Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Sur l'intégrabilité élémentaire de quelques classes d'expressions.

Autor: Ostrowski, M.A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16907

Sur l'intégrabilité élémentaire de quelques classes d'expressions

Par M. A. Ostrowski, Bâle

Introduction

Les recherches que nous allons exposer dans la présente communication partent du problème de l'intégration « élémentaire » d'une fonction

$$F(\lg z, z) \ , \tag{1}$$

rationnelle en lg z et z. Nous avons complètement résolu cette question de sorte que l'on peut maintenant à l'aide de calculs purement algébriques reconnaître si l'intégrale de (1) est une fonction élémentaire ou non.

Nous appliquons notre méthode directement au cas plus général où (1) est une fonction rationnelle en lg z à coefficients appartenant à un corps R de fonctions de z, en supposant que R ne contient que des fonctions holomorphes dans un certain domaine et que la dérivée de chaque fonction de R est contenue en R.

Un tel corps de fonctions sera appelé un corps L (corps liouvillien).

Dans ce cas général, on peut encore reconnaître si l'intégrale de (1) est une fonction élémentaire par rapport à R ou non.

On peut même aller plus loin. Soit

$$w = \int p(z)\, dz$$

l'intégrale d'une fonction $p(z)$ de R, qui n'est pas elle-même élémentaire par rapport au corps R. Nous nous posons le problème de reconnaître si l'intégrale

$$\int F(w, z)\, dz \tag{2}$$

est élémentaire par rapport au corps $R(w)$, c'est-à-dire exprimable par w et les grandeurs de R au moyen des fonctions algébriques, des logarithmes et des exponentielles, itérés un nombre fini de fois.

Ce problème est complètement résolu dans la seconde partie de ce mémoire, dans l'hypothèse que les problèmes d'intégration des grandeurs du corps R que l'on rencontre au cours de cette analyse puissent être résolus.

Notre discussion repose essentiellement sur l'énoncé que j'appelle le *principe de Laplace-Liouville*. C'est *Laplace* qui, dans sa Théorie Analytique des Probabilités[1]), a indiqué quelle forme générale devait avoir l'intégrale d'une fonction élémentaire, en disant:

«...la différentiation laissant subsister les quantités exponentielles et radicales, et ne faisant disparaître les quantités logarithmiques qu'autant qu'elles sont multipliées par des constantes, on doit en conclure que l'intégrale d'une fonction différentielle ne peut contenir d'autres quantités exponentielles et radicales que celles qui sont contenues dans cette fonction...»

Toutefois ce n'est que *Liouville* qui est parvenu à démontrer d'une manière exacte l'essentiel de cette observation de Laplace.

Liouville a démontré[2]) que si l'intégrale d'une fonction algébrique $y(z)$ de z est exprimable au moyen des fonctions algébriques, logarithmique et exponentielle, elle peut être mise sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \lg p_\nu(z) + p_0(z) \tag{3}$$

où les $p_\nu(z)$ $(\nu=0,\ldots,n)$ sont des fonctions rationnelles en $y(z)$ et z, et où les α_ν sont des constantes numériques.

Dans un autre mémoire[3]) *Liouville* a étendu ce théorème au cas où la fonction $y(z)$ est une fonction algébrique de z et d'un nombre fini de grandeurs

$$u_\kappa(z) \qquad (\kappa = 1,\ldots,k)$$

satisfaisant à un système de k équations différentielles algébriques simultanées:

$$u'_\kappa = f_\kappa(u_1,\ldots,u_k,z) \qquad (\kappa = 1,\ldots,k) \tag{4}$$

Dans ce cas, si l'intégrale de $y(z)$ est exprimable par $z, u_1,\ldots,u_k$ au moyen des fonctions algébriques, logarithmique et exponentielle, cette intégrale peut encore être écrite sous la forme (3), où les $p(z)$ sont algébriques en $z, u_1(z),\ldots,u_k(z)$; si en particulier $y(z)$ est une *fonction rationnelle en* $z, u_1,\ldots,u_k$ et s'il en est de même des fonctions f_κ en (4), les fonctions $p_\nu(z)$ en (3) peuvent être choisies comme *fonctions rationnelles en* $z, u_1,\ldots,u_k$.

Pourtant, la démonstration de *Liouville*, bien que complètement rigoureuse, est loin d'être simple.

---

1) Paris (1820), 3e édition, p. 7.

2) J. Ec. Pol., Cahier 23 (1834) pp. 42—63.

3) J. de Crelle 13 (1835) pp. 98—108.

C'est la notion de corps liouvillien mentionnée plus haut, qui permet de donner un énoncé très précis et très général du théorème en question et d'en simplifier la démonstration:

Si $y(z)$ est une fonction d'un corps liouvillien R et si l'intégrale de $y(z)$ peut être exprimée par les éléments de R au moyen des fonctions algébriques, logarithmique et exponentielle, cette intégrale peut toujours être mise sous la forme (3), *où les fonctions $p_\nu(z)$* ($\nu = 0, \ldots, n$) *appartiennent à R.*

Cet énoncé que nous appelons le *principe de Laplace-Liouville* est démontré dans le § 3 de cette communication. Au § 2, on trouve un lemme qui résume et généralise les points essentiels des raisonnements de *Liouville*. Les notions de corps L et de ses différentes extensions sont étudiées au § 1.

Quant aux intégrales (2), nous étudions le cas où F est une *fonction linéaire en w* (§ 4), *un polynôme* d'un degré quelconque (§ 5) et *une fonction rationnelle en w* (§ 6).

Les résultats démontrés dans ce mémoire peuvent encore être considérablement généralisés. On peut introduire, en plus de $\lg z$, des intégrales de fonctions algébriques de z, et en plus de e^z, les fonctions inverses des intégrales de fonctions algébriques de z. Alors, la plus grande partie de nos résultats reste encore valable. Toutefois, les démonstrations exigent des considérations plus étendues qui seront développées ailleurs.

§ 1. Les corps L de fonctions et leurs extensions

1. Soit D un domaine (*ouvert*) du plan des z. Nous considérons dans ce qui suit un ensemble R de fonctions de z jouissant des propriétés suivantes:

A) Chaque fonction de R est *uniforme* et holomorphe dans D, sauf au plus dans un ensemble dénombrable de singularités isolées.

B) Si $f(z)$ est une fonction de R, sa dérivée $f'(z)$ appartient aussi à R.

C) L'ensemble R contient toutes les constantes complexes et est un *corps*, c'est-à-dire que si α et $\beta \neq 0$ sont deux éléments de R, les grandeurs $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ appartiennent aussi à R.

Un tel ensemble R sera appelé un corps L (*un corps liouvillien*) dans D.

L'exemple le plus simple d'un corps L est donné par l'ensemble Ω de toutes les fonctions rationnelles de z. Le domaine D correspondant est le plan des z.

2. Soit $t(z)$ une fonction de z holomorphe et uniforme dans D et satisfaisant à une équation algébrique

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{2.1}$$

où $a_0, \ldots, a_n$ appartiennent à R et ne s'annulent pas tous identiquement. Alors t est une grandeur *algébrique par rapport* à R.

Supposons que $n > 1$ est le degré minimum d'une équation du type (2.1) satisfaite par t. En adjoignant t à R on obtient évidemment un nouveau corps L que nous appelons une *extension algébrique de degré* n de R; en effet, en différentiant (2.1) par rapport à z on exprime immédiatement $\dfrac{dt}{dz}$ par t et les éléments du corps L.

D'après cette définition l'adjonction à R d'une grandeur algébrique t ne donne lieu à un corps L que si t est *uniforme* en D. Mais il est clair que l'on peut toujours restreindre le domaine D de sorte que t y devienne uniforme — en traçant par exemple des coupures convenables. En effectuant un nombre fini d'adjonctions de grandeurs algébriques par rapport à R on obtient, comme on sait, toujours une extension algébrique de R qui peut être aussi obtenue *en adjoignant une seule grandeur* algébrique. C'est, par définition, *l'extension algébrique finie de* R la plus générale; elle sera aussi un corps L si l'on restreint convenablement D. Une extension algébrique finie L de R sera en général désignée par le symbole $\overline{R}$.

Rappelons enfin les définitions suivantes:

Un polynôme en $u_1, \ldots, u_m$ *par rapport à un corps* R est un polynôme en $u_1, \ldots, u_m$, dont les coefficients appartiennent à R.

Une fonction rationnelle en $u_1, \ldots, u_m$ *par rapport à* R est un quotient de deux polynômes en $u_1, \ldots, u_m$ par rapport à R.

Une fonction algébrique en $u_1, \ldots, u_m$ *par rapport* à R est une fonction satisfaisant à une équation algébrique (2.1), où $a_0, \ldots, a_n$ sont des polynômes en $u_1, \ldots, u_m$ par rapport à R.

Un polynôme *primitif* en w est un polynôme en w, dans lequel le coefficient de la plus haute puissance de w est *un*.

3. Soit $\Theta(z)$ une fonction uniforme et holomorphe en D, sauf au plus dans un ensemble dénombrable de singularités isolées. Si la fonction $\Theta(z)$ n'est pas algébrique par rapport à R, elle est *transcendante* par rapport à R et l'on obtient en adjoignant $\Theta(z)$ au corps R une extension *transcendante simple* de R, qui sera désignée par $R(\Theta)$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'on obtienne un corps L en adjoignant à R une fonction Θ uniforme et régulière en D sauf dans un en-

semble dénombrable de singularités isolées, est que $\Theta(z)$ satisfasse à une équation différentielle.

$$\Theta'_z = W(\Theta) \tag{3.1}$$

où $W(\Theta)$ est une fonction rationnelle en Θ par rapport à R.

En effet, en vertu de (3.1) la dérivée de $\Theta(z)$ est contenue dans $R(\Theta)$. Mais alors il en est de même pour chaque grandeur $T(\Theta)$ rationnelle en Θ par rapport à R.

On peut obtenir des corps L encore dans des cas plus généraux.

En adjoignant à R une grandeur Θ transcendante par rapport à R, on obtient un corps $R(\Theta)$ qui n'est pas nécessairement un corps L. Mais alors il peut arriver qu'une extension algébrique $\overline{R(\Theta)}$ de $R(\Theta)$ devienne un corps L. C'est le cas si Θ, sans satisfaire à une équation (3.1), satisfait à une équation différentielle de la forme

$$\Theta'(z) = F\big(\Theta(z), z\big) \tag{3.2}$$

où $F(u, z)$ est *algébrique* en u par rapport à R.

Dans ce cas une extension finie algébrique $\overline{R(\Theta)}$ de $R(\Theta)$, contenant $\Theta'(z)$ sera encore appelée une *extension transcendante simple L de R.*

En effectuant n extensions L transcendantes simples consécutives, on obtient une extension liouvillienne R^* de R qui sera appelée une extension L transcendante *de rang n* de R, si n est le nombre minimum des extensions L transcendantes simples, nécessaire pour obtenir R^*.

Une extension L finie algébrique de R sera dite *de rang* 0 par rapport à R.

4. Considérons quelques cas particuliers. Si l'on a

$$\Theta = \lg u(z)$$

où $u(z)$ est une grandeur de R, tandis que Θ n'est pas algébrique par rapport à R,

$$\Theta' = \frac{u'(z)}{u(z)}$$

appartient à R. Dans ce cas une extension liouvillienne $\overline{R(\lg u)}$ sera appelée une *extension logarithmique simple de R en D.*

Si l'on a

$$\Theta = e^{u(z)}$$

où $u(z)$ appartient à R, tandis que Θ n'est pas algébrique par rapport à R,

$$\Theta'(z) = u'(z)\Theta(z)$$

appartient au corps $R(\Theta)$. Dans ce cas une extension liouvillienne $\overline{R(e^{u(z)})}$ sera appelée *une extension exponentielle simple de R dans D.*

Les extensions simples logarithmiques et exponentielles seront appelées des *extensions élémentaires simples.* En effectuant, en partant de R, n extensions élémentaires simples successives, on obtient, par définition, une *extension élémentaire R^* de R.*

Une grandeur α contenue dans une extension élémentaire de rang n de R sera appelée une *grandeur élémentaire* par rapport à R, et en particulier *de rang n* par rapport à R si elle n'est contenue dans aucune extension élémentaire de R de rang $n - 1$. Une grandeur α élémentaire par rapport au corps Ω des fonctions rationnelles de z, sera appelée simplement une *grandeur élémentaire.*

§ 2. Un lemme

5. *Soit R un corps L dans un domaine (ouvert) D du plan des z. Soit $\Theta(z, \alpha)$ une fonction de z et de α, qui pour les valeurs du paramètre α parcourant un ensemble E, reste uniforme et holomorphe en z pour $z \prec D$ et satisfait l'équation différentielle*

$$\frac{d\Theta}{dz} = h(z, \Theta) \tag{5.1}$$

où $h(z, w)$ est indépendant de α et est algébrique en w par rapport à R.

Soit $W(z, t)$ une fonction de z et de t, dont les dérivées W'_z et W'_t sont algébriques en t par rapport à R.

Supposons enfin qu'il existe un $\alpha_0 \prec E$ jouissant de la propriété suivante:

La fonction

$$\theta(z) = \Theta(z, \alpha_0)$$

n'est pas algébrique par rapport à R, satisfait à la relation

$$W(z, \theta(z)) = 0 \qquad (z \prec D) \tag{5.2}$$

et l'on a

$$\left(\frac{\partial \Theta(z, \alpha)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} = K(z, \theta(z)) \tag{5.3}$$

où $K(z, t)$ ne s'annule pas identiquement en z et t, et est algébrique en t par rapport à R.

Dans ces hypothèses on a pour une grandeur c indépendante de z et t:

$$W(z, t) = c \int_{\theta(z)}^{t} \frac{dt}{K(z, t)} \quad . \tag{5.4}$$

6. *Démonstration.* En prenant la dérivée totale de (5.2) on obtient en vertu de (5.1)

$$\begin{aligned} W'_z + \quad \theta'_z W'_\theta &= 0 \ , \\ W'_z + h(z, \theta) W'_\theta &= 0 \ . \end{aligned} \tag{6.1}$$

Or, d'après nos hypothèses, l'expression

$$W'_z(z, t) + h(z, t) W'_t(z, t)$$

est algébrique en t par rapport à R. Et puisque θ n'est pas algébrique par rapport à R, la relation (6.1) doit être une *identité,* de sorte que l'on a:

$$W'_z(z, t) + h(z, t) W'_t(z, t) \equiv 0 \ .$$

En remplaçant ici t par $\Theta(z, \alpha)$ on obtient donc

$$W'_z\big(z, \Theta(z, \alpha)\big) + h\big(z, \Theta(z, \alpha)\big) W'_\theta\big(z, \Theta(z, \alpha)\big) \equiv 0 \ ,$$

c'est-à-dire d'après (5.1)

$$W'_z\big(z, \Theta(z, \alpha)\big) + \frac{\partial \Theta(z, \alpha)}{\partial z} W'_\theta\big(z, \Theta(z, \alpha)\big) = 0 \ ,$$

$$\frac{d}{dz} W\big(z, \Theta(z, \alpha)\big) = 0 \ ,$$

de sorte que $W\big(z, \Theta(z, \alpha)\big)$ est *indépendant de* z:

$$W\big(z, \Theta(z, \alpha)\big) = C(\alpha) \ . \tag{6.2}$$

7. Or, d'après nos hypothèses, l'expression de gauche est dérivable par rapport à α, pour $\alpha = \alpha_0$. $C'(\alpha_0) = c$ existe donc et l'on obtient en dérivant (6.2) par rapport à α, pour $\alpha = \alpha_0$: $W'_\theta(z, \theta) \Theta'_\alpha(z, \alpha_0) = c$, donc, d'après (5.3)

$$W'_\theta(z, \theta) \, K(z, \theta) = c \ . \tag{7.1}$$

D'après nos hypothèses, l'expression $W'_t(z, t) K(z, t)$ est algébrique par rapport à R. Donc, θ n'étant pas algébrique par rapport à R, (7.1) est une identité de même que

$$W'_t(z, t) = \frac{c}{K(z, t)} \ . \tag{7.2}$$

En intégrant (7.2) par rapport à t de θ à t, on obtient enfin, en vertu de (5.2), la relation (5.4), et notre proposition est démontrée.

8. Deux cas spéciaux sont particulièrement importants:

α) Soit
$$\Theta(z, \alpha) = \alpha\, e^{p(z)} \;, \qquad p(z) \prec R \;.$$

Ici l'équation (5.1) se réduit à $\Theta'_z = p'_z\, \Theta$. Pour $\alpha = \alpha_0 = 1$ on a
$$\frac{\partial \Theta(z, 1)}{\partial \alpha} = e^{p(z)} = \theta(z) \;,$$
donc
$$K(z, t) \equiv t \;.$$
Par (5.4) il résulte
$$W(z, t) = c(\lg t - \lg \theta(z)) \;, \qquad (\theta(z) = e^{p(z)}) \;. \tag{8.1}$$

β) Soit
$$\Theta(z, \alpha) = \lg p(z) + \alpha \;, \qquad p(z) \prec R \;.$$
Ici on a
$$\Theta'_z = \frac{p'(z)}{p(z)} \;, \quad \alpha = \alpha_0 = 0 \,, \quad \theta(z) = \lg p(z)$$
et
$$K(z, t) \equiv 1 \;,$$
donc par (5.4)
$$W(z, t) = c(t - \theta) \;, \qquad (\theta = \lg p) \;. \tag{8.2}$$

§ 3. Le principe de Laplace-Liouville

9. *Soit R un corps L dans un domaine (ouvert) du plan des z. Soit $\varphi(z)$ une fonction de R dont l'intégrale indéfinie:*
$$\psi(z) = \int \varphi(z) dz \tag{9.1}$$
est contenue dans une extension L élémentaire R_r de R de rang r. Alors la fonction $\psi(z)$ peut être mise sous la forme
$$\int \varphi(z)\, dz = \sum_{\varrho=1}^{r} \alpha_\varrho \lg u_\varrho(z) + u_0(z) \tag{9.2}$$
où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ne dépendent pas de z, tandis que les fonctions
$$u_0(z), u_1(z), \ldots, u_r(z)$$
sont contenues dans R.

10. Avant d'aborder la démonstration de notre théorème, nous allons établir un lemme qui revient en partie essentielle à *Abel.*

Soit R un corps L dans un domaine D du plan des z. Supposons qu'on ait pour une fonction $\varphi(z)$ de R la relation

$$\int \varphi(z)dz = \sum_{\varrho=1}^{r} \alpha_\varrho \lg u_\varrho(z) + u_0(z) \tag{10.1}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ne dépendent pas de z, tandis que les fonctions $u_0(z), u_1(z), \ldots, u_r(z)$ sont algébriques par rapport à R. Alors il existe une relation analogue, où les $r+1$ fonctions $u_\varrho(z)$ sont contenues dans R.

Démonstration du lemme. Il existe d'après l'hypothèse une fonction λ de z, algébrique par rapport à R et telle que les $r+1$ fonctions u_ϱ $(\varrho = 0,1, \ldots, r)$ s'écrivent:

$$u_\varrho = A_\varrho(\lambda, z) = \sum_{\kappa=0}^{k-1} a_{\varrho\kappa} \lambda^\kappa \qquad (\varrho = 0, \ldots, r) \tag{10.2}$$

où les coefficients $a_{\varrho\kappa}$ appartiennent à R, tandis que λ satisfait à une équation

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \tag{10.3}$$

dont les coefficients a_κ sont des éléments de R. Et nous pouvons supposer en outre que le degré k de cette équation est *minimum*, de sorte que (10.3) soit *irréductible* dans le corps R.

En dérivant (10.3) on peut, comme on sait, mettre $\frac{d\lambda}{dz}$ sous la forme

$$\frac{d\lambda}{dz} = \Lambda(\lambda, z) = \sum_{\kappa=0}^{k-1} b_\kappa \lambda^\kappa . \tag{10.4}$$

En dérivant les deux membres de (10.1), on obtient en vertu de (10.2) et de (10.4)

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{\alpha_\varrho}{A_\varrho(\lambda, z)} \left(\frac{\partial A_\varrho(\lambda, z)}{\partial \lambda} \Lambda(\lambda, z) + \frac{\partial A_\varrho(\lambda, z)}{\partial z} \right) + \\ + \left(\frac{\partial A_0(\lambda, z)}{\partial \lambda} \Lambda(\lambda, z) + \frac{\partial A_0(\lambda, z)}{\partial z} \right) . \end{aligned} \tag{10.5}$$

11. Désignons par

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$$

les k racines de (10.3). Les relations (10.4) et (10.5) doivent rester valables si l'on y remplace λ par une quelconque des λ_κ, l'équation (10.3) étant irréductible par rapport à R.

En faisant $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ dans (10.4) et (10.5) et en ajoutant membre à membre, on obtient

$$k\varphi(z) = \sum_{\kappa=1}^{k}\left[\sum_{\varrho=1}^{r}\frac{\alpha_\varrho}{A_\varrho(\lambda_\kappa, z)}\left(\frac{\partial A_\varrho(\lambda_\kappa, z)}{\partial\lambda}\cdot\frac{d\lambda_\kappa}{dz}+\frac{\partial A_\varrho(\lambda_\kappa, z)}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{\partial A_0(\lambda_\kappa, z)}{\partial\lambda}\cdot\frac{d\lambda_\kappa}{dz}+\frac{\partial A_0(\lambda_\kappa, z)}{\partial z}\right],$$

donc en intégrant:

$$\begin{aligned} k\int\varphi(z)\,dz &= \sum_{\kappa=1}^{k}\left[\sum_{\varrho=1}^{r}\alpha_\varrho \lg A_\varrho(\lambda_\kappa, z) + A_0(\lambda_\kappa, z)\right] = \\ &= \sum_{\varrho=1}^{r}\alpha_\varrho \lg \prod_{\kappa=1}^{k} A_\varrho(\lambda_\kappa, z) + \sum_{\kappa=1}^{k} A_0(\lambda_\kappa, z)\ . \end{aligned} \tag{11.1}$$

Or, les expressions

$$v_0 = \frac{1}{k}\sum_{\kappa=1}^{k} A_0(\lambda_\kappa, z)\ , \quad v_\varrho = \prod_{\kappa=1}^{k} A_\varrho(\lambda_\kappa, z) \quad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

étant symétriques en $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, elles appartiennent à R et l'on peut écrire (11.1):

$$\int\varphi(z)\,dz = \sum_{\varrho=1}^{r}\frac{\alpha_\varrho}{k}\lg v_\varrho(z) + v_0(z)\ .$$

Notre lemme est démontré.

12. *Démonstration du principe de Laplace-Liouville.* Pour $r = 0$, $\psi(z)$ est par hypothèse algébrique par rapport à R et il résulte du lemme du No. 10 que $\psi(z)$ est contenue dans R. Dans ce cas notre théorème est donc démontré.

Nous allons maintenant l'établir pour $r > 0$ *par induction,* en supposant que ce théorème est déjà démontré pour les valeurs plus petites de r. Soit

$$R_0 = \overline{R},\quad R_1 = \overline{R_0(\Theta_1)},\quad R_2 = \overline{R_1(\Theta_2)}\ , \ldots, R_r = \overline{R_{r-1}(\Theta_r)} \tag{12.1}$$

la chaîne de r extensions L simples transcendantes, menant à R_r. Soit $r' \leqq r$ le nombre des extensions *logarithmiques* parmi ces extensions. r' est *le rang logarithmique* de la chaîne (12.1). Alors nous établirons *la relation* (9.2) *sous une forme plus précise, en y remplaçant r par r'.*

R_r est une extension de R_1 de rang $r-1$. Le rang logarithmique r_0' de la chaîne partielle de (12.1), conduisant de R_1 à R_r est $r'-1$ ou r', suivant que Θ_1 est une grandeur logarithmique ou exponentielle par rapport à R_0.

Appliquons donc notre théorème au corps R_1; on a:

$$\psi(z) = \sum_{\varrho=1}^{r_0'} \beta_\varrho \lg u_\varrho + u_0 \tag{12.2}$$

où les r_0' coefficients β_ϱ ne dépendent pas de z, et où les $r_0'+1$ fonctions $u_0, u_1, \ldots u_{r_0'}$ sont contenues dans $R_1 = \overline{R_0(\Theta_1)}$. Or, $\varphi(z)$ appartient à $R_0(\Theta_1)$. Donc, d'après le résultat du No. 10, on peut choisir $u_0, \ldots, u_{r_0'}$ dans le corps $R_0(\Theta_1)$ et les exprimer par des fonctions rationnelles de Θ_1 par rapport à R_0:

$$u_\varrho = s_\varrho(\Theta_1) \qquad (\varrho = 0, \ldots, r_0') \, . \tag{12.3}$$

13. Considérons maintenant la fonction

$$W(z,t) = \sum_{\varrho=1}^{r_0'} \beta_\varrho \lg s_\varrho(t) + s_0(t) - \psi(z) \, . \tag{13.1}$$

Le lemme du § 2 est applicable à $W(z,t)$ avec $R = R_0$ et $\Theta_1 = \theta$ dans un des cas du No. 8.

Pour une *extension exponentielle* on a $r_0' = r'$ et

$$\Theta_1 = e^{p(z)}, \qquad p(z) \prec R_0 \, .$$

Il résulte de (8.1)

$$W(z,t) = c \lg t - c\, p(z) \, .$$

En remplaçant ici t par une constante numérique convenable γ, on tire de (13.1)

$$\sum_{\varrho=1}^{r'} \beta_\varrho \lg s_\varrho(\gamma) + s_0(\gamma) - \psi(z) = c \lg \gamma - c\, p(z) \, ,$$

donc

$$\psi(z) = \sum_{\varrho=1}^{r'} \beta_\varrho \lg s_\varrho(\gamma) + \bigl(s_0(\gamma) + c\, p(z) - c \lg \gamma\bigr) \, ;$$

mais ici les r' expressions $s_1(\gamma), \ldots, s_{r'}(\gamma)$ et $s_0(\gamma) + cp(z) - c \lg \gamma$ appartiennent à R_0, et notre théorème résulte dans ce cas du lemme du No. 10.

D'autre part, s'il s'agit d'une *extension logarithmique*, $\Theta_1 = \lg p(z)$, $p(z) \prec R_0$, $r_0' = r' - 1$, on a par (8.2)

$$W(z,t) = c\bigl(t - \lg p(z)\bigr) .$$

En comparant cette expression avec (13.1), on obtient *identiquement en* t:

$$\psi(z) = \sum_{\varrho=1}^{r'-1} \beta_\varrho \lg s_\varrho(t) + c \lg p(z) + (s_0(t) - ct) .$$

En y remplaçant t par une valeur numérique convenable, on obtient une relation du type (9.2), dans laquelle $u_0, u_1, \ldots, u_r$ appartiennent à $R_0 = \overline{R}$, donc, d'après le lemme du No. 10 à R.

Notre proposition est donc démontrée.

Rappelons enfin que nous avons démontré l'énoncé un peu plus précis du principe de Laplace-Liouville que celui du No. 9, à savoir que *dans les hypothèses du No. 9 on peut remplacer r dans l'expression* (9.2) *par le rang logarithmique* r' *d'une chaîne* (12.1), *menant de* R_0 *à* R_r.

§ 4. Intégration des expressions de la forme $A_0 w + A_1$, w étant une intégrale définie

14. Soit R un corps L dans un domaine D du plan des z et $p(z)$ une fonction de R telle que l'intégrale

$$w = \int p(z)\, dz \tag{14.1}$$

n'est pas algébrique par rapport à R.

Considérons l'extension liouvillienne intégrale $R(w)$ de R obtenue en adjoignant w à R et en traçant dans D des coupures convenables, de sorte que w y devienne uniforme.

Soit

$$f(w,z) \tag{14.2}$$

un élément de $R(w)$, donc une fonction rationnelle en w par rapport à R. Si l'intégrale de (14.2) est élémentaire par rapport à $R(w)$, on a d'après le principe de Laplace-Liouville

$$\int f(w,z)\, dz = F(w,z) \tag{14.3}$$

où

$$F(w,z) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \lg f_\nu(w,z) + f_0(w,z) \tag{14.4}$$

et où les
$$f_\nu(w,z) \qquad (\nu = 0\,,\,\ldots,\,n) \tag{14.5}$$

sont rationnelles en w par rapport à R.

Notons que les dérivées partielles F'_w, F'_z de $F(w,z)$ sont rationnelles en w par rapport à R.

En différentiant (totalement) par rapport à z la relation (14.3), on a en vertu de (14.1)
$$f(w,z) = F'_w(w,z)p(z) + F'_z(w,z) \ . \tag{14.6}$$

Or, les deux membres de (14.6) sont rationnels en w par rapport à R. Donc, puisque w est *transcendant* par rapport à R, la relation (14.6) doit être valable *identiquement* en w.

Remplaçons dans (14.6) w par $w+\gamma$, γ étant une indéterminée, et intégrons par rapport à z; on obtient pour une constante c_0 indépendante de γ:
$$\int_{c_0}^{z} f(w+\gamma,z)\,dz = F(w+\gamma,z) + C(\gamma) \ . \tag{14.7}$$

En différentiant k fois (14.7) par rapport à γ, on obtient
$$\int_{c_0}^{z} f^{(k)}_{wk}(w+\gamma\,,z)\,dz = F^{(k)}_{wk}(w+\gamma\,,z) + C^{(k)}(\gamma) \ . \tag{14.8}$$

15. Considérons maintenant le cas où f a la forme
$$f(w,z) = A_0(z)w + A_1(z) \ , \qquad A_0(z),\, A_1(z) \prec R \ . \tag{15.1}$$

Dans ce cas on a par (14.8), pour $k=1$:
$$\int A_0(z)\,dz = F'_w(w+\gamma,z) + C'(\gamma) \ . \tag{15.2}$$

Posons
$$F'_w(w,z) = G(w,\,z) \ . \tag{15.3}$$

Puisque l'intégrale de gauche de (15.2) ne dépend pas de γ, il en résulte qu'on a
$$G(w+\gamma\,,z) = G(w\,,z) + c(\gamma) \ ,$$

où $c(\gamma)$ est indépendant de z (et de w).

Différentions cette relation par rapport à γ; on obtient

$$G'(w+\gamma,z)=c'(\gamma)$$

et l'on voit que la dérivée partielle $G'_w(w,z)$ a une valeur c *indépendante de z et w.* On a donc

$$F'_w = cw + a(z) \ , \tag{15.4}$$

où c est une constante et $a(z)$ appartient à R.

En différentiant (15.2) on obtient maintenant

$$A_0(z) = cp(z) + a'(z) \tag{15.5}$$

et c est complètement déterminé par (15.5) si $a(z)$ doit être un élément de R.

16. Introduisons cette valeur de A_0 dans (15.1), on a

$$\begin{aligned}\int (A_0 w + A_1)\,dz &= c\int p(z)w\,dz + \int a'(z)w\,dz + \int A_1(z)dz = \\ &= \frac{c}{2}\,w^2 + a(z)\,w + \int \big(A_1(z) - a(z)\,p(z)\big)\,dz \ ,\end{aligned} \tag{16.1}$$

où l'intégrale de droite doit donc aussi être élémentaire par rapport au corps $R(w)$.

En posant

$$A_1(z) - a(z)\,p(z) = \overline{A_1(z)} \ ,$$

on a donc

$$\int \overline{A_1}(z)\,dz = H(w,z) \equiv \sum_{\mu=1}^{m} \beta_\mu \lg h_\mu(w,z) + h_0(w,z) \tag{16.2}$$

où les $h_\mu(w,z)$, $(\mu = 0, \ldots, m)$ sont rationnelles en w par rapport à R et les β_μ ne dépendent pas de z.

En appliquant à (16.2) la relation (14.8) pour $k = 1$, on a, puisque $\overline{A_1}(z)$ ne dépend pas de w:

$$H'_w \equiv c_1$$

où c_1 est indépendant de z et de w.

Il en résulte que la dérivée de la fonction

$$H(w,z) - c_1\,w$$

par rapport à w s'annule. Donc, puisque cette dérivée est rationnelle en w par rapport à R, elle doit s'annuler identiquement en w. La fonction

$$H(u\,,z) - c_1 u$$

de l'indéterminée u et de z est indépendante de u, et l'on a pour une constante numérique convenable u_0:

$$H(w,z) = c_1 w + \sum_{\mu=1}^{m} \beta_\mu \lg h_\mu(u_0, z) + h_0(u_0, z) =$$

$$= c_1 w + A(z)\ , \tag{16.3}$$

avec:

$$A(z) = \sum_{\mu=1}^{m} \beta_\mu \lg h_\mu(u_0, z) + h_0(u_0, z) \tag{16.4}$$

où les $h_\mu(u_0, z)$, $(\mu = 0, \ldots, m)$ sont des fonctions appartenant à R et $A(z)$ une fonction élémentaire par rapport à R. Donc, l'intégrale (16.2) est élémentaire par rapport à R.

17. Si en particulier l'intégrale de (15.1) est non seulement élémentaire par rapport à $R(w)$, mais contenue dans $R(w)$, il résulte de (16.1) qu'il en est de même de l'intégrale (16.2), de sorte que les termes logarithmiques dans l'expression de $H(w,z)$ s'annulent et que $H(w,z)$ est rationnelle en w par rapport à R. Mais alors il résulte de (16.4) que $A(z)$ est non seulement élémentaire par rapport à R, mais est même un élément de R.

D'autre part, on conclut de (16.1) que nos conditions sont aussi *suffisantes* pour que l'intégrale de (15.1) soit élémentaire par rapport à $R(w)$ ou bien soit contenue dans $R(w)$. Nous avons en définitive le théorème:

Soit R un corps L dans un domaine D du plan des z, $p(z)$ un élément de R et w son intégrale (14.1) *transcendante par rapport à R.*

Si les fonctions $A_0(z), A_1(z)$ appartiennent à R, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale

$$\int \big(A_0(z)w + A_1(w)\big)\,dz \tag{17.1}$$

soit élémentaire par rapport au corps $R(w)$ est, que l'on ait premièrement

$$A_0(z) = c\,p(z) + a'(z) \tag{17.2}$$

où c ne dépend pas de z et $a(z)$ est une fonction de R, et secondement

$$A_1(z) - a(z)p(z) = c_1 p(z) + A'(z) \tag{17.3}$$

où c_1 ne dépend pas de z et $A(z)$ est une fonction élémentaire par rapport à R.
Alors on a

$$\int (A_0(z)\, w + A_1(z))\, dz = \frac{c}{2} w^2 + (a(z) + c_1)\, w + A(z) \ . \tag{17.4}$$

Pour que l'intégrale (17.1) *soit en particulier une grandeur du corps $R(w)$, il est en outre nécessaire et suffisant que c_1 et $A(z)$ dans* (17.3) *puissent être choisis de sorte que $A(z)$ soit une fonction de R.*

18. Pour appliquer le théorème précédent à quelques cas importants dans la théorie élémentaire de l'intégration, supposons d'abord que R soit le corps Ω des fonctions rationnelles de z. Posons:

$$p(z) = \frac{1}{z}\,, \quad w = \lg z \ . \tag{18.1}$$

Alors, si $A_0(z)$, $A_1(z)$ sont rationnels, les conditions du théorème précédent pour que l'intégrale

$$\int (A_0(z) \lg z + A_1(z))\, dz \tag{18.2}$$

soit élémentaire se réduisent à la condition (17.2), puisque la condition (17.3) est toujours satisfaite. Donc:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (18.2) *soit élémentaire, est:*

$$A_0(z) = \frac{c}{z} + a'(z) \ , \tag{18.3}$$

c étant une constante et $a(z)$ une fonction rationnelle. Autrement dit, les résidus de $A_0(z)$ doivent s'annuler en chaque point fini, sauf peut-être pour $z = 0$.

Posons d'autre part

$$p(z) = \frac{1}{z^2+1}\,, \quad w = \operatorname{arctg} z \ . \tag{18.4}$$

Dans ce cas, si $A_0(z)$, $A_1(z)$ sont des fonctions rationnelles en z, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale*

$$\int (A_0(z) \operatorname{arctg} z + A_1(z))\, dz \tag{18.5}$$

soit élémentaire, se réduit à

$$A_0(z) = \frac{c}{1 + z^2} + a'(z) \ , \tag{18.6}$$

où c est une constante et $a(z)$ une fonction rationnelle en z, — puisque la condition (17.3) est toujours satisfaite dans ce cas aussi.

Soit enfin R le corps $\Omega\left(\sqrt{1-z^2}\right)$ obtenu à partir de Ω par l'adjonction de $\sqrt{1-z^2}$, et

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \ , \quad w = \arcsin z \ . \tag{18.7}$$

On sait que dans ce cas l'intégrale de toute fonction de R est élémentaire, de sorte que la condition (17.3) est toujours satisfaite dans ce cas aussi.

Donc, si $A_0(z)$, $A_1(z)$ sont des expressions de la forme

$$b(z) + c(z)\sqrt{1-z^2} \tag{18.8}$$

avec $b(z)$ et $c(z)$ rationnels, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale*

$$\int \left(A_0(z) \arcsin z + A_1(z)\right) dz \tag{18.9}$$

soit élémentaire, se réduit à

$$A_0(z) = \frac{c}{\sqrt{1-z^2}} + a'(z) \tag{18.10}$$

où c est une constante et $a(z)$ une fonction de R, c'est-à-dire une expression de la forme (18.8), b et c étant rationnels.

Autrement dit, pour que (18.9) soit élémentaire, il est nécessaire et suffisant que dans l'intégrale

$$\int A_0(z)\, dz$$

les termes logarithmiques se réduisent à $c \arcsin z$.

§ 5. Intégration d'un polynôme en w, w étant une intégrale indéfinie

19. En généralisant l'analyse des Nos. 14 à 17, nous allons maintenant considérer le cas où $f(w,z)$ est *un polynôme en w par rapport à R de degré $n > 1$* :

$$f(w,z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A_\nu w^{n-\nu} = A_0 w^n + n A_1 w^{n-1} + \cdots + A_n \ . \tag{19.1}$$

Dans ce cas, si l'intégrale

$$\int f(w, z)\, dz$$

est élémentaire, on a

$$\int f(w, z)\, dz = F(w, z) \ , \tag{19.2}$$

où

$$G(w, z) \equiv F'_w(w, z) \tag{19.3}$$

est rationnel en w par rapport à R.

Appliquons alors (14.8) pour $k = n - 1$ et $\gamma = 0$. On a par (19.3)

$$n! \int (A_0 w + A_1)\, dz = G^{(n-2)}_{w^{n-2}}(w, z) \ .$$

Donc, puisque l'expression de droite est *rationnelle en w par rapport à R*, la formule (17.4) est applicable, et l'on a

$$G^{(n-2)}_{w^{n-2}}(w, z) \equiv c_0 w^2 + b_1 w + b_2 \ ,$$

où c_0 est une constante et b_1, b_2 sont des grandeurs de R. Donc, en intégrant par rapport à w, on voit que $G(w,z)$ est un polynôme de degré n en w; et puisque $G(w,z)$ est rationnel en w par rapport à R, les coefficients de ce polynôme en w appartiennent à R. On peut donc écrire

$$G(w, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu(z)\, w^{n-\nu} \tag{19.4}$$

où $B_0, \ldots, B_n$ appartiennent à R.

Posons

$$F_0(u, z) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu \binom{n+1}{\nu} u^{n+1-\nu} \ , \tag{19.5}$$

u étant une indéterminée. On a évidemment

$$\frac{\partial}{\partial u} F_0(u, z) = G(u, z) \ .$$

Donc, la dérivée partielle de

$$F(u,z) - F_0(u,z)$$

par rapport à u s'annule identiquement en u, et cette différence ne dépend pas de u. Pour une valeur numérique convenable u_0 de u on a donc

$$F(u,z) = F_0(u,z) + \frac{1}{n+1} B_{n+1} \ , \quad \frac{1}{n+1} B_{n+1} = F(u_0, z) - F_0(u_0, z) \ .$$

Or, il résulte des relations (14.4) et (19.5) que B_{n+1} est une grandeur élémentaire par rapport à R, et nous voyons que, *si* (19.2) *est élémentaire par rapport à* $R(w)$, on a:

$$F(w, z) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} B_\nu(z)\, w^{n+1-\nu} , \tag{19.6}$$

où $B_0, \ldots, B_n$ *appartiennent à* R, *tandis que* B_{n+1} *est élémentaire par rapport à* R. D'ailleurs, si l'intégrale (19.2) appartient à $R(w)$, $B_{n+1}(z)$ est en outre un élément de R.

20. Remplaçons dans la relation (19.2) les fonctions f et F par leurs expressions (19.1) et (19.6) et prenons la dérivée totale par rapport à z. On obtient la relation

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A_\nu w^{n-\nu} = p \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu w^{n-\nu} + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} B'_\nu w^{n+1-\nu} .$$

Donc, puisque cette relation doit avoir lieu *identiquement en* w, on obtient

$$B'_0 = 0 , \quad A_\nu = p B_\nu + \frac{1}{\nu+1} B'_{\nu+1} , \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{20.1}$$

et B_0 est une constante:

$$B_0 = c_0 . \tag{20.2}$$

Il résulte alors des relations (20.1):

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= c_0\, p + B'_1 \\
A_1 &= B_1\, p + \tfrac{1}{2} B'_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{n-1} &= B_{n-1}\, p + \frac{1}{n} B'_n , \\
A_n &= B_n\, p + \frac{1}{n+1} B'_{n+1} ,
\end{aligned}\right\} \tag{20.3}$$

formules qui permettent de déterminer successivement les fonctions $B_1, \ldots, B_n, B_{n+1}$. *Pour que l'intégrale* (19.2) *soit élémentaire par rapport à* $R(w)$, *il est nécessaire et suffisant que les grandeurs* $B_1, \ldots, B_n$ *ainsi obtenues soient des éléments de* R *et que* B_{n+1} *soit élémentaire par rapport à* R. *Pour que l'intégrale* (19.2) *soit* en particulier *contenue dans* $R(w)$, *il est de plus nécessaire et suffisant que* B_{n+1} *soit aussi un élément* de R. w n'étant pas un élément de R, il est évident que c_0 est complètement déterminé par la première des relations (20.3) si B_1 doit être un élément de R.

Dans le cas où R est le corps Ω, la théorie élémentaire de l'intégration permettra toujours de résoudre la question de l'intégrabilité de (19.2) par les calculs élémentaires.

Appliquons notre résultat au cas

$$f = A(z)\, w^n\,, \quad p = \frac{1}{z}\,, \quad w = \log z\,, \tag{20.4}$$

$A(z)$ étant rationnel en z; les formules (20.3) se réduisent ici aux relations suivantes

$$A = \frac{c_0}{z} + B_1'\,, \qquad \frac{1}{z} B_1 = -\tfrac{1}{2} B_2'\,,$$

$$\frac{1}{z} B_{n-1} = -\frac{1}{n} B_n'\,, \qquad \frac{1}{z} B_n = -\frac{1}{n+1} B_{n+1}'\,.$$

Or, on peut évidemment toujours choisir univoquement c_0 et les constantes d'intégration intervenant en $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de sorte que les résidus, pour $z = 0$, de

$$A - \frac{c_0}{z}\,, \quad \frac{B_1}{z}\,, \ldots, \frac{B_n}{z}$$

s'annulent. Nos conditions se réduisent donc à ceci qu'alors pour chaque pôle $\beta \neq 0$ de A, les résidus des

$$A\,, \quad \frac{B_1}{z}\,, \ldots, \frac{B_n}{z}$$

s'annulent en tout point à distance finie, distinct de 0.

§ 6. Intégration d'une expression rationnelle en w, w étant une intégrale indéfinie

21. Considérons maintenant le cas plus général où (14.2) est une fonction *rationnelle en w par rapport à R:*

$$f(w, z) = \frac{N(w, z)}{D(w, z)}\,, \tag{21.1}$$

N, D étant des polynômes en w par rapport à R, sans diviseur commun.

Supposons que l'intégrale (14.3) soit élémentaire par rapport à $R(w)$. Soit

$$F(w,z) = \frac{N_1(w,z)}{D_1(w,z)} + \sum_{\mu=1}^{m_1} \alpha_\mu \lg f_\mu(w,z) \ , \tag{21.2}$$

N_1, D_1 étant des polynômes en w par rapport à R, sans diviseur commun, et $f_\mu(w,z)$ des fonctions rationnelles en w par rapport à R.

Nous pouvons évidemment supposer que D et D_1 sont des polynômes primitifs en w.

Soient

$$D(w,z) = P_1(w,z)^{s_1} \cdot \ldots\ldots \cdot P_k(w,z)^{s_k} \tag{21.3}$$

$$D_1(w,z) = Q_1^{t_1} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot Q_n^{t_n} \ , \tag{21.4}$$

où les polynômes P_κ et Q_ν en w sont primitifs et *irréductibles par rapport à* R. Nous pouvons supposer que les polynômes P_κ sont tous différents entre eux, ainsi que les polynômes Q_ν .

Alors f et $\frac{N_1}{D_1}$ peuvent être décomposés de la façon suivante:

$$f = P + \sum_{\kappa=1}^{k} \sum_{\sigma=1}^{s_\kappa} \frac{M_{\kappa,\sigma}}{P_\kappa^\sigma} \ , \tag{21.5}$$

$$\frac{N_1}{D_1} = Q + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{t_\nu} \frac{N_{\nu,\sigma}}{Q_\nu^\sigma} \ , \tag{21.6}$$

où P, Q, $N_{\nu,\sigma}$, $M_{\kappa,\sigma}$ sont des polynômes en w par rapport à R. On peut supposer que le degré de chaque $M_{\kappa,\sigma}$, $N_{\nu,\sigma}$ est inférieur à celui du P_κ ou Q_ν correspondant. Les décompositions (21.5) et (21.6) sont alors *univoquement déterminées.*

On peut d'autre part supposer que

$$f_1(w,z) \ , \ldots , f_{m_1}(w,z) \tag{21.7}$$

sont des polynômes en w par rapport à R. En les décomposant en facteurs irréductibles et regroupant les termes logarithmiques de (21.2), on peut supposer qu'une partie des fonctions (21.7) sont des polynômes primitifs et irréductibles en w par rapport à R, les autres étant des éléments de R (donc indépendantes de w).

Parmi les fonctions (21.7), désignons par a_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots l$) celles qui sont indépendantes de w, et par $S_1, \ldots, S_m$ les différents polynômes en w distincts de Q_ν. Alors on peut, en changeant les notations, écrire $F(w,z)$ sous la forme

$$F(w,z) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \lg Q_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} \beta_\mu \lg S_\mu + \sum_{\lambda=1}^{l} \gamma_\lambda \lg a_\lambda + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{t_\nu} \frac{N_{\nu,\sigma}}{Q_\nu^\sigma} + Q\,, \tag{21.8}$$

où les α_ν, β_μ, γ_λ sont des constantes; certains des α_ν peuvent éventuellement s'annuler. Q et $N_{\nu,\sigma}$ sont des polynômes en w par rapport à R. Le degré de chaque $N_{\nu,\sigma}$ est inférieur à celui du Q_ν correspondant.

22. En dérivant maintenant la relation (14.3) et en utilisant (21.5) et (21.8), on a

$$P + \sum_{\kappa=1}^{k} \sum_{\sigma=1}^{s_\kappa} \frac{M_{\kappa,\sigma}}{P_\kappa^\sigma} = Q' + \sum_{\lambda=1}^{l} \gamma_\lambda \frac{a_\lambda'}{a_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{m} \beta_\mu \frac{S_\mu'}{S_\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu \frac{Q_\nu'}{Q_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{t_\nu} \left(\frac{N_{\nu,\sigma}}{Q_\nu^\sigma} \right)' \right), \tag{22.1}$$

où l'accent désigne la *dérivée totale par rapport à z*, de sorte qu'on a, par exemple,

$$Q_\nu' = p \frac{\partial Q_\nu}{\partial w} + \frac{\partial Q_\nu}{\partial z}\,.$$

Or, dans l'expression de droite de (22.1) pour chaque ν le terme contenant la plus haute puissance de $\dfrac{1}{Q_\nu}$ est $\quad - t_\nu \dfrac{N_{\nu,t_\nu} Q_\nu'}{Q_\nu^{t_\nu+1}}$.

Mais ici, le degré de Q_ν' est inférieur à celui de Q_ν. Et Q_ν' ne s'annule pas identiquement, car, dans le cas contraire, Q_ν aurait une valeur numérique et w serait algébrique par rapport à R. Enfin N_{ν,t_ν} ne s'annule pas non plus et n'est pas divisible par Q_ν. Donc $N_{\nu,t_\nu} Q_\nu'$ n'est pas divisible par Q_ν et le terme en $Q_\nu^{-t_\nu-1}$ ne peut pas disparaître. Il en résulte que chacun des polynômes Q_ν est aussi un des P_κ, tandis que les polynômes P_κ, qui sont différents de Q_ν, sont identiques aux polynômes S_μ . Donc, en changeant les notations, on peut poser

$$Q_\nu = P_\nu\,, \qquad t_\nu + 1 = s_\nu > 1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)\,,$$
$$P_{n+\mu} = S_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m)\,, \qquad n + m = k\,.$$

Mais alors la décomposition (21.5) peut s'écrire

$$f(w, z) = P + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{s_\nu} \frac{M_{\nu,\sigma}}{P_\nu^\sigma} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{M_\mu}{S_\mu} , \tag{22.2}$$

et l'on voit que les S_μ sont ceux des polynômes P_κ pour lesquels les exposants s_κ ont la valeur *un*.

23. La relation (22.1) peut être maintenant écrite:

$$\left(P - Q' - \sum_{\lambda=1}^{l} \gamma \frac{a'_\lambda}{a_\lambda}\right) + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{M_\mu - \beta_\mu S'_\mu}{S_\mu} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{\alpha_\nu P'_\nu + N'_{\nu,1}}{P_\nu} + \sum_{\sigma=2}^{s_\nu - 1} \frac{N'_{\nu,\sigma} - (\sigma - 1) N_{\nu,\sigma-1} P'_\nu}{P_\nu^\sigma} - \right.$$

$$\left. - (s_\nu - 1) \frac{N_{\nu,s_\nu - 1} P'_\nu}{P_\nu^{s_\nu}} - \sum_{\sigma=1}^{s_\nu} \frac{M_{\nu,\sigma}}{P_\nu^\sigma} \right] = 0 . \tag{23.1}$$

Dans les fractions entre crochets, le degré du numérateur correspondant au dénominateur P_ν^σ est en général supérieur à celui de P_ν. Mais en divisant ce numérateur par P_ν, on obtient, à côté d'un reste qui peut être nul, un polynôme de degré inférieur à celui de P_ν comme quotient. D'autre part, le numérateur correspondant au dénominateur P_ν a déjà dès le début un degré inférieur à celui de P_ν.

Donc, en regroupant les termes de l'expression entre crochets de sorte que le degré de chaque numérateur soit plus petit que celui du P_ν correspondant, on n'aura pas de terme polynomial. Il en résulte que la relation (23.1) se décompose en:

$$M_\mu = \beta_\mu S'_\mu \quad (\mu = 1 , 2 , \ldots , m) \tag{23.2}$$

$$P = Q' + \left(\sum_{\lambda=1}^{l} \gamma_\lambda \lg a_\lambda\right)' \tag{23.3}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{s_\nu} \frac{M_{\nu,\sigma}}{P_\nu^\sigma} = \frac{\alpha_\nu P'_\nu + N'_{\nu,1}}{P_\nu} + \sum_{\sigma=2}^{s_\nu - 1} \frac{N'_{\nu,\sigma} - (\sigma - 1) N_{\nu,\sigma-1} P'_\nu}{P_\nu^\sigma} -$$

$$- (s_\nu - 1) \frac{N_{\nu,\, s_\nu - 1} P'_\nu}{P_\nu^{s_\nu}} \quad (\nu = 1 , \ldots , n) . \tag{23.4}$$

Les relations (23.2)—(23.4) montrent évidemment que si l'intégrale de (21.5) est élémentaire par rapport à R, il en est de même pour P et pour chacune des sommes $\sum_{\sigma=1}^{s_\nu} \frac{M_{\nu,\sigma}}{P_\nu^\sigma}$.

La relation (23.2) exige que M_μ soit égal à S'_μ multiplié par une constante numérique.

Quant à la relation (23.3), elle est équivalente à

$$\int P(w,z)\,dz = Q(w,z) + \sum_{\lambda=1}^{l} \gamma_\lambda \lg a_\lambda$$

et nous avons montré au § 4 comment on peut déduire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle relation soit possible et comment on peut alors déterminer Q.

24. Nous allons maintenant étudier les relations (23.4). Ces n relations étant indépendantes entre elles, il suffit d'étudier une relation de la forme (23.4) en y supprimant l'indice ν. Alors, on obtient

$$\sum_{\sigma=1}^{s} \frac{M_\sigma}{P^\sigma} = \frac{\alpha P' + N_1'}{P} + \sum_{\sigma=2}^{s-1} \frac{N_\sigma' - (\sigma-1)\,N_{\sigma-1}P'}{P^\sigma} - (s-1)\,\frac{N_{s-1}P'}{P^s}. \tag{24.1}$$

En comparant les coefficients des différentes puissances $\frac{1}{P^\sigma}$ dans (24.1), on peut calculer successivement les polynômes:

$$N_{s-1}\,,\ N_{s-2}\,,\ldots,\,N_1 \tag{24.2}$$

et obtenir la condition portant sur les N_σ, qui est nécessaire et suffisante pour que (24.1) soit possible.

Toutefois on ne peut pas comparer *directement* les deux membres de (24.1), puisque le théorème d'unicité suppose que le degré de chaque numérateur est inférieur à t, degré de P en w.

D'autre part, en déterminant les polynômes (24.2), il faudra résoudre des congruences *modulo* P. Nous allons donc procéder comme suit:

En appliquant à P et à P' l'algorithme d'Euclide, on peut trouver deux polynômes U, V en w par rapport à R, tels qu'on ait

$$UP' + VP = 1\ . \tag{24.3}$$

En effet, puisque dans P le coefficient de la plus haute puissance de w est *un*, le degré de P' est $\leqq t-1$. Mais alors P et P' sont premiers entre eux, et l'algorithme d'Euclide conduit en effet à une relation (24.3).

En outre, on peut supposer, comme on sait, que dans cette relation le degré de U en w est $< t$ et celui de V est $< t-1$.

25. En multipliant (24.1) par U et en éliminant dans la somme de droite UP' au moyen de la relation (24.3), on obtient

$$\sum_{\sigma=1}^{s} \frac{UM_\sigma}{P^\sigma} = \frac{\alpha UP' + UN_1' + VN_1}{P} +$$

$$+ \sum_{\sigma=2}^{s-1} \frac{UN_\sigma' + \sigma VN_\sigma - (\sigma-1) N_{\sigma-1}}{P^\sigma} - (s-1)\frac{N_{s-1}}{P^s} ,$$

$$\sum_{\sigma=1}^{s-1} \frac{\sigma N_\sigma}{P^{\sigma+1}} = \frac{\alpha\, UP'}{P} + \sum_{\sigma=1}^{s-1} \frac{UN_\sigma' + \sigma VN_\sigma - UM_\sigma}{P^\sigma} - \frac{UM_s}{P^s} . \qquad (25.1)$$

Or ici l'on a

$$(s-1) N_{s-1} \equiv - UM_s \quad (\text{mod. } P) ,$$

et N_{s-1} est déterminé comme reste de la division de $\frac{-1}{s-1} UM_s$ par P.

En soustrayant le terme $\frac{(s-1) N_{s-1}}{P^s}$ des deux membres de (25.1) et en posant

$$\frac{-(s-1) N_{s-1} - UM_s}{P} = A_{s-1} ,$$

il vient

$$\sum_{\sigma=1}^{s-2} \frac{\sigma N_\sigma}{P^{\sigma+1}} = \alpha \frac{UP'}{P} + \sum_{\sigma=1}^{s-2} \frac{UN_\sigma' + \sigma VN_\sigma - UM_\sigma}{P^\sigma} +$$

$$+ \frac{UN_{s-1}' + (s-1) VN_{s-1} - UM_{s-1} + A_{s-1}}{P^{s-1}} .$$

Comparons ici les coefficients de $\frac{1}{P^{s-1}}$. On obtient la congruence

$$(s-2) N_{s-2} \equiv UN_{s-1}' + (s-1) VN_{s-1} - UM_{s-1} + A_{s-1} \quad (\text{mod. } P)$$

qui permet de calculer N_{s-2} par division.

En procédant de la même façon et en comparant successivement les coefficients de $\frac{1}{P^s}$, $\frac{1}{P^{s-1}}$, ..., $\frac{1}{P^2}$, on obtient les $s-1$ grandeurs (24.2). En introduisant ces valeurs dans l'expression de droite de (25.1), on obtient une dernière relation de la forme

$$\frac{A}{P} = \alpha \frac{UP'}{P}$$

qui exige que le polynôme $A(w,z)$ en w par rapport à R soit égal à UP' multiplié par une constante numérique. Cette condition est donc nécessaire et suffisante pour que la relation (24.1) soit possible.

En résumé, notre méthode permet de résoudre le problème de l'intégrabilité élémentaire de (14.2) chaque fois que $f(w,z)$ est rationnel en w par rapport à R.

(Reçu le 1er septembre 1945.)