathfrak{C}_1^* \cap \mathfrak{C}_2^*$ (wobei wir zur Abkürzung $\mathfrak{C}^{\theta *} = \mathfrak{C}^*$ setzen).

Satz 6. *Ist $\mathfrak{A}^\theta$ eine zylindrische Punktmenge von Θ, so ist*

$$(K_\varepsilon(\mathfrak{A}^\theta) \cap \Theta)^* = K_\varepsilon^*(\mathfrak{A}^*) \ .$$

Beweis. *a)* Sei $(\xi, \eta) \subset K_\varepsilon(\mathfrak{A}^\theta) \cap \Theta$. Ist η^0 ein *beliebiger* Punkt von $\mathfrak{A}^*$, so ist $(\xi, \eta^0) \subset \mathfrak{A}^\theta$. Es können also nicht alle Ungleichungen $|\eta_i - \eta_i^0| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ erfüllt sein, also ist $\eta \subset K_\varepsilon^*(\eta^0)$, folglich $\eta \subset K_\varepsilon^*(\mathfrak{A}^*)$.

b) Sei $\eta \subset K_\varepsilon^*(\mathfrak{A}^*)$. Dann gilt $(\xi_1, \eta) \subset K_\varepsilon(\mathfrak{A}^\theta) \cap \Theta$.

Schließlich sei Q ein Vollquader des R^n, d. h. die Menge der Punkte (ξ, η) des R^n, welche n Ungleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2 \qquad & (\xi_1, \xi_2, \eta_{1i}, \eta_{2i} \in \Omega\,; \\ \eta_{1i} \leqq \eta_i \leqq \eta_{2i} \qquad & i = 1, \ldots, n-1) \end{aligned} \tag{5'}$$

erfüllen. Sei $\mathfrak{N}^0$ eine aus lauter *Fasern des R^n* bestehende Punktmenge, $\mathfrak{N}^*$ ihre Projektion, ferner die Vereinigungsmengen $\mathfrak{N}^0 \vee K_1(Q) = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}^* \vee K_1^*(Q^*) = \mathfrak{B}^*$.

Satz 7. *Für* $\varepsilon \in \Omega$ *mit* $0 < \varepsilon < 1$ *gilt*

$$(K_\varepsilon(\mathfrak{A}))^* = K_\varepsilon^*(\mathfrak{B}^*) .$$

Beweis. *a*) Sei $(\xi, \eta) \subset K_\varepsilon(\mathfrak{A})$. Dann ist erstens $\eta \in K_\varepsilon^*(K_1^*(Q^*))$, zweitens $\eta \in K_\varepsilon^*(\mathfrak{N}^*)$, also $\eta \in K_\varepsilon^*(\mathfrak{B}^*)$.

b) Sei $\eta \subset K_\varepsilon^*(\mathfrak{B}^*)$, ferner ξ ein beliebiges Element von Ω mit $\xi_1 - 1 + \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_2 + 1 - \varepsilon$. Dann liegt offenbar (ξ, η) in $K_\varepsilon(\mathfrak{A})$.

§ 3. Eine Stetigkeitseigenschaft reeller Polynome.

1. Wir bezeichnen die Koordinaten des R^n wieder gleichmäßig mit $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Im R^n sei ein Vollquader Q gegeben durch die Ungleichungen

$$\xi_{1i} \leqq \xi_i \leqq \xi_{2i} \qquad (\xi_{1i}, \xi_{2i} \in \Omega,\ i = 1, \ldots, n) . \tag{5''}$$

Ferner sei $p(x_1, \ldots, x_n)$ ein Polynom in n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus Ω.

Satz 8. *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *aus* Ω *gibt es ein* $\delta > 0$ *aus* Ω, *so daß für zwei beliebige Punkte* $\xi \subset Q$, $\eta \subset Q$ *mit* $|\xi_i - \eta_i| \leqq \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$|p(\xi_1, \ldots, \xi_n) - p(\eta_1, \ldots, \eta_n)| \leqq \varepsilon$$

wird.

Beweis. Ist $y_1, \ldots, y_n$ eine neue Reihe von Unbestimmten, so gibt es n Polynome $A_1, \ldots, A_n$ in den x und den y, so daß

$$p(y_1, \ldots, y_n) - p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x, y) \cdot (y_\nu - x_\nu) \tag{6}$$

ist[4]). Ist dann M_ν eine obere Schranke für $|A_\nu(\xi, \eta)|$, $\xi \subset Q$, $\eta \subset Q$ und $M = \max_\nu (M_\nu)$ [5]), so setze man $\delta = \dfrac{\varepsilon}{n \cdot M}$, und (6) liefert ohne weiteres die Behauptung.

Satz 8a. *Verschwindet ein Polynom* $p(x_1, \ldots, x_n)$ *auf einer Punktmenge* $\mathfrak{M} \subseteqq Q$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *aus* Ω, *so daß auf* $U_\delta(\mathfrak{M}) \cap Q$: $|p(\xi_1, \ldots, \xi_n)| \leqq \varepsilon$ *ist.*

---

[4]) Beweis: $p(y) - p(x) = \sum_\nu \left(p(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, y_\nu, \ldots, y_n) - p(x_1, \ldots, x_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_n)\right)$.

[5]) Sei etwa $A_\nu(x, y) = a_1 x_1^l + \cdots + a_\omega y_n^l$ und $-m \leqq \xi_i \leqq m$ $(m \geqq 1;\ i = 1, \ldots, n$ ein Q umschließender, n-dimensionaler Würfel des R^n. Dann setze man

$$M_\nu = (|a_1| + \cdots + |a_\omega|) \cdot m^l .$$

Beweis. Wir bestimmen δ nach Satz 8. Ist dann $\xi \subset U_\delta(\mathfrak{M}) \cap Q$, so gibt es nach Definition 2 (cf. § 2, 1.) einen Punkt $\xi^0 \subset \mathfrak{M}$, so daß $|\xi_i - \xi_i^0| \leqq \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$, also ist $|p(\xi)| = |p(\xi) - p(\xi^0)| \leqq \varepsilon$, q. e. d.

Satz 8b. *Besitzt* $|p(x_1, \ldots, x_n)|$ *auf* $\mathfrak{M} \subseteqq Q$ *eine positive untere Schranke* d, *so gibt es ein* $\delta > 0$ *aus* Ω, *so daß auf* $U_\delta(\mathfrak{M}) \cap Q$: $|p(\xi)| \geqq \frac{d}{2}$ *ist.*

Beweis. Wir setzen $\varepsilon = \frac{d}{2}$ und bestimmen δ nach Satz 8. Zu $\xi \subset U_\delta(\mathfrak{M}) \cap Q$ gibt es dann $\xi^0 \subset \mathfrak{M}$ mit $|\xi_i - \xi_i^0| \leqq \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$; also ist $|p(\xi)| \geqq |p(\xi^0)| - |p(\xi) - p(\xi^0)| \geqq \frac{d}{2}$, q. e. d.

§ 4. Die Abstandsgleichungen.

1. Sei Q ein Vollquader des R^n. Wie in § 2, 2. ff. zeichnen wir die erste Koordinate aus. Ferner sei $p(x, y) = p(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ ein Polynom in n Variablen $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ mit Koeffizienten aus Ω.

Satz 9. *Zu jedem Polynom* $p(x, y)$ *gibt es eine Reihe von endlich vielen Polynomen* $H_\nu(y)$ *in den* y *allein, so daß für* $\xi \in \Omega$, $\eta \subset Q^*$ *und für das erste im Punkte* η *nicht verschwindende Polynom* $H_s(y)$:

$$|p(\xi, \eta)| \geqq |H_s(\eta)| \cdot |\xi - \xi_\pi|^{p_s} . \tag{7}$$

Dabei bedeutet ξ_π *die* ξ *am nächsten gelegene reelle Wurzel von* $p(x, \eta)$ *und* p_s *die Anzahl der reellen Wurzeln von* $p(x, \eta)$. *Besitzt also* $p(x, \eta)$ *keine reelle Wurzel, so vereinfacht sich* (7) *zu*

$$|p(\xi, \eta)| \geqq |H_s(\eta)| . \tag{7'}$$

Verschwinden alle $H_\nu(y)$ *im Punkte* η, *so verschwindet* $p(x, \eta)$ *identisch.*

Die Ungleichungen (7) mögen die *Abstandsungleichungen* heißen. Wir teilen den Beweis von Satz 9 in fünf Abschnitte.

2. Sei

$$p(x, y) = c_0(y) \cdot x^l + \cdots + c_1(y) , \tag{8}$$

wobei die $c_\lambda(y)$ $(\lambda = 0, \ldots, l)$ Polynome in den y bedeuten. Wir setzen zunächst voraus, daß $l \geqq 2$ sei. Seien $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l$ die Wurzeln von $p(x)$ in einem algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper von $\Omega(y)$, also

$$p(x, y) = c_0(y) \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (x - \vartheta_\lambda) , \tag{8'}$$

und $P(x)$ das Polynom, dessen Wurzeln die Quadrate $(\vartheta_\lambda - \vartheta_\mu)^2$ sind:

$$P(x) = \prod_{\lambda<\mu} \left(x - (\vartheta_\lambda - \vartheta_\mu)^2\right) = x^L + C_1 \cdot x^{L-1} + \cdots + C_L \quad \left(L = \tfrac{1}{2} l\,(l-1)\right). \tag{9}$$

Dabei sind die C_Λ symmetrische Polynome der ϑ_λ, also

$$C_\Lambda = F_\Lambda\left(\frac{c_1(y)}{c_0(y)}, \ldots, \frac{c_l(y)}{c_0(y)}\right) = \frac{G_\Lambda(y)}{(c_0(y)^{r_\Lambda}} \quad (\Lambda = 1, \ldots, L), \tag{10}$$

wobei die $G_\Lambda(y)$ Polynome in den y mit Koeffizienten aus Ω und die r_Λ positive ganze Zahlen bedeuten. Wir dehnen Formel (10) noch auf den Index $\Lambda = 0$ aus, indem wir setzen $G_0(y) = 1$, $r_0 = 0$.

Sei nun η ein beliebiger Punkt von Q^*, in dem $c_0(\eta)$ nicht verschwindet, und $G_k(\eta)$ $(0 \leqq k \leqq L)$ der *letzte nicht verschwindende* unter den Werten $G_\Lambda(\eta)$. Da (10) bei der Spezialisierung der y zu den η erhalten bleibt, so gilt nach (9)

$$\prod_{\zeta_\lambda<\zeta_\mu} (\zeta_\lambda - \zeta_\mu)^2 = \frac{G_k(\eta)}{(c_0(\eta)^{r_k}}, \tag{11}$$

wobei links das *Produkt der Quadrate der nichtverschwindenden Differenzen der Wurzeln* $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ *von* $p(x,\eta)$ steht.

3. $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ sind Elemente des algebraisch-abgeschlossenen Körpers A, der aus Ω durch Adjunktion von i entsteht. Verstehen wir unter dem *Betrag* $|\zeta|$ eines Elements ζ von $A = \Omega(i)$ die positive Quadratwurzel aus seiner Norm bezüglich Ω, so gelten für die Beträge zweier Elemente ζ, ζ' von A die Gesetze

$$|\zeta \cdot \zeta'| = |\zeta| \cdot |\zeta'|$$

und

$$|\zeta + \zeta'| \leqq |\zeta| + |\zeta'| \text{ [6]}. \tag{12}$$

Wir geben jetzt für die Quadrate der Beträge der Wurzeldifferenzen $\zeta_\lambda - \zeta_\mu$ eine *obere Schranke* an.

Wegen (12) ergibt sich aus (8) für $\eta \subset Q^*$ und $\zeta \in \Omega(i)$:

$$|p(\zeta,\eta)| \geqq |c_0(\eta)| \cdot |\zeta|^l - |c_1(\eta)| \cdot |\zeta|^{l-1} - \cdots - |c_l(\eta)|.$$

Wie leicht ersichtlich, gibt es deshalb ein $m > 0$ aus Ω, so daß für $|\zeta| > \dfrac{m}{|c_0(\eta)|}$ unabhängig von der speziellen Wahl von η im Q^*:

[6]) Das letztere folgt aus der *Cauchy-Schwarz*schen Ungleichung, und diese gilt in beliebigen formal-reellen Körpern (vgl. a. a. O. Fußnote 1).

$|p(\zeta,\eta)| > 0$ ist. Also gilt für sämtliche Wurzeln ζ_λ von $p(x,\eta)$: $|\zeta_\lambda| \leqq \frac{m}{|c_0(\eta)|}$. Ist schließlich $4m^2 = M$, so folgt nach (12):

Für je zwei Wurzeln ζ_λ, ζ_μ von $p(x,\eta)$ $(\eta \subset Q^*)$ gilt

$$|\zeta_\lambda - \zeta_\mu|^2 \leqq \frac{M}{|c_0(\eta)|^2}, \tag{13}$$

wobei $M \in \Omega$ von der speziellen Wahl von η in Q^* nicht abhängt.

4. Wir wollen jetzt für die Quadrate der Beträge der *nichtverschwindenden* unter den Wurzeldifferenzen $\zeta_\lambda - \zeta_\mu$ eine *untere Schranke* angeben. Sei $G_k(\eta)$ der letzte nichtverschwindende unter den Werten $G_\Lambda(\eta)$. Um die Schreibweise zu vereinfachen, lassen wir im folgenden den Index k weg und fügen ihn am Schluß wieder hinzu.

Ist s die Gliederzahl des Produkts (11), so liefern die Formeln (11) und (13) unter Benützung von (12) für je zwei verschiedene Wurzeln ζ_λ, ζ_μ:

$$|\zeta_\lambda - \zeta_\mu|^2 \geqq \frac{|G(\eta)|}{|c_0(\eta)|^r} \cdot \frac{|c_0(\eta)|^{2(s-1)}}{M^{s-1}}.$$

Setzen wir noch $2(s-1) - r = \varrho$ und $\frac{1}{M^{s-1}} = d$, so folgt: *Für je zwei verschiedene Wurzeln ζ_λ, ζ_μ von $p(x,\eta)$ $(\eta \subset Q^*)$ gilt*

$$|\zeta_\lambda - \zeta_\mu|^2 \geqq d \cdot |G(\eta)| \cdot |c_0(\eta)|^\varrho; \tag{14}$$

dabei ist $d > 0$ ein von der speziellen Wahl von η in Q^* unabhängiges Element von Ω und ϱ eine ganze Zahl, die übrigens immer $\geqq 0$ gewählt werden kann, indem eventuell eine geeignete Potenz einer oberen Schranke von $|c_0(\eta)|$, $\eta \subset Q^*$, in den Faktor d hineingezogen wird.

5. Wir teilen nun die Wurzeln $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ in zwei Kategorien:

1. Die im Grundkörper Ω liegenden: $\xi_1, \ldots, \xi_p$.
2. Die übrigen: $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2q}$. Diese sind paarweise konjugiert bezüglich Ω:

$$\begin{aligned} \zeta_\lambda &= \varphi_\lambda + i\,\psi_\lambda \\ \zeta_{\lambda+q} &= \varphi_\lambda - i\,\psi_\lambda \end{aligned} \qquad (\varphi_\lambda,\ \psi_\lambda \in \Omega;\ \lambda = 1, \ldots, q).$$

Dabei ist $\psi_\lambda \neq 0$, also $\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+q} \neq 0$ $(\lambda = 1, \ldots, q)$. Ist nun ξ ein beliebiges Element aus Ω, so ist nach Definition des Betrages für eine beliebige Wurzel der 2. Kategorie:

$$|\xi - \zeta_{\lambda'}| \geqq |\psi_\lambda| = \tfrac{1}{2}|\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+q}| \quad (\lambda' = \lambda \text{ oder } \lambda + q,\ \lambda = 1, \ldots, q)\ ,$$

also nach (14)

$$|\xi - \zeta_{\lambda'}|^2 \geqq \tfrac{1}{4}|\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+q}|^2 \geqq \frac{d}{4}\,|G(\eta)| \cdot |c_0(\eta)|^\varrho\ . \tag{15}$$

Ist ferner ξ_π die ξ am nächsten gelegene unter den Wurzeln der 1. Kategorie, so ist

$$\prod_{\lambda=1}^{p} |\xi - \xi_\lambda|^2 \geqq |\xi - \xi_\pi|^{2p}\ . \tag{16}$$

Aus (8′), (15) und (16) folgt also nach (12):

$$|p(\xi,\eta)|^2 \geqq |c_0(\eta)|^2 \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^{2q} \cdot |G(\eta)|^{2q} \cdot |c_0(\eta)|^{2q\varrho} \cdot |\xi - \xi_\pi|^{2p}\ .$$

Setzen wir schließlich $q = q_k$, $p = p_k$, $q \cdot \varrho + 1 = \varrho_k$, $\left(\frac{d}{4}\right)^q = D_k$, so folgt

$$|p(\xi,\eta)| \geqq D_k \cdot |c_0(\eta)|^{\varrho_k} \cdot |G_k(\eta)|^{q_k} \cdot |\xi - \xi_\pi|^{p_k}\ . \tag{17}$$

Dabei ist $D_k \in \Omega$ mit $D_k > 0$ und ϱ_k, q_k, p_k nichtnegative ganze Zahlen, und zwar insbesondere p_k gleich der Anzahl der reellen Wurzeln von $p(x,\eta)$. (17) gilt auch noch, wenn alle Wurzeln reell sind, da dann $q_k = 0$, $\varrho_k = 1$ ist; man setze in diesem Fall $D_k = 1$.

Es bleiben noch die Fälle, daß $p(x,y)$ in x linear oder unabhängig von x ist. Im ersten Fall hat man für $c_0(\eta) \neq 0$:

$$|p(\xi,\eta)| = |c_0(\eta) \cdot \xi + c_1(\eta)| = |c_0(\eta)| \cdot |\xi - \xi_\pi|\ , \tag{17′}$$

im zweiten

$$|p(\xi,\eta)| = |c_0(\eta)|\ . \tag{17″}$$

Diese Fälle sind in (17) enthalten, wenn man beidemal $D = 1$ setzt.

6. In jedem Punkt $\eta \subset Q^*$, in dem $c_0(\eta) \neq 0$ ist, gilt eine Ungleichung (17) (resp. (17′), (17″)) mit $G_k(\eta) \neq 0$. Sei nun in einem Punkt $\eta \subset Q^*$: $c_0(\eta) = 0$. Sollten alle Ausdrücke $c_j(\eta)$ verschwinden, so verschwindet

$p(x,\eta)$ auf der zum Punkt η gehörigen Faser der R^n identisch. Ist dies nicht der Fall und $c_j(y)$ der erste Koeffizient von (8) mit $c_j(\eta) \neq 0$, so stimmt im Punkte η das Polynom $p(x,y)$ überein mit dem Polynom

$$p'(x,y) = c_j(y) \cdot x^{l-j} + \cdots + c_l(y) \ .$$

Wiederholen wir alle oben gemachten Schlüsse für $p'(x,y)$ und setzen nachträglich wieder $p(x,\eta) = p'(x,\eta)$, so finden wir eine Ungleichung

$$| p(\xi,\eta) | \geqq D_{jk} \cdot | c_j(\eta) |^{e_{jk}} \cdot | G_{jk}(\eta) |^{q_{jk}} \cdot | \xi - \xi_\pi |^{p_{jk}} \ .$$

Für $j = l - 1$ setze man $D_{l-1} = 1$, ebenso für $j = l : D_l = 1$. Setzt man schließlich

$$D_{jk} \cdot \big(c_j(y)\big)^{e_{jk}} \cdot \big(G_{jk}(y)\big)^{q_{jk}} = H_{jk}(y)$$

und denkt sich die Polynome $H_{jk}(y)$ erstens nach j, zweitens nach k lexikographisch geordnet ($j = 0, \ldots, l$; $k = \frac{1}{2}(l-j)(l-j-1), \ldots, 0$, resp. $k = 0$ für $j = l-1, l$), so ergibt sich aus der Bedeutung von $c_i(y)$ und $G_{jk}(y)$ unmittelbar Satz 9.

§ 5. Der Satz von der unteren Schranke.

1. Wie im vorhergehenden Paragraphen bezeichnen wir die Punkte des R^n mit $(\xi,\eta) = (\xi,\eta_1,\ldots,\eta_n)$. Wir betrachten in einem Vollquader Q des R^n mit den Ungleichungen (5′) (cf. § 2, 3.) ein Polynom $p(x,y) = p(x, y_1, \ldots, y_n)$ mit Koeffizienten aus Ω und beweisen den grundlegenden

Satz 10. *Sei $p(x,y)$ ein Polynom über Ω und $\mathfrak{M}$ die zu p gehörige Mannigfaltigkeit des R^n. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon \in \Omega$ mit $\varepsilon > 0$ ein $d \in \Omega$ mit $d > 0$, so daß in $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q : | p | \geqq d$ gilt.*

Q kann dabei beliebig gewählt werden. Ist $\mathfrak{M}$ leer, so besagt der Satz, daß $| p(\xi,\eta) |$ in Q eine positive untere Schranke besitzt. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach n. Wir machen also die Hauptinduktionsvoraussetzung (HIV), daß der Satz für $n - 1$ Variable schon bewiesen sei.

Sei Θ die durch die Ungleichungen (5) definierte Punktmenge des R^n (cf. § 2, **3.**). Dann beweisen wir zuerst:

Hilfssatz. Sei $\delta > 0$ und $\mathfrak{B}^*$ eine Punktmenge des R^{n-1}, so daß für beliebiges $\Delta > 0$ das Polynom $p(x,\eta)$ für $\eta \subset \mathfrak{C}_\Delta^* = K_\Delta^*(\mathfrak{B}^*)$ definit ist. Gibt es dann einen Quader Q_0^* des R^{n-1}, so daß für beliebiges $\Delta > 0$: $\mathfrak{C}_\Delta^* \subseteqq Q_0^*$ ist, so besitzt $|p(\xi,\eta)|$ auf der zylindrischen Punktmenge $\mathfrak{C}_\delta^\theta$ von Θ, deren Projektion $\mathfrak{C}_\delta^*$ ist, eine positive untere Schranke D.

Beweis. Ist $\mathfrak{C}_\Delta^*$ leer für beliebiges $\Delta > 0$, so ist nichts zu beweisen. Ist $\mathfrak{C}_\Delta^*$ für $\Delta < \Delta_0$ nicht leer, so ist $p(x,\eta)$ für $\eta \subset \mathfrak{C}_\Delta^*$ definit, also verschwinden für $y = \eta$ nicht alle der in Satz 9 (cf § 4, **1.**) genannten Polynome $H_\nu(y)$. Sei $H^{(1)}$ das erste nicht identisch verschwindende unter den Polynomen H_ν und allgemein $H^{(k+1)}$ das erste auf $H^{(k)}$ folgende, das nicht in allen gemeinsamen reellen Nullstellen von $H^{(1)},\ldots,H^{(k)}$ verschwindet. Ist $H^{(l)}$ das letzte Polynom der so gebildeten Kette, so können $H^{(1)},\ldots,H^{(l)}$ demnach keine gemeinsame reelle Nullstelle haben. Seien $\mathfrak{M}_1^* \supset \mathfrak{M}_2^* \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_l^* = 0$ die im R^{n-1} zu den Systemen $\{H^{(1)}\}, \{H^{(1)}, H^{(2)}\},\ldots,\{H^{(1)},\ldots,H^{(l)}\}$ gehörigen Mannigfaltigkeiten und $\mathfrak{M}_0^* = R^{n-1}$, ferner $\mathfrak{M}_k^\theta$ $(k=0,\ldots,l-1)$ die zylindrische Punktmenge von Θ mit der Projektion $\mathfrak{M}_k^*$.

Sei schon bewiesen: $|p|$ besitzt auf $\mathfrak{M}_k^\theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\theta \left(\Delta' = \frac{\delta}{2^k}\right)$ eine positive untere Schranke D_k. Wir behaupten: $|p|$ besitzt auf $\mathfrak{M}_{k-1}^\theta \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta \left(\Delta = \frac{\delta}{2^{k-1}}\right)$ eine positive untere Schranke D_{k-1}.

Nach Voraussetzung liegen $\mathfrak{C}_\Delta^\theta, \mathfrak{C}_{\Delta'}^\theta$ in Q_0^θ. Nach Satz 8b (cf. § 3) gibt es also ein $\delta > 0$ aus Ω, so daß in $U_\delta(\mathfrak{M}_k^\theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\theta) \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta$: $|p| \geqq \frac{D_k}{2} > 0$. Wir wählen δ außerdem kleiner als Δ'. Nun ist $\mathfrak{M}_{k-1}^\theta \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta = \mathfrak{N}_1^\theta + \mathfrak{N}_2^\theta$, $\mathfrak{N}_1^\theta \subseteqq U_\delta(\mathfrak{M}_k^\theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\theta) \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta$, $\mathfrak{N}_2^\theta \subseteqq K_\delta(\mathfrak{M}_k^\theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\theta) \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta$. Auf $\mathfrak{N}_1^\theta$ gilt $|p| \geqq \frac{D_k}{2}$; für $\mathfrak{N}_2^*$ gilt wegen $\mathfrak{C}_\Delta^* = K_\Delta^*(\mathfrak{B}^*)$, $\mathfrak{C}_{\Delta'}^* = K_{\Delta'}^*(\mathfrak{B}^*)$ und $\Delta' = \frac{\Delta}{2}$ nach den Sätzen 6 (cf. § 2, **3.**) und 4b (cf. § 2, **1.**):

$$\mathfrak{N}_2^* \subseteqq (K_\delta(\mathfrak{M}_k^\theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\theta) \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta)^* = K_\delta^*((\mathfrak{M}_k^\theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\theta)^*) \cap \mathfrak{C}_\Delta^*$$
$$= K_\delta^*(\mathfrak{M}_k^* \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^*) \cap \mathfrak{C}_\Delta^* = K_\delta^*(\mathfrak{M}_k^*) \cap \mathfrak{C}_\Delta^* \subseteqq K_\delta^*(\mathfrak{M}_k^*) \cap Q_0^* .$$

Nun ist $\mathfrak{M}_k^*$ die zu dem Polynom in $n-1$ Variablen $H = \sum_{\kappa=1}^{k} (H^{(\kappa)})^2$ gehörige Mannigfaltigkeit des R^{n-1}. Nach HIV besitzt also H auf

$K_\delta^*(\mathfrak{M}_k^*) \cap Q_0^*$ eine positive untere Schranke $D_k'^2 (D_k' \in \Omega, D_k' > 0)$. $D_k'^2$ ist auch untere Schranke für H auf der Teilmenge $\mathfrak{N}_2^*$. Da aber $\mathfrak{N}_2^* \subseteqq \mathfrak{M}_{k-1}^*$, so verschwinden auf $\mathfrak{N}_2^*$ alle H_ν bis zu $H^{(k)}$, und $H^{(k)}$ besitzt demnach auf $\mathfrak{N}_2^*$ die untere Schranke D_k'. Da $p(x,\eta)$ für $\eta \subset \mathfrak{N}_2^* \subseteqq \mathfrak{C}_\Delta^*$ nach Voraussetzung definit ist, gilt deshalb nach Satz 9 (§ 4, **1.**) für $(\xi,\eta) \subset \mathfrak{N}_2^\theta$:

$$| p(\xi,\eta) | \geqq | H^{(k)}(\eta) | \geqq D_k' > 0 \ .$$

Setzen wir schließlich $D_{k-1} = \min. \left(\frac{D_k}{2}, D_k'\right)$, so besitzt $| p |$ auf $\mathfrak{M}_{k-1}^* \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta = \mathfrak{N}_1^\theta + \mathfrak{N}_2^\theta$ die positive untere Schranke D_{k-1}, q. e. d.

Für $k = l$ fällt $\mathfrak{N}_1^\theta$ weg und es ist $H = \sum_{\lambda=1}^{l} (H^{(\lambda)})^2$ in R^{n-1} definit, besitzt also in Q_0^* und a fortiori in $\mathfrak{C}_\Delta^*$ eine positive untere Schranke D_{l-1}, und diese ist in $\mathfrak{M}_{l-1}^\theta \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta$ untere Schranke für $| p |$. Für $k = 1$ liefert der Induktionschluß wegen $\mathfrak{M}_0^\theta \cap \mathfrak{C}_\delta^\theta = \mathfrak{C}_\delta^\theta$ die Behauptung des Hilfssatzes.

2. Nun sei die zu $p(x,y)$ gehörige Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des R^n nicht leer. Wir setzen zunächst voraus, daß auf $\mathfrak{M}^*$ nicht alle zu $p(x,y)$ gehörigen Polynome $H_\nu(y)$ verschwinden. Sei $H_s = H$ das erste Polynom H_ν, das nicht auf ganz $\mathfrak{M}^*$ verschwindet, $\mathfrak{N}^*$ die zu H gehörige Mannigfaltigkeit des R^n, $\mathfrak{N}^0$ die Menge *aller* Punkte des R^n, deren Projektionen auf $\mathfrak{N}^*$ liegen. Dann ist $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^0 \subset \mathfrak{M}$ eine *echte* Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}$ (die auch leer sein kann) mit dem zugehörigen Polynom $p_1 = p^2 + H^2$. Denken wir uns diese ganze Konstruktion wieder auf p_1 und $\mathfrak{M}_1$ ausgeübt und das Verfahren fortgesetzt, so erhalten wir nach Satz 3 (cf. § 1, **4.**) eine endliche Kette $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_\omega = 0$ und eine Kette zugehöriger Polynome $p = p_0, p_1, \ldots, p_\omega$, wobei $p_{\rho+1} = p_\varrho^2 + H_\varrho^2$ $(\varrho = 0, \ldots, \omega-1)$.

Satz 10 sei schon bewiesen für $p_{\rho+1}$; behauptet wird er für p_ρ. Da $p_{\rho+1}$ aus p_ρ auf analoge Weise entsteht wie p_1 aus p, können wir den Index ϱ weglassen. Sei also schon bewiesen: es gibt $d_1 > 0$ aus Ω, so daß in $K_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) \cap Q$: $p_1 = p^2 + H^2 \geqq 2d_1^2$. Dies gilt a fortiori in $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q$.

Nach Satz 8a (cf. § 3) gibt es $\delta \in \Omega$ mit $0 < \delta < 1$, so daß in $U_\delta^*(\mathfrak{N}^*) \cap Q^*$, also auch in $U_\delta(\mathfrak{N}^0) \cap Q$: $H^2 \leqq d_1^2$. Dann ist $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$, wobei auf $\mathfrak{K}_1 = K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap U_\delta(\mathfrak{N}^0) \cap Q$: $| p | \geqq d_1$ ist, während

$$\mathfrak{K}_2 \subseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_\delta(\mathfrak{N}^0) \cap Q \ . \tag{18}$$

Sei nun $Q_0 = U_1(Q)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}^0 \vee K_1(Q)$, $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{N}^* \vee K_1^*(Q^*)$. Dann gilt wegen $\delta < 1$ die Inklusion $K_\delta(\mathfrak{N}^0) \cap Q \subseteqq K_\delta(\mathfrak{A}) \subset Q_0$, also wegen (18)

$$\mathfrak{K}_2 \subseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_\delta(\mathfrak{A}) \ . \tag{18'}$$

Da $\mathfrak{N}^*$ die Mannigfaltigkeit von H in R^{n-1} ist, so besitzt $|H|$ auf $K^*_{\delta/2}(\mathfrak{N}^*) \cap Q_0^*$, also a fortiori auf $K^*_{\delta/2}(\mathfrak{B}^*)$, nach HIV eine untere Schranke $d_2 > 0$. Ist nun $(\xi, \eta) \subset S_\varepsilon(\mathfrak{M})$, so gilt nach den Definitionen 5a, b (cf. § 2, **2.**) für die ξ am nächsten gelegene reelle Wurzel ξ_π von $p(x,\eta)$: $|\xi - \xi_\pi| \geqq \varepsilon$. Weiter gilt nach Satz 7 (cf. § 3, **4.**):

$$(S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A}))^* \subseteqq \mathfrak{M}^* \cap (K_{\delta/2}(\mathfrak{A}))^* = \mathfrak{M}^* \cap K^*_{\delta/2}(\mathfrak{B}^*) \ . \tag{19}$$

Da aber auf $\mathfrak{M}^*$ alle H_ν bis zu H verschwinden, so folgt aus Satz 9 (cf. § 4, **1.**) für $(\xi, \eta) \subset S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A})$:

$$|p(\xi,\eta)| \geqq |H(\eta)| \cdot |\xi - \xi_\pi|^p \geqq d_2 \cdot \varepsilon^p = d_3 > 0 \ .$$

$S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A})$ liegt in Q_0. Also gibt es nach Satz 8b (cf. § 3) ein $\delta' > 0$, das wir außerdem $< \delta/2$, $< \varepsilon$ und < 1 wählen, sodaß auf $U_{\delta'}(S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A})) \cap Q_0$: $|p| = \dfrac{d_3}{2} > 0$ ist. Nun ist aber nach Satz 4a wegen $K_\delta(\mathfrak{A}) \subset Q_0$:

$$U_{\delta'}(S_\varepsilon(\mathfrak{M})) \cap K_\delta(\mathfrak{A}) \subseteqq U_{\delta'}(S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A})) \cap Q_0 \ ,$$

also besitzt $|p|$ auf $U_{\delta'}(S_\varepsilon(\mathfrak{M})) \cap K_\delta(\mathfrak{A})$ die untere Schranke $\dfrac{d_3}{2} > 0$. Da weiter wegen $\delta' < \varepsilon$ die Projektionen aller Punkte von $K_\varepsilon(\mathfrak{M})$, die nicht in $U_{\delta'}(S_\varepsilon(\mathfrak{M}))$ liegen, nach Satz 5 (cf. § 2, **2.**) in $K^*_{\delta'}(\mathfrak{M}^*)$ liegen, so ist $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$, wobei $|p|$ auf $\mathfrak{L}_1 = U_{\delta'}(S_\varepsilon(\mathfrak{M})) \cap K_\delta(\mathfrak{A})$ die untere Schranke $\dfrac{d_3}{2}$ besitzt, während $\mathfrak{L}_2^* \subseteqq K^*_{\delta'}(\mathfrak{M}^*) \cap Q^*$. Ist schließlich $\mathfrak{B}_0^* = \mathfrak{M}^* \vee K_1^*(Q^*)$, so gilt a fortiori $\mathfrak{L}_2^* \subseteqq K^*_{\delta'}(\mathfrak{B}_0^*) \subset Q_0^*$. Außerdem gilt $\mathfrak{L}_2 \subset Q$, also liegt $\mathfrak{L}_2$ auf der zylindrischen Punktmenge $\mathfrak{L}^\Theta_{\delta'}$ von Θ mit der Projektion $\mathfrak{C}^*_{\delta'} = K^*_{\delta'}(\mathfrak{B}_0^*)$. Da aber $\mathfrak{M}$ die Mannigfaltigkeit von p ist, so ist $p(x,\eta)$ für beliebiges $\Delta > 0$ und $\eta \subset \mathfrak{C}^*_\Delta$ definit, also besitzt $|p|$ auf $\mathfrak{C}^\Theta_{\delta'}$ und a fortiori auf $\mathfrak{L}_2$ nach dem HS eine untere Schranke $D > 0$. Setzen wir schließlich $d = \min.\left(d_1, \dfrac{d_3}{2}, D\right)$, so ist also auf $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q$: $|p| \geqq d > 0$, q. e. d.

Ist schon $\mathfrak{M}_1$ leer, so ist $p_1 = p^2 + H^2$ im R^n definit, besitzt also nach dem HS. in $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q \subseteqq Q$ eine untere Schranke $2d_1^2$ (man setzt im HS: $\mathfrak{B}^* = K_1(Q^*)$; dann ist $Q \subset \mathfrak{C}_\delta^\theta$). Mit dieser Bemerkung ist die Nebeninduktion verankert, sobald wir noch den Fall behandelt haben, daß auf ganz $\mathfrak{M}^*$ alle Polynome H_ν verschwinden.

3. Dies ist nach Satz 9 (cf. § 4, **1.**) nur so möglich, daß für alle Punkte $\eta \subset \mathfrak{M}^*$ das Polynom $p(x,\eta)$ identisch in x verschwindet. $\mathfrak{M}$ besteht deshalb aus *allen* Punkten des R^n, deren Projektion auf $\mathfrak{M}^*$ liegt, also gilt:

$$(K_\varepsilon(\mathfrak{M}))^* = K_\varepsilon^*(\mathfrak{M}^*) \quad \text{und} \quad (K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q)^* = K_\varepsilon^*(\mathfrak{M}^*) \cap Q^* .$$

Ist nun $\delta \in \Omega$ mit $0 < \delta < 1$ und $\delta < \varepsilon$ und $\mathfrak{B}_0^* = \mathfrak{M}^* \vee K_1^*(Q)$, so gilt weiter

$$K_\varepsilon^*(\mathfrak{M}^*) \cap Q^* \subseteqq K_\delta^*(\mathfrak{M}^*) \cap Q^* \subseteqq K_\delta^*(\mathfrak{B}_0^*) = \mathfrak{C}_\delta^* .$$

Ist $\mathfrak{C}_\delta^\theta$ die zylindrische Punktmenge von Θ mit der Projektion $\mathfrak{C}_\delta^*$, so ist also $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q \subseteqq \mathfrak{C}_\delta^\theta$. Nach Definition von $\mathfrak{B}_0^*$ ist aber $p(x,\eta)$ für $\eta \subset \mathfrak{C}_\Delta^*$ (Δ beliebig > 0) definit, woraus wieder nach dem HS. die Behauptung folgt.

Damit ist Satz 10 unter der HIV bewiesen. Um noch die Hauptinduktion zu verankern, bemerken wir, daß sich im Fall $n = 1$ Satz 10 auf die Formel (7) resp. (7′) des Satzes 9 (cf. § 4, **1.**) reduziert (wobei die H_ν gewisse Konstante bedeuten). Damit ist Satz 10 vollständig bewiesen.

4. Wir bezeichnen die Punkte des R^n wieder mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und fassen die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ unter der Sammelbezeichnung x zusammen. Sei Q ein durch die Ungleichungen (5″) (cf. § 3, **1.**) definierter Quader des R^n und $p(x)$ ein in Q definites Polynom über Ω. Ist $p(x)$ in einem Punkt $\xi^0 \subset Q$ positiv, so ist es auf ganz Q positiv[7]). Ein in Q definites Polynom ist also daselbst entweder positiv oder negativ definit.

Satz 11 (Satz von der unteren Schranke). *$p(x)$ sei auf Q positiv definit; dann gibt es ein $d > 0$ aus Ω, so daß für $\xi \subset Q$: $p(\xi) \geqq d$ ist.*

---

[7]) Wäre p in $\xi^1 \subset Q$ negativ, so gäbe es auf der in Q liegenden Verbindungsstrecke der Punkte ξ^0, ξ^1 nach dem Satz von Bolzano (der in beliebigen reell-abgeschlossenen Körpern gilt; vgl. a. a. O. Fußnote 1) einen Punkt ξ, in dem p verschwinden würde.

Beweis. Der Satz sei schon bewiesen für $n - 1$ Variable. Unter dem *Rand* $R(Q)$ verstehen wir die Menge der Punkte von Q, für welche in mindestens einer der Ungleichungen $(5'')$ links oder rechts das Gleichheitszeichen steht. $R(Q)$ läßt sich als Vereinigungsmenge von $2n$ $(n-1)$-dimensionalen Quadern Q_λ^* $(\lambda = 1, \ldots, 2n)$ darstellen, und nach Induktionsvoraussetzung besitzt p auf jeden von diesen, also auch auf $R(Q)$, eine untere Schranke; letztere sei $d_0 > 0$. Nun ist für $0 < \varepsilon < 1$: $U_\varepsilon(R(Q)) \subset Q_0 = U_1(Q)$, also $U_\varepsilon(R(Q)) = U_\varepsilon(R(Q)) \cap Q_0$. Nach Satz 8b (cf. § 3), angewandt auf $R(Q)$ und Q_0, gibt es also ein $\varepsilon \in \Omega$ mit $0 < \varepsilon < 1$, so daß auf $U_\varepsilon(R(Q))$: $p \geqq \frac{d_0}{2}$ ist. Nun enthält $U_\varepsilon(Q)$ keine anderen Punkte als solche von Q und von $U_\varepsilon(R(Q))$, also ist *p sogar auf $U_\varepsilon(Q)$ definit.*

$U_\varepsilon(Q)$ ist ein Quader. Bezeichnen wir sein Äußeres samt Rand mit $\mathfrak{B}$, so ist, wie leicht ersichtlich, $Q = K_\varepsilon(\mathfrak{B})$. Da p auf $U_\varepsilon(Q)$ definit ist, liegt seine zugehörige Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ganz in $\mathfrak{B}$: $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$, also ist $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \supseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{B}) = Q$, d. h. $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q = Q$. Also besitzt $|p|$ nach Satz 10 in Q eine untere Schranke $d > 0$; da p in allen Punkten von Q positiv ist, so ist d auch untere Schranke für p in Q, q. e. d.

Da der Satz für $u = 0$ trivialerweise richtig ist, so folgt er damit für beliebiges n.

(Eingegangen den 24. Januar 1946.)