Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe.
Autor: Eckmann, Beno
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16906

Der Cohomologie-Ring einer beliebigen Gruppe

Von Beno Eckmann, Lausanne

Einleitung

1. Es wird in dieser Arbeit einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ und einem Ring J mit Einselement durch ein einfaches algebraisches Verfahren ein Ring $P(\mathfrak{G}, J)$ zugeordnet; seine Elemente sind Klassen von Funktionen mehrerer Variabeln aus $\mathfrak{G}$ mit Werten in J. Die algebraische Bedeutung dieses Ringes wird nur gelegentlich berührt; sie scheint selbständiges Interesse zu verdienen und auf naheliegende Verallgemeinerungen hinzuweisen. Im Mittelpunkt unserer Untersuchung aber stehen die Beziehungen von $P(\mathfrak{G}, J)$ zur algebraischen Topologie. Wir werden zeigen: $P(\mathfrak{G}, J)$ hängt zusammen mit dem Cohomologiering[1]) (bezüglich des Koeffizientenbereiches J) derjenigen Polyeder Π, deren Fundamentalgruppe zu $\mathfrak{G}$ isomorph ist oder $\mathfrak{G}$ als homomorphes Bild besitzt; m. a. W. derjenigen Polyeder, welche eine reguläre Überlagerung[2]) mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher Gruppe von Decktransformationen besitzen.

2. Daß zwischen der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ und den *Homologie-Eigenschaften* eines zusammenhängenden Polyeders Π Beziehungen bestehen, ist bekannt. Die einfachste betrifft die erste ganzzahlige Homologiegruppe $\mathfrak{B}^1$ von Π: *Die Abelsch gemachte Fundamentalgruppe, d. h. die Faktorgruppe von $\mathfrak{F}$ nach ihrer Kommutatorgruppe, ist zu $\mathfrak{B}^1$ isomorph.* Für die zweite ganzzahlige Homologiegruppe $\mathfrak{B}^2$ von Π gilt ebenfalls eine allgemeine, allerdings weniger einfache Beziehung, die von Hopf [1] entdeckt wurde: *Eine durch eine bestimmte, rein algebraische Vorschrift aus $\mathfrak{F}$ abgeleitete Gruppe ist homomorphes Bild von $\mathfrak{B}^2$*, nämlich isomorph zur Faktorgruppe von $\mathfrak{B}^2$ nach der Untergruppe derjenigen Homologieklassen, welche Bilder von Sphären enthalten.

Diese Sätze hat Hopf [2] weitgehend verallgemeinert; er hat sie einerseits auf die höherdimensionalen Homologiegruppen ausgedehnt und andererseits an Stelle der Fundamentalgruppe von Π die zu einer regulären Überlagerung[2]) $\overline{\Pi}$ von Π gehörige Decktransformationengruppe $\mathfrak{G}$ betrachtet (welche zur Fundamentalgruppe isomorph ist, wenn es sich um die universelle Überlagerung handelt, sonst ihr homomorphes Bild).

---

[1]) Darunter verstehen wir den Ring, zu welchem das Alexandersche Produkt (vgl. [8] oder [6], wo es als „cup"-Produkt bezeichnet wird) die direkte Summe aller Cohomologiegruppen macht. — Die Zahlen in eckiger Klammer verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß unserer Arbeit.

[2]) Wegen aller Begriffe aus der Überlagerungstheorie der Polyeder vgl. [4], 8. Kapitel.

J sei ein Ring mit Einselement; wir sagen, ein Polyeder habe die Eigenschaft E_J^N, wenn es zusammenhängend ist und wenn seine Homologiegruppen bezüglich J in den Dimensionen $n = 1, 2, \ldots, N-1$ gleich 0 sind (z. B. hat ein Euklidischer Raum die Eigenschaft E_J^N für alle N, die Sphäre S^m für $N \leqslant m$; jedes einfach zusammenhängende Polyeder hat die Eigenschaft E_J^2). Die Sätze von Hopf besagen u. a.: Wenn die Überlagerung $\overline{\Pi}$ von Π die Eigenschaft E_J^N hat, so sind die Homologiegruppen bezüglich J von Π der Dimensionen $1, 2, \ldots, N-1$, ferner eine Faktorgruppe der N-ten Homologiegruppe rein algebraisch durch die Decktransformationenguppe $\mathfrak{G}$ und den Ring J bestimmt.

In der vorliegenden Arbeit wird Entsprechendes für den *Cohomologiering* von Π gezeigt; das Hauptresultat läßt sich etwa so formulieren (die genaue Formulierung findet sich in den Sätzen IV und IV′ in 13.8): *Besitzt das Polyeder Π eine reguläre Überlagerung mit der Eigenschaft E_J^N, und ist $\mathfrak{G}$ die zugehörige Decktransformationengruppe, so läßt sich die Struktur des Cohomologieringes von Π bezüglich J „bis zur Dimension N“ dem Ring $P(\mathfrak{G}, J)$ entnehmen, ist also durch $\mathfrak{G}$ und J bestimmt.* „Bis zur Dimension N“ heißt dabei, daß die Cohomologiegruppen der Dimensionen $< N$, eine bestimmte Untergruppe der N-ten Cohomologiegruppe sowie alle Produkte in diesen Dimensionen durch $P(\mathfrak{G}, J)$ gegeben sind. — Da die universelle Überlagerung von Π stets die Eigenschaft E_J^2 besitzt, folgt hieraus (Satz VI in 13.9), daß *für jedes Polyeder mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ der Cohomologiering „bis zur Dimension 2“ dem Ring $P(\mathfrak{F}, J)$ zu entnehmen, also durch $\mathfrak{F}$ und J bestimmt ist.*

3. Ist das Polyeder eine orientierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension m, so kann man unsere Resultate vermöge der bekannten Dualitätsbeziehungen auf den Schnittring der Homologieklassen übertragen, und zwar, wenn eine Überlagerung mit der Eigenschaft E_J^N vorliegt, für die Dimensionen $n \geqslant m - N$; insbesondere ist der Schnitt zweier $(m-1)$-dimensionaler Homologieklassen stets durch die Fundamentalgruppe bestimmt (dies hat für geschlossene Mannigfaltigkeiten schon Hopf gezeigt, vgl. [1]).

Weitere Sätze, für ein beliebiges Polyeder, ergeben sich aus den unsern für das dem Alexanderschen Produkt (dem „cup“-Produkt) zugeordnete Čech-Whitneysche Produkt[3]) (das „cap“-Produkt), auf Grund des bekannten Zusammenhangs zwischen den beiden[3]). Auch hieraus erhält man im Falle der Mannigfaltigkeiten Resultate über den Schnittring.

---

[3]) Vgl. [6], ferner [9], S. 432 ff.

Auf alle diese Erweiterungen und Anwendungen werden wir nicht eingehen, sondern uns nur mit dem Alexanderschen Ring in einem beliebigen Polyeder befassen.

4. Unser Ergebnis enthält als Spezialfall einen Satz der Homotopietheorie von Hurewicz [4]), welcher besagt, daß *in einem asphärischen Polyeder der Cohomologiering durch die Fundamentalgruppe* $\mathfrak{F}$ *bestimmt ist*, d. h. daß zwei asphärische Polyeder mit isomorpher Fundamentalgruppe isomorphe Cohomologieringe haben. Ein Polyeder heißt dabei *asphärisch*, wenn in ihm jedes stetige Bild einer n-dimensionalen Sphäre ($n=2, 3, \ldots$) auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Wir können sogar über diesen Satz hinaus angeben, auf welche Weise der Cohomologiering bezüglich J eines asphärischen Polyeders algebraisch mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ verknüpft ist: *Er ist zum Ring* $P(\mathfrak{F}, J)$ *isomorph* (vgl. die Sätze VII und VII′ in § 14; wir machen dort unter der Voraussetzung, daß das Polyeder in den Dimensionen $2, 3, \ldots, N-1$ asphärisch ist, eine Aussage „bis zur Dimension N“).

5. Der Ring $P(\mathfrak{G}, J)$ wird im Abschnitt I definiert und untersucht. Er ist seiner additiven Struktur nach die direkte Summe von Gruppen $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; die Elemente von $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$ sind Klassen von Funktionen von n Variabeln aus $\mathfrak{G}$, gebildet mit Hilfe einer Operation δ (vgl. § 1), die mit der Differentiation von Differentialformen eine gewisse Analogie aufweist. Das Produkt eines Elementes aus Γ^n und eines aus Γ^k ist ein Element aus Γ^{n+k}. Die Gruppen $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$ sind auch definiert, wenn J nicht ein Ring, sondern nur eine (additiv geschriebene) Abelsche Gruppe ist. In § 2 wird die Bedeutung von Γ^1 und Γ^2 untersucht: $\Gamma^1(\mathfrak{G}, J)$ ist die Gruppe der Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ in J; $\Gamma^2(\mathfrak{G}, J)$ ist isomorph zur „Gruppe der zentralen Erweiterungen von J durch $\mathfrak{G}$“. Es ergibt sich also ein *Zusammenhang der Cohomologietheorie mit Gruppenerweiterungen*; dieser gestattet nicht nur algebraische Anwendungen (vgl. z. B. 10.4 und 11.5), sondern legt auch gewisse Verallgemeinerungen nahe (vgl. 2.6), auf die wir an anderer Stelle eingehen werden und die ebenfalls mit topologischen Eigenschaften von Polyedern zusammenhängen.

6. Im Abschnitt III zeigen wir, daß $P(\mathfrak{G}, J)$ als Cohomologiering eines gewissen *abstrakten Komplexes* $K_{\mathfrak{G}}$ aufgefaßt werden kann, und zwar so, daß die $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$ die Cohomologiegruppen der Dimension n von K sind. Die Zellen und die Randbildung von $K_{\mathfrak{G}}$ sind mit Hilfe der ab-

---

[4]) Vgl. [5], Teil IV, S. 221.

strakten Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}$ allein erklärt; isomorphe Gruppen $\mathfrak{G}$ führen zu isomorphen Komplexen $K_{\mathfrak{G}}$.

Der Begriff des abstrakten Komplexes, in der Form, wie wir ihn benötigen, wird im Abschnitt II bereitgestellt, ebenso der Begriff der abstrakten *Überlagerung* und der zugehörigen *Automorphismengruppe*; der Homologietheorie werden dabei endliche Ketten zugrunde gelegt, der Cohomologietheorie i. A. unendliche Ketten (Funktionen der Zellen). Dualitätssätze für die Homologie- und Cohomologiegruppen werden beim Beweis der Sätze nicht benützt; wir brauchen deshalb diese Gruppen nicht zu topologisieren und können so den rein algebraischen Charakter unserer Überlegungen betonen. — Um den Zusammenhang mit den Polyedern herzustellen, ordnen wir dem Begriff des abstrakten Komplexes denjenigen des simplizialen Komplexes (der Simplizialzerlegung eines Polyeders) unter (§ 5 und 6.4); alle geometrischen, d. h. von Polyedern handelnden Sätze formulieren wir für simpliziale Komplexe K. Der Übergang zur singulären Homologietheorie dürfte es gestatten, die Resultate dieser Arbeit auf allgemeinere Räume zu übertragen.

7. Im Abschnitt IV werden die Beziehungen von $P(\mathfrak{G}, J)$ zur Cohomologietheorie aufgestellt, zunächst die rein additiven für beliebige abstrakte Komplexe, welche Überlagerungen mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher fixpunktfreier Automorphismengruppe besitzen, sodann die multiplikativen für simpliziale Komplexe. Die Hauptsätze sind in den §§ 11 und 13 formuliert; der Spezialfall asphärischer Polyeder wird in § 14 behandelt.

Die Ergebnisse von Hopf, die wir oben erwähnten, werden in unseren Ausführungen nicht benützt. Es sei aber bemerkt, daß die Beweismethode im Abschnitt IV, soweit sie die additive Struktur des Cohomologierings betrifft (§ 12), mit derjenigen von Hopf [2] verwandt und ihr teilweise nachgebildet ist. Es besteht übrigens zwischen den Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$, die Hopf [2] der beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ in rein algebraischer Weise zugeordnet hat (den „Bettischen Gruppen, die zu $\mathfrak{G}$ gehören") und unseren Gruppen Γ^n bei geeigneter Wahl der Koeffizienten eine naheliegende Beziehung (11.7): Γ^n ist für $n = 1, 2, \ldots$ die Gruppe der Charaktere von $\mathfrak{G}_J^n$. Man kann nämlich die $\mathfrak{G}_J^n$ als Homologiegruppen unseres abstrakten Komplexes $K_{\mathfrak{G}}$ auffassen.*)

*) Nach Beendigung der vorliegenden Arbeit habe ich durch Vermittlung von Herrn Hopf den Probeabzug einer Arbeit von S. Eilenberg und S. MacLane („Relations between homology and homotopy groups of spaces", Annals of math. 76 (1945) 489—509, erhalten, welche mit meiner Untersuchung enge Berührungen aufweist. Es wird dort u. a.

I. Algebraische Einführung der Cohomologietheorie einer beliebigen Gruppe

§ 1. Die Gruppen $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$.

1.1. $\mathfrak{G}$ sei eine beliebige, multiplikativ geschriebene Gruppe, J eine Abelsche, additiv geschriebene Gruppe (im folgenden Koeffizientenbereich genannt).

Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ verstehen wir unter einer *n-Funktion* f^n eine Funktion, welche jedem System von n Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Element $\tau = f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von J zuordnet; n heißt die Dimensionszahl von f^n. Alle n-Funktionen bilden bezüglich der Addition

$$(f^n + g^n)(x_1, \ldots, x_n) = f^n(x_1, \ldots, x_n) + g^n(x_1, \ldots, x_n)$$

eine Abelsche Gruppe, die wir mit $L^n(\mathfrak{G}, J)$ oder kurz L^n bezeichnen.

1.2. Definition: Der *Corand* δf^n einer n-Funktion f^n ist die $(n + 1)$-Funktion, die durch

$$(\delta f^n)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) =$$
$$= f^n(x_1^{-1}x_2, \ldots, x_1^{-1}x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f^n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$$

gegeben ist. Dabei bedeutet $\hat{x}_i$, daß x_i weggelassen werden soll, so daß als Argumente von f^n noch $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$ übrig bleiben. So ist z. B.

$$\delta f^1(x_1, x_2) = f^1(x_1^{-1}x_2) - f^1(x_2) + f^1(x_1) \ ,$$
$$\delta f^2(x_1, x_2, x_3) = f^2(x_1^{-1}x_2, x_1^{-1}x_3) - f^2(x_2, x_3) + f^2(x_1, x_3) - f^2(x_1, x_2) \ .$$

Wegen $\delta(f^n + g^n) = \delta f^n + \delta g^n$ bewirkt die Operation δ eine homomorphe Abbildung von L^n in L^{n+1}. Das Bild ist dabei eine Untergruppe $H^{n+1} = \delta L^n$ von L^{n+1}, bestehend aus denjenigen $(n + 1)$-Funktionen, die Coränder, d. h. von der Form δf^n sind. Der Kern der Abbildung δ ist eine Untergruppe Z^n von L^n, bestehend aus denjenigen n-Funktionen f^n, deren Corand $\delta f^n = 0$ ist; eine solche Funktion heißt ein *Cozyklus*.

---

ein Satz über asphärische Räume bewiesen, der genau dem Spezialfall unseres Ergebnisses für asphärische Polyeder (vgl. Nr. 4 unserer Einleitung oder Satz VII und VII′ in § 14) entspricht. Die Methode scheint von der meinen zwar verschieden zu sein, benützt aber auch einen abstrakten Komplex, der im wesentlichen mit unserem Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ übereinstimmt.

1.3. Für $n = 0$ ergänzen wir die Definitionen in folgender Weise: Eine 0-Funktion f^0 ist ein Element τ von J, und δf^0 soll immer $= 0$ sein; $L^0 = Z^0$ ist also die Gruppe J, und H^1 ist $= 0$. Wir setzen ferner $H^0 = 0$.

1.4. *Für jede Funktion f^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist $\delta\delta f^n = 0$.*

Dies läßt sich durch direkte Rechnung verifizieren; wir verzichten darauf, da sich die Behauptung an anderer Stelle ergeben wird (s. 8.2).

Aus $\delta\delta = 0$ folgt: Jeder Corand ist ein Cozyklus, d. h. H^n ist eine Untergruppe von Z^n. Die Faktorgruppe Z^n/H^n heißt die *n-te Cohomologiegruppe von $\mathfrak{G}$ bezüglich J* $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; wir bezeichnen sie mit $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$. Ihre Elemente, die Restklassen von Z^n nach H^n, heißen Cohomologieklassen; zwei Cozyklen derselben Klasse, d. h. deren Differenz in H^n liegt, heißen cohomolog. — $\Gamma^0(\mathfrak{G}, J) \cong J$ wird mit J identifiziert [5].

§ 2. Bedeutung der Gruppen $\Gamma^1(\mathfrak{G}, J)$ und $\Gamma^2(\mathfrak{G}, J)$.

2.1. Ist f^1 ein Cozyklus, so gilt

$$\delta f^1(x, y) = f^1(x^{-1}y) - f^1(y) + f^1(x) = 0$$

für beliebige Elemente $x, y \in \mathfrak{G}$; d. h. f^1 ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ in J. Wegen $H^1 = 0$ ist $\Gamma^1(\mathfrak{G}, J) = Z^1$; die Elemente von Γ^1 sind also die Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ in J, mit der üblichen Addition.

Die Gruppe $\Gamma^1(\mathfrak{G}, J)$ ist die Gruppe der Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ in J.

2.2. Ein 2-Cozyklus ist eine Funktion f^2, für welche

$$\delta f^2(x, y, z) = f^2(x^{-1}y, x^{-1}z) - f^2(y, z) + f^2(x, z) - f^2(x, y) = 0$$

ist, mit beliebigen Elementen $x, y, z \in \mathfrak{G}$, oder

$$f^2(x, y) + f^2(y, z) = f^2(x^{-1}y, x^{-1}z) + f^2(x, z)\ . \tag{1}$$

Diese 2-Cozyklen lassen sich nun umkehrbar eindeutig den sog. *Faktorsystemen* [6]) von $\mathfrak{G}$ in J zuordnen. Wenn von Faktorsystemen von $\mathfrak{G}$ in J die Rede ist, so ist anzugeben, in welcher Weise $\mathfrak{G}$ als Automorphismen-

---

[5]) $\cong$ bedeutet „isomorph".

[6]) Vgl. [7], § 6. — Trotz der additiven Schreibweise in J verwenden wir — wegen des Zusammenhangs mit der Erweiterungstheorie — die Bezeichnung Faktorsystem und nicht „Summandensystem".

gruppe von J aufzufassen ist; hier sollen diese Automorphismen immer die Identität von J sein. In diesem Falle sind die Faktorsysteme so definiert: Es sind 2-Funktionen $\varphi^2 \in L^2$, welche die Beziehung

$$\varphi^2(u, v) + \varphi^2(u, vw) = \varphi^2(v, w) + \varphi^2(uv, w) \tag{2}$$

für beliebige $u, v, w \in \mathfrak{G}$ erfüllen. Die Differenz zweier Faktorsysteme ist wieder ein solches; die Faktorsysteme bilden also eine Untergruppe Φ^2 von L^2.

Wir ordnen jeder 2-Funktion f^2 eine andere φ^2 zu, indem wir

$$\varphi^2(u, v) = f^2(u, uv) \tag{3}$$

setzen für alle $u, v \in \mathfrak{G}$. Diese Zuordnung $f^2 \to \varphi^2$ ist homomorph, und sie läßt sich offenbar umkehren, indem man bei gegebenem φ^2

$$f^2(x, y) = \varphi^2(x, x^{-1}y) \tag{4}$$

setzt; sie ist also ein Isomorphismus von L^2 auf sich. Das Bestehen von (1) für f^2 ist mit dem Bestehen von (2) für die zugeordnete Funktion φ^2 äquivalent; um dies zu zeigen, setze man $x = u$, $y = uv$, $z = uvw$ und wende (3) bzw. (4) an. Es werden also beim Isomorphismus $f^2 \to \varphi^2$ die 2-Cozyklen genau den Faktorsystemen zugeordnet: *Z^2 ist zur Gruppe Φ^2 der Faktorsysteme von $\mathfrak{G}$ in J isomorph.*

2.3. Bei dem genannten Isomorphismus $f^2 \to \varphi^2$ entsprechen die Coränder $f^2 = \delta f^1$ genau denjenigen Faktorsystemen φ^2, für welche

$$\varphi^2(u, v) = \delta f^1(u, uv) = f^1(v) - f^1(uv) + f^1(u)$$

ist. Wenn es zu einem Faktorsystem φ^2 eine 1-Funktion f^1 gibt, derart daß diese Beziehung besteht, so nennt man es *zerfallend*[6]); die zerfallenden Faktorsysteme bilden eine zu H^2 isomorphe Untergruppe Φ_0^2 von Φ^2, und man nennt zwei Faktorsysteme, deren Differenz zerfallend ist, die sich also in derselben Restklasse von Φ^2 nach Φ_0^2 befinden, *äquivalent*. Wir bezeichnen die Gruppe Φ^2/Φ_0^2 der Klassen äquivalenter Faktorsysteme von $\mathfrak{G}$ in J mit $\Psi(\mathfrak{G}, J)$; sie ist zu $\Gamma^2(\mathfrak{G}, J)$ isomorph.

2.4. Nach der Theorie von Schreier[6]) gehört zu jedem Faktorsystem von $\mathfrak{G}$ in J eine *zentrale Erweiterung von J durch* $\mathfrak{G}$, d. h. eine Gruppe E, welche J als Untergruppe des Zentrums mit der Faktorgruppe $E/J \cong \mathfrak{G}$ enthält, und man erhält so alle zentralen Erweiterungen; dabei gehören zu äquivalenten Faktorsystemen Erweiterungen von J durch $\mathfrak{G}$, die über J isomorph sind, und umgekehrt (zu den zerfallenden Faktorsystemen gehört das direkte Produkt von $\mathfrak{G}$ und J). $\Psi(\mathfrak{G}, J)$ kann deshalb als „Gruppe der zentralen Erweiterungen von J durch $\mathfrak{G}$" bezeichnet werden.

Die Gruppe $\Gamma^2(\mathfrak{G}, J)$ ist isomorph zur Gruppe $\Psi(\mathfrak{G}, J)$ der zentralen Erweiterungen von J durch $\mathfrak{G}$.

2.5. Die 2-Cozyklen lassen sich in gewissem Sinne als Faktorsysteme auffassen; in analoger Weise kann man auch für $n > 2$ verallgemeinerte n-Faktorsysteme definieren und diese den n-Cozyklen zuordnen.

Man bilde zu diesem Zwecke durch die Zuordnung $f^n \to \varphi^n$,

$$\varphi^n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = f^n(u_1, u_1 u_2, \ldots, u_1 u_2 \ldots u_n) ,$$

die Gruppe L^n der n-Funktionen isomorph auf sich ab. Ein Cozyklus f^n geht dabei über in eine Funktion φ^n, für welche wegen

$$\begin{aligned} 0 &= \delta f^n(u_1, u_1 u_2, \ldots, u_1 u_2 \ldots u_{n+1}) \\ &= f^n(u_2, u_2 u_3, \ldots, u_2 u_3 \ldots u_{n+1}) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (u_1, \ldots, u_1 u_2 \ldots u_{i-1}, u_1 u_2 \ldots u_{i+1}, \ldots, u_1 u_2 \ldots u_{n+1}) \end{aligned}$$

gilt:

$$\varphi^n(u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varphi^n(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_{n+1})$$
$$+ (-1)^{n+1} \varphi^n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 .$$

Das ist eine Verallgemeinerung der Relation (2), durch welche die Faktorsysteme definiert sind. Ob den n-Faktorsystemen φ^n auch für $n > 2$ eine einfache gruppentheoretische Bedeutung zukommt (über ihre Rolle in unsern algebraisch-topologischen Betrachtungen hinaus), ist mir unbekannt; immerhin sei darauf hingewiesen, daß ähnliche Begriffsbildungen in der Automorphismentheorie der Algebren auftreten [7]).

2.6. Die Betrachtung der Faktorsysteme legt es nahe, die Definition des Corandes so zu modifizieren, daß beliebige, nicht nur zentrale Erweiterungen von J auftreten [6]); dabei muß man $\mathfrak{G}$ zum vorneherein als Automorphismengruppe von J auffassen und

---

[7]) Vgl. *O. Teichmüller*, Deutsche Mathematik 5 (1940) 138—149; *E. Witt*, Crelles Journal 173 (1935) 43—51, bes. 44.

$$\delta f^n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1 \cdot f^n(x_1^{-1}x_2, \ldots, x_1^{-1}x_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f^n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$$

setzen. Wir gehen auf diese Verallgemeinerung in der vorliegenden Arbeit nicht näher ein.

§ 3. Der Ring $P(\mathfrak{G}, J)$.

3.1. Der Koeffizientenbereich, der den Funktionen und Cohomologiegruppen zugrunde liegt, sei jetzt ein *Ring* (genauer: die additive Gruppe eines Ringes, der ebenfalls mit J bezeichnet wird). Wir definieren für jede Funktion $f^n \in L^n$ und jede Funktion $g^k \in L^k$ ein *Produkt* $f^n \cup g^k$; das ist die $(n+k)$-Funktion $\in L^{n+k}$, die durch

$$(f^n \cup g^k)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}) =$$
$$= f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot g^k(x_n^{-1}x_{n+1}, x_n^{-1}x_{n+2}, \ldots, x_n^{-1}x_{n+k})$$

bestimmt ist, wenn $n > 0$ und $k > 0$, und durch

$$(f^n \cup g^0)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot g^0 \;,$$
$$(f^0 \cup g^k)(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f^0 \cdot g^k(x_1, x_2, \ldots, x_k) \;.$$

Rechter Hand steht ein im Ring J auszuführendes Produkt.

Ist J ein Ring mit Einselement 1, so spielt offenbar $f^0 = 1$ für dieses $\cup$-Produkt die Rolle der Eins. Daß das $\cup$-Produkt *distributiv* ist, ist klar; wir wollen zeigen, daß es auch *assoziativ* ist:

$$(f^n \cup g^k) \cup h^m = f^n \cup (g^k \cup h^m)$$

für beliebige Funktionen f^n, g^k und h^m.

Beweis. Wir dürfen n, k und $m > 0$ annehmen. Es ist einerseits

$$((f^n \cup g^k) \cup h^m)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k+m}) =$$
$$= (f^n \cup g^k)(x_1, \ldots, x_{n+k}) \cdot h^m(x_{n+k}^{-1}x_{n+k+1}, \ldots, x_{n+k}^{-1}x_{n+k+m})$$
$$= f^n(x_1, \ldots, x_n) \cdot g^k(x_n^{-1}x_{n+1}, \ldots, x_n^{-1}x_{n+k}) \cdot h^m(x_{n+k}^{-1}x_{n+k+1}, \ldots, x_{n+k}^{-1}x_{n+k+m}),$$

und andererseits

$$(f^n \cup (g^k \cup h^m))(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k+m}) =$$
$$= f^n(x_1, \ldots, x_n) \cdot (g^k \cup h^m)(x_n^{-1} x_{n+1}, \ldots, x_n^{-1} x_{n+k+m})$$
$$= f^n(x_1, \ldots, x_n) \cdot g^k(x_n^{-1} x_{n+1}, \ldots, x_n^{-1} x_{n+k}) \cdot h^m(x_{n+k}^{-1} x_{n+k+1}, \ldots, x_{n+k}^{-1} x_{n+k+m}) .$$

3.2. Für das eben definierte $\cup$-Produkt gilt ferner die Formel

$$\delta(f^n \cup g^k) = (\delta f^n \cup g^k) + (-1)^n (f^n \cup \delta g^k) . \tag{5}$$

Beweis. Es ist

$$\delta(f^n \cup g^k)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k+1}) = (f^n \cup g^k)(x_1^{-1} x_2, \ldots, x_1^{-1} x_{n+k+1}) + \sigma$$

mit der Abkürzung

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n+k+1} (-1)^i (f^n \cup g^k)(x_1, x_2, \ldots, \hat{x}_i, \ldots x_{n+k+1}) ;$$

man erhält dafür

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f^n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) \cdot g^k(x_{n+1}^{-1} x_{n+2}, \ldots, x_{n+1}^{-1} x_{n+k+1})$$
$$+ \sum_{i=n+1}^{n+k+1} (-1)^i f^n(x_1, \ldots, x_n) \cdot g^k(x_n^{-1} x_{n+1}, \ldots, \widehat{x_n^{-1} x_i}, \ldots, x_n^{-1} x_{n+k+1}) .$$

Fügt man noch

$$0 = (-1)^n f^n(x_1, \ldots, x_n) \cdot g^k(x_{n+1}^{-1} x_{n+1}, \ldots, x_{n+1}^{-1} x_{n+k+1}) +$$
$$(-1)^{n+1} f^n(\ldots) \cdot g^k(\ldots)$$

hinzu, so erhält man nach geeigneter Zusammenfassung der Glieder

$$\delta(f^n \cup g^k) \ (x_1, \ldots, x_{n+k+1}) =$$
$$= \delta f^n(x_1, \ldots, x_{n+1}) \cdot g^k(x_{n+1}^{-1} x_{n+2}, \ldots, x_{n+1}^{-1} x_{n+k+1}) +$$
$$+ (-1)^n f^n(x_1, \ldots, x_n) \cdot \delta g^k(x_n^{-1} x_{n+1}, \ldots, x_n^{-1} x_{n+k+1})$$
$$= (\delta f^n \cup g^k)(x_1, \ldots, x_{n+k+1}) + (-1)^n (f^n \cup \delta g^k) \ (x_1, \ldots, x_{n+k+1}) .$$

3.3. Aus (5) folgt unmittelbar

Cozyklus $\cup$ Cozyklus $=$ Cozyklus ,
Cozyklus $\cup$ Corand $=$ Corand ,
Corand $\cup$ Cozyklus $=$ Corand .

Für zwei Cozyklen f^n und g^k ist also die durch den Cozyklus $f^n \cup g^k$ repräsentierte Cohomologieklasse $\in \Gamma^{n+k}(\mathfrak{G}, J)$ nur abhängig von der Cohomologieklasse von f^n und derjenigen von g^k; es ist also dadurch für Cohomologieklassen beliebiger Dimensionen ein $\cup$-Produkt definiert, welches distributiv und assoziativ ist und dessen Dimension gleich der Summe der Dimensionen der Faktoren ist. Hat der Ring J ein Einselement 1, so spielt die aus $f^0 = 1$ bestehende Cohomologieklasse die Rolle des Einselements dieses Produkts.

Ist J ein Ring (mit Einselement), so wird vermöge des $\cup$-Produktes die direkte Summe aller Cohomologiegruppen $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, zu einem Ring $P(\mathfrak{G}, J)$ (mit Einselement), dem Cohomologiering der Gruppe $\mathfrak{G}$ bezüglich J.

Bemerkungen:

3.4. *Gruppen-Paar.* Zwei Abelsche Gruppen J_1 und J_2 bilden ein Paar bezüglich der Abelschen Gruppe J, wenn für jedes Element $\tau_1 \in J_1$ und $\tau_2 \in J_2$ ein Produkt

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \tau \in J$$

definiert ist, welches bilinear (distributiv) ist. Beispiele: (1) $J_1 = J_2 = J$ sei ein Ring (von dem wir übrigens immer annehmen werden, daß er ein Einselement besitzt; dies spielt erst später eine Rolle). (2) J_2 sei die additive Gruppe der ganzen Zahlen (wir bezeichnen sie stets mit $\mathfrak{A}$), $J_1 = J$ eine beliebige Abelsche Gruppe; es ist klar, was dann unter dem Produkt $\tau_1 \cdot \tau_2$ zu verstehen ist. (3) J_2 sei eine beliebige Abelsche Gruppe, J die additive Gruppe $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen modulo 1, und J_1 die Gruppe der Charaktere von J_2 (d. h. der Homomorphismen von J_2 in $\mathfrak{R}$), die wir mit $Ch J_2$ bezeichnen; $\tau_1 \cdot \tau_2 = \tau \in \mathfrak{R}$ ist der Wert des Charakters τ_1 für das Element τ_2.

Gruppenpaare werden in dieser Arbeit wiederholt als *Koeffizientenbereiche* Verwendung finden; dabei wird es sich immer nur um die drei genannten Fälle (1), (2) und (3) handeln. An dieser Stelle sei nur darauf hingewiesen, daß man das $\cup$-Produkt von Funktionen und Cohomologieklassen auch bilden kann, wenn man an Stelle des Ringes J ein Gruppenpaar zugrunde legt: Wenn J_1 und J_2 bezüglich J ein Paar bilden, so sei das Produkt $f^n \cup g^k \in L^{n+k}(\mathfrak{G}, J)$ für $f^n \in L^n(\mathfrak{G}, J_1)$ und $g^k \in L^k(\mathfrak{G}, J_2)$ durch dieselben Formeln wie in 3.1 definiert; es ist distributiv und erfüllt (5) und macht somit $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J_1)$ und $\Gamma^k(\mathfrak{G}, J_2)$ zu einem Paar bezüglich $\Gamma^{n+k}(\mathfrak{G}, J)$.

3.5. Produkt zweier 1-Cozyklen. Sind f^1 und g^1 zwei 1-Cozyklen, so ist $f^2 = f^1 \cup g^1$ ein 2-Cozyklus, und für das ihm zugeordnete Faktorsystem φ^2 (vgl. 2.2) gilt

$$\varphi^2(u, v) = f^2(u, uv) = (f^1 \cup g^1)(u, uv) = f^1(u) \cdot g^1(v) \ .$$

Ist J_1 der Koeffizientenbereich für f^1, J_2 für g^1, wo J_1, J_2 ein Paar ist bezüglich J, so ist φ^2 ein Faktorsystem von $\mathfrak{G}$ in J, f^1 ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ in J_1, g^1 in J_2. Also: *Sind f^1 und g^1 Homomorphismen von in J_1 bzw. J_2, so ist $\varphi^2(u, v) = f^1(u) \cdot g^1(v)$ ein Faktorsystem von $\mathfrak{G}$ in J; es entspricht dem Produkt $f^1 \cup g^1$.*

3.6. Es ergibt sich aus den Definitionen, daß zu isomorphen Gruppen $\mathfrak{G}$ isomorphe Cohomologiegruppen $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und isomorphe Cohomologieringe $P(\mathfrak{G}, J)$ gehören; die Struktur der Gruppen Γ^n und des Ringes P ist also durch die *abstrakte Struktur von* $\mathfrak{G}$ (und von J) bestimmt.

II. Abstrakte Komplexe und ihre Überlagerungen

Der im Abschnitt I beschriebene Ring $P(\mathfrak{G}, J)$ spielt in der algebraischen Topologie eine Rolle, die zu klären das Ziel der vorliegenden Arbeit ist. Wir werden zeigen, daß er dann auftritt, wenn ein Komplex eine Überlagerung mit der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ besitzt. Dies beruht darauf, daß $P(\mathfrak{G}, J)$ selbst der Cohomologiering (im Sinne der algebraischen Topologie) eines gewissen abstrakten, zur Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörigen Komplexes $K_{\mathfrak{G}}$ ist (§ 8).

Der Abschnitt II hat vorbereitenden Charakter. Wir erinnern zunächst an den Begriff des „rand-endlichen abstrakten Komplexes“ (vgl. [9]) in dem von uns benötigten Umfang, und stellen die wichtigsten Formeln und Bezeichnungen zusammen; sodann besprechen wir die Begriffe „Automorphismus“ und „Überlagerung“ für abstrakte Komplexe in einer allgemeinen Form, welche sowohl den Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ als auch die gewöhnlichen Überlagerungen von Polyedern umfaßt.

§ 4. Rand-endlicher Komplex.

4.1. Es liege eine Menge K von Elementen vor, die (abstrakte) *Zellen* genannt werden; jeder Zelle sei eine nicht-negative ganze Zahl n, ihre Dimension, zugeordnet. Wir bezeichnen die n-dimensionalen Zellen mit c^n und nennen sie auch kurz n-Zellen.

Eine (*endliche*) *n-Kette* in K bezüglich einer Abelschen Gruppe J ist eine endliche Linearform

$$a^n = \sum_i \tau_i c_i^n \quad , \quad \tau_i \in J \quad ,$$

in der die Zellen die Rolle von Unbestimmten spielen; alle n-Ketten bilden bezüglich der Addition von Linearformen eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{L}^n$ (ausführlicher $\mathfrak{L}^n(K,J)$ geschrieben). Dies für $n = 0, 1, 2, \ldots$; wir verstehen ferner unter $\mathfrak{L}^{-1}$ die Nullgruppe. Sind die Koeffizienten ganze Zahlen, d. h. nimmt man für J die additive Gruppe $\mathfrak{A}$ der ganzen Zahlen, so sprechen wir von *ganzzahligen* Ketten. Ist J beliebig, $a^n = \Sigma \nu_i c_i^n$ eine ganzzahlige Kette, und $\tau \in J$, so versteht man unter τa^n die Kette $\in \mathfrak{L}^n(K,J)$

$$\tau a^n = \Sigma \nu_i \tau c_i^n \quad .$$

Die direkte Summe aller $\mathfrak{L}^n(K,J)$ soll mit $\mathfrak{L}(K,J)$ bezeichnet werden; ihre Elemente sind „gemischt-dimensionale" Ketten, im Gegensatz zu den „homogen-dimensionalen" n-Ketten.

Zu einem *rand-endlichen abstrakten Komplex* wird K erst durch Einführung einer Randoperation ∂; das ist ein System von Homomorphismen von $\mathfrak{L}^n(K, \mathfrak{A})$ in $\mathfrak{L}^{n-1}(K, \mathfrak{A})$, für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ einer, welche die Bedingung $\partial\partial = 0$ erfüllen (d. h. $\partial\partial\, a^n = 0$ für jede ganzzahlige Kette a^n der Dimension $n > 1$). Sie ist definiert, wenn für jede Zelle c^n die ganzzahlige $(n - 1)$-Kette ∂c^n bekannt ist.

Für spätere Zwecke sind noch die beiden folgenden Eigenschaften nützlich, die wir immer voraussetzen wollen: (a) Es gibt in K mindestens eine 0-Zelle. (b) Für den Rand $\partial c^1 = \Sigma \nu_i c_i^0$ jeder 1-Zelle c^1 ist $\Sigma \nu_i = 0$.

4.2. Bei beliebigem Koeffizientenbereich J versteht man unter dem Rand ∂a^n einer Kette $a^n = \Sigma \tau_i c_i^n \in \mathfrak{L}^n(K,J)$ die $(n - 1)$-Kette

$$\partial a^n = \sum_i \tau_i \partial c_i^n \;;$$

dann ist ∂ ein Homomorphismus von $\mathfrak{L}^n(K,J)$ in $\mathfrak{L}^{n-1}(K,J)$, für $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\partial \mathfrak{L}^n = \mathfrak{H}^{n-1}$ ist die Untergruppe derjenigen $(n - 1)$-Ketten, welche *Ränder* sind, und der Kern des Homomorphismus ∂ von $\mathfrak{L}^n$ in $\mathfrak{L}^{n-1}$ ist die Untergruppe $\mathfrak{Z}^n$ derjenigen n-Ketten a^n, deren Rand $\partial a^n = 0$ ist und die man *Zyklen* nennt. Wegen $\partial\partial = 0$ ist $\mathfrak{H}^n$ Untergruppe von $\mathfrak{Z}^n$.

Für $n = 0$ ist wegen $\mathfrak{L}^{-1} = 0$ immer $\mathfrak{Z}^0 = \mathfrak{L}^0$, und $\mathfrak{L}^0 \neq 0$ wegen (a); ferner wegen (b) $\mathfrak{H}^0 \neq \mathfrak{Z}^0$, da nur 0-Ketten mit verschwindender Koeffizientensumme Ränder sein können. Die Gruppe der 0-Zyklen (0-Ketten) mit verschwindender Koeffizientensumme bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}^{00}$; es ist $\mathfrak{H}^0 \subset \mathfrak{Z}^{00}$.

Unter der *n-ten Homologiegruppe* $\mathfrak{B}^n(K,J)$ *von* K *bezüglich* J verstehen wir für $n \geqslant 1$ die Faktorgruppe $\mathfrak{Z}^n/\mathfrak{H}^n$, für $n = 0$ die Faktorgruppe $\mathfrak{Z}^{00}/\mathfrak{H}^0$; ihre Elemente heißen Homologieklassen.

4.3. Der *Cohomologietheorie* des Komplexes K legen wir Ketten zugrunde, die auch unendlich viele Koeffizienten $\neq 0$ haben dürfen; es ist für unsere Zwecke etwas bequemer, von Funktionen zu sprechen: Eine *n-Funktion* f^n in K ist eine Funktion aller n-Zellen c^n von K mit Werten in J. Bezüglich ihrer natürlichen Addition bilden alle n-Funktionen in K eine Abelsche Gruppe L^n oder ausführlicher $L^n(K,J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; unter L^{-1} soll die Nullgruppe verstanden werden. Die direkte Summe aller $L^n(K,J)$ wird mit $L(K,J)$ bezeichnet.

J_1 und J_2 seien zwei Abelsche Gruppen, die bezüglich einer dritten J ein *Paar* bilden (vgl. 3.4). Zu jeder Funktion $f^n \in L^n(K,J_1)$ der n-Zellen c^n gehört eine Funktion der n-Ketten $a^n = \Sigma\, \tau_i\, c_i^n \in \mathfrak{L}^n(K,J_2)$, wenn man

$$f^n(a^n) = f^n(\sum_i \tau_i c_i^n) = \sum_i f^n(c_i^n) \cdot \tau_i$$

setzt; man nennt dieses Element $f^n(a^n) \in J$ den *Kroneckerschen Index* von f^n und a^n. Faßt man $f^n(a^n)$ als Produkt von f^n und a^n auf, so ist dieses bilinear (distributiv) und macht $L^n(K,J_1)$ und $\mathfrak{L}^n(K,J_2)$ zu einem Paar bezüglich J. Wir werden als Gruppenpaare zur Bildung des Kroneckerschen Indexes nur die drei Fälle (1), (2), (3) aus 3.4 verwenden.

Bei festem f^n ist $f^n(a^n)$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{L}^n(K,J_2)$ in J. Man stellt leicht fest, daß in den drei Fällen (1), (2), (3) umgekehrt zu jedem Homomorphismus $h(a^n)$ von $\mathfrak{L}^n(K,J_2)$ in J eine und nur eine Funktion $f^n \in L^n(K,J_1)$ gehört, für welche $f^n(a^n) = h(a^n)$ ist für alle a^n; insbesondere sind also zwei Funktionen f^n und $g^n \in L^n(K,J_1)$, deren Kroneckerscher Index für alle $a^n \in \mathfrak{L}^n(K,J_2)$ übereinstimmt, identisch.

4.4. Der *Corand* δf^{n-1} einer Funktion $f^{n-1} \in L^{n-1}(K,J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, bei beliebigem Koeffizientenbereich J, ist die durch

$$\delta f^{n-1}(c^n) = f^{n-1}(\partial c^n) \tag{6}$$

definierte n-Funktion (die rechte Seite hat einen Sinn, da ∂c^n ganzzahlig ist). Für den Kroneckerschen Index — in allen Fällen, wo er definiert ist — folgt aus (6)

$$\delta f^{n-1}(a^n) = f^{n-1}(\partial a^n) \tag{7}$$

für beliebige Funktionen f^{n-1} und Ketten a^n. Ist $f^{n-1} \in L^{n-1}(K,J)$ mit beliebigem J und c^{n+1} eine $(n+1)$-Zelle, so gilt

$$\delta\delta f^{n-1}(c^{n+1}) = \delta f^{n-1}(\partial c^{n+1}) = f^{n-1}(\partial\partial c^{n+1}) = 0 \ .$$

Die Corandbildung δ ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ein Homomorphismus von $L^{n-1}(K,J)$ in $L^n(K,J)$, wobei $\delta\delta = 0$ ist. Die *n-Coränder* bilden eine Untergruppe $H^n = \delta L^{n-1}$ von L^n, und der Kern von δ ist die Untergruppe Z^{n-1} von L^{n-1}, die aus den Funktionen f^{n-1} mit $\delta f^{n-1} = 0$, den $(n-1)$-*Cozyklen* besteht. Wegen $\delta\delta = 0$ ist $H^n \subset Z^n$. Die Faktorgruppe Z^n/H^n wird für $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit $B^n(K,J)$ bezeichnet und heißt die *n-te Cohomologiegruppe von K bezüglich J*; ihre Elemente heißen Cohomologieklassen, und zwei Cozyklen heißen cohomolog, wenn sie in derselben Klasse liegen. — Es ist immer $H^0 = 0$, also $B^0 = Z^0$.

Aus (7) folgt für den Kroneckerschen Index $f^n(a^n)$

$$\text{Cozyklus (Rand)} = \text{Corand (Zyklus)} = 0 \ .$$

Ist f^n ein Cozyklus, a^n ein Zyklus, so ist also $f^n(a^n)$ nur von der Cohomologieklasse von f^n und der Homologieklasse von a^n abhängig. Bilden J_1 und J_2 bezüglich J ein Paar, so ist somit der Kroneckersche Index für die Elemente von $B^n(K,J_1)$ und $\mathfrak{B}^n(K,J_2)$ erklärt und macht diese zwei Gruppen zu einem Paar bezüglich J.

4.5 Wir haben die Cohomologiegruppen $B^n(K,J)$ *nicht topologisiert*, d. h. wir fassen den Koeffizientenbereich J und die Funktionengruppen ebenso wie die Kettengruppen $\mathfrak{L}^n$ als algebraische (diskrete) Gruppen auf. Es ist für die Zwecke dieser Arbeit auch gar nicht nötig, sie zu topologisieren; die Isomorphismen von Gruppen und Ringen, die das Hauptziel bilden (Sätze II und IV, im Abschnitt IV), lassen sich rein algebraisch herleiten. Die Topologisierung ist unerläßlich, wenn man den *Dualitätssatz* [8]) der Homologie- und Cohomologiegruppen, oft ein bequemes Hilfsmittel, heranziehen will; wir haben die Anwendung dieses Satzes vermieden — was ohne Komplikation möglich ist —, da er das Gruppenpaar (3) (vgl. 3.4) als Koeffizientenbereich voraussetzt, während unseren Ausführungen und der Formulierung der Sätze (Abschnitt IV) die Koeffizientenbereiche (1) und (2) angemessen sind.

Um immerhin den Dualitätssatz gelegentlich anwenden zu können (vgl. 8.4), erinnern wir an folgendes: J sei eine topologische Abelsche

---

[8]) Vgl. [9], Kapitel I, bes. Nr. 7, und die dort zu findenden Literaturangaben.

Gruppe; führt man in $L^n(K,J)$ in üblicher Weise [9]) eine Topologie ein (die nicht diskret zu sein braucht, selbst wenn J es ist), so kann man als topologisierte Cohomologiegruppe $\hat{B}^n(K,J)$ die Faktorgruppe $Z^n/\hat{H}^n$ definieren, wo $\hat{H}^n$ die abgeschlossene Hülle von H^n in Z^n ist. Verwendet man nun die Koeffizientenbereiche (3), und ist dabei $J_1 = Ch J_2$ wie üblich bikompakt topologisiert, so gilt: $\hat{B}^n(K,J_1)$ ist für $n \geqslant 1$ die bikompakte Charakterengruppe der diskreten Gruppe $\mathfrak{B}^n(K,J_2)$; umgekehrt ist also [8]) $\mathfrak{B}^n(K,J_2)$ die Gruppe der stetigen Charaktere von $\hat{B}^n(K,J_1)$, also durch $\hat{B}^n(K,J_1)$ bestimmt. — Die Gruppen $\hat{B}^n(K,J)$ und $B^n(K,J)$ sind i. A. nicht nur topologisch, sondern auch algebraisch verschieden [10]). Sie fallen aber im algebraischen Sinne zusammen, wenn J bikompakt ist, also gerade im Falle des Dualitätssatzes (außerdem übrigens auch in andern Fällen, speziell bei endlichen Komplexen [11])).

4.6. *In der Dimension* 0 haben wir die Definition der Cohomologiegruppe (d. h. des Corandes, also des Randes) so gewählt, wie sie sich für die Produktbildung als geeignet erweist (4.9); dies bringt für die 0-te Homologiegruppe Komplikationen der Darstellung mit sich, die wir dadurch vermeiden, daß wir $\mathfrak{B}^0$ (abweichend von den übrigen $\mathfrak{B}^n$) durch $\mathfrak{Z}^{00}/\mathfrak{H}^0$ definiert haben.

Die 0-Funktion f^0, die für alle Zellen c^0 denselben Wert $f^0(c^0) = \tau$ hat, ist ein Cozyklus. Dies folgt aus (b) in 4.1; denn es ist $\delta f^0(c^1) = f^0(\partial c^1) = \tau\,\sigma$, wo σ die Koeffizientensumme von ∂c^1 ist, also $\delta f^0 = 0$. Wegen (a) in 4.1 ist ferner für $\tau \neq 0$ auch $f^0 \neq 0$. Es ist also (wegen $H^0 = 0$, $B^0 = Z^0$) stets $B^0 \neq 0$, genauer: B^0 enthält eine mit dem Koeffizientenbereich isomorphe Untergruppe B_k^0, bestehend aus den „Konstanten" $f^0 = \tau$.

Wenn $\mathfrak{B}^0(K,J_2) = 0$ ist, so ist $B^0(K,J_1) = B_k^0(K,J_1) \cong J_1$ (dabei sollen J_1 und J_2 ein Paar bilden, vgl. 3.4).

Beweis. Es sei $a^0 = \sigma c_1^0 - \sigma c^0$, $\sigma \in J_2$, also $a^0 \in \mathfrak{Z}^{00} = \mathfrak{H}^0$. Dann ist für einen Cozyklus $f^0 \in L^0(K,J_1)$ $f^0(a^0) = 0$, d. h. $f^0(c_1^0)\cdot\sigma = f^0(c^0)\cdot\sigma$; dies gilt für zwei beliebige 0-Zellen und für alle $\sigma \in J_2$. Daraus folgt (in den Fällen (1), (2), (3) von 3.4), daß $f^0(c^0) = f^0(c_1^0)$, d. h. daß f^0 konstant ist.

---

[9]) Vgl. [10], S. 691.
[10]) Vgl. [10], S. 697.
[11]) Vgl. [10], S. 676.

4.7. *Zyklen erster Art.* Es sei hier ein Hilfssatz angeführt, der später eine Rolle spielen wird. Er handelt von den „Zyklen erster Art“ bezüglich des (beliebigen) Koeffizientenbereiches J; darunter versteht man solche Zyklen, die Linearkombinationen ganzzahliger Zyklen mit Koeffizienten aus J sind. Alle n-Zyklen erster Art bilden eine Untergruppe $\mathfrak{Z}^n_I(K,J)$ von $\mathfrak{Z}^n(K,J)$ oder von $\mathfrak{L}^n(K,J)$, welche $\mathfrak{H}^n$ umfaßt; die Faktorgruppe $\mathfrak{Z}^n_I/\mathfrak{H}^n = \mathfrak{B}^n_I$ heißt die n-te Homologiegruppe erster Art, $n=1$, $2,\ldots$ — Für $n = 0$ ist $\mathfrak{Z}^0_I = \mathfrak{Z}^0 = \mathfrak{L}^0$, $\mathfrak{Z}^{00}_I = \mathfrak{Z}^{00}$ und $\mathfrak{B}^0_I = \mathfrak{B}^0$ (vgl. 4.2).

Hilfssatz. Die Gruppe $\mathfrak{L}^n(K,J)$, $n = 1, 2,\ldots$, zerfällt in die direkte Summe ihrer Untergruppe $\mathfrak{Z}^n_I(K,J)$ und einer weitern Untergruppe.

Beweis. Čech[12]) hat gezeigt, daß die ganzzahlige Gruppe $\mathfrak{L}^n(K,\mathfrak{A})$ in die direkte Summe von $\mathfrak{Z}^n(K,\mathfrak{A})$ und einer weitern Untergruppe $\mathfrak{D}^n$ zerfällt; als Untergruppe der freien Abelschen Gruppe $\mathfrak{L}^n$ (von i. A. unendlich vielen Erzeugenden) sind $\mathfrak{Z}^n$ und $\mathfrak{D}^n$ selbst freie Abelsche Gruppen, und man kann als Basis von $\mathfrak{L}^n$ eine Basis von $\mathfrak{Z}^n$ zusammen mit einer solchen von $\mathfrak{D}^n$ wählen. Da $\mathfrak{L}^n(K,J)$ aus allen Linearkombinationen ganzzahliger Ketten mit Koeffizienten aus J besteht, folgt hieraus die Behauptung. — Ähnlich beweist man für $n = 0$, indem man die Rolle von $\mathfrak{Z}^0_I$ der Gruppe $\mathfrak{Z}^{00}$ überträgt, den

Zusatz. $\mathfrak{L}^0(K,J)$ zerfällt in die direkte Summe von $\mathfrak{Z}^{00}(K,J)$ und einer weitern Untergruppe.

4.8. *Duale Homomorphismen.* Der Koeffizientenbereich für Ketten- und Homologiegruppen sei J_2, für Funktionen- und Cohomologiegruppen J_1, wobei J_1 und J_2 ein Paar bezüglich J bilden (Fälle (1), (2), (3) aus 3.4). Wir betrachten einen Homomorphismus V der Kettengruppe $\mathfrak{L}^n(K,J_2)$ des Komplexes K in die Kettengruppe $\mathfrak{L}^m(K',J_2)$ eines Komplexes K'. Zu jeder Funktion $f^m \in L^m(K',J_1)$ gibt es dann eine und nur eine Funktion $g^n = V^*f^m \in L^n(K,J_1)$, derart daß für alle Ketten $a^n \in \mathfrak{L}^n(K,J_2)$ die Beziehung

$$V^*f^m(a^n) = f^m(Va^n)$$

besteht [denn der Kroneckersche Index auf der rechten Seite ist ein Homomorphismus h von $\mathfrak{L}^n(K,J_2)$ in J, und zu h gibt es nach 4.3 genau eine Funktion $g^n = V^*f^m \in L^n(K,J_1)$, derart daß $g^n(a^n) = h(a^n)$ ist für alle a^n]. V^* ist ein Homomorphismus von $L^m(K',J_1)$ in $L^n(K,J_1)$, welchen wir *den zu V dualen Homomorphismus* nennen. Beispiel: Der zur Rand-

[12]) [3], S. 38, in Nr. 4.

bildung ∂ duale Homomorphismus ∂^* ist die Corandbildung δ. — Für zwei nacheinander ausgeübte Homomorphismen W und V verifiziert man leicht $(VW)^* = W^* V^*$. Sind insbesondere Homomorphismen W, V, W_1, V_1 gegeben, derart daß $VW = W_1 V_1$ ist, so folgt $W^* V^* = V_1^* W_1^*$. — Alles Gesagte überträgt sich natürlich auf Homomorphismen von $\mathfrak{L}(K, J_2)$, der direkten Summe aller $\mathfrak{L}^n(K, J_2)$, in $\mathfrak{L}(K', J_2)$.

Ist ein Homomorphismus V *dimensionstreu*, d. h. bildet er für jede vorkommende Dimensionszahl n jede n-Kette auf eine n-Kette ab, so ist auch V^* dimensionstreu, d. h. bildet n-Funktionen auf n-Funktionen ab. Unter einer *Homologie-Abbildung* von K in K' verstehen wir einen dimensionstreuen Homomorphismus Φ der ganzzahligen Kettengruppe $\mathfrak{L}(K, \mathfrak{A})$ in $\mathfrak{L}(K', \mathfrak{A})$, für welchen $\partial\Phi = \Phi\partial$ ist, d. h. $\partial\Phi a = \Phi\partial a$ für jede ganzzahlige Kette a; wir sagen, Φ sei *mit ∂ vertauschbar*. Φ ist gegeben, wenn für jedes n und jede n-Zelle c^n von K die ganzzahlige n-Kette Φc^n bekannt ist. Wir setzen bei beliebigem J für jede Kette $a^n = \Sigma\, \tau_i c_i^n \in \mathfrak{L}^n(K, J)$

$$\Phi\, a^n = \sum_i \tau_i \Phi c_i^n \;;$$

dadurch wird Φ zu einem mit ∂ vertauschbaren dimensionstreuen Homomorphismus von $\mathfrak{L}(K, J)$ in $\mathfrak{L}(K', J)$. Es gilt dann für jedes n $\Phi\mathfrak{H}^n(K, J) \subset \mathfrak{H}^n(K', J)$ und $\Phi\mathfrak{Z}^n(K, J) \subset \mathfrak{Z}^n(K', J)$; Φ induziert somit für $n = 1, 2, \ldots$ einen Homomorphismus von $\mathfrak{B}^n(K, J)$ in $\mathfrak{B}^n(K', J)$.

Ist Φ eine Homologie-Abbildung von K in K', so ist bei beliebigem J der zum Homomorphismus Φ von $\mathfrak{L}(K, \mathfrak{A})$ in $\mathfrak{L}(K', \mathfrak{A})$ duale Homomorphismus Φ^* von $L(K', J)$ in $L(K, J)$ erklärt; er ist dimensionstreu und mit δ vertauschbar. Es gilt also für jedes n $\Phi^* H^n(K', J) \subset H^n(K, J)$, $\Phi^* Z^n(K', J) \subset Z^n(K, J)$, und Φ^* induziert somit für $n = 0, 1, \ldots$ einen Homomorphismus von $B^n(K', J)$ in $B^n(K, J)$. Wir nennen Φ^* die zu Φ duale Cohomologie-Abbildung von K' in K.

4.9. *Produktbildung im Komplex K.* Wir legen den Funktionen- und Cohomologiegruppen hier (es treten keine Ketten auf) einen Ring J mit Einselement 1 zugrunde. Für jede Funktion $f^n \in L^n(K, J)$ und jedes Element $\tau \in J$ verstehen wir unter τf^n bzw. $f^n \tau$ die Funktion, die man erhält, wenn man die Funktionswerte von f^n alle von links bzw. rechts mit τ multipliziert. e^0 sei die durch $e^0(c^0) = 1$ für alle 0-Zellen definierte 0-Funktion; τe^0 ist dann eine „konstante" 0-Funktion (vgl. 4.6), also ein Cozyklus, und für $\tau \neq 0$ nicht 0, auch kein Corand, da $H^0 = 0$ ist.

Unter einem $\cup$-*Produkt* ("cup"-Produkt) in K versteht man[13]) eine

[13]) Vgl. [9], S. 432 ff., auch wegen allgemeinerer Wahl der Koeffizienten; für unsere Zwecke genügt der Ring J.

Vorschrift, welche bei beliebigem Koeffizientenring J je zwei Funktionen f^n und g^k von beliebigen Dimensionen n und k eine $(n+k)$-Funktion $f^n \cup g^k = h^{n+k}$ zuordnet, derart daß die Axiome erfüllt sind:

I. Distributivgesetz bezüglich der Addition der Funktionen.

II. Assoziativgesetz.

III. $\delta(f^n \cup g^k) = \delta f^n \cup g^k + (-1)^n f^n \cup \delta g^k$.

IV. $\tau e^0 \cup g^k = \tau g^k$ und $f^n \cup \tau e^0 = f^n \tau$.

Aus III folgt leicht (genau wie in 3.3), daß dann auch ein $\cup$-Produkt für Cohomologieklassen beliebiger Dimensionen definiert ist; es macht die direkte Summe aller Cohomologiegruppen $B^n(K,J)$ zu einem Ring mit Einselement $R(K,J)$, dem *Cohomologiering des Komplexes K bezüglich J*. Das Einselement ist die Cohomologieklasse, die aus e^0 besteht.

§ 5. Simplizialer Komplex.

5.1. Einem endlichen oder unendlichen *simplizialen Komplex*[14]) K ordnen wir in folgender Weise einen rand-endlichen abstrakten Komplex K (§ 4) zu: Die n-Zellen von K sind für $n = 0$ die Eckpunkte von K, für $n > 0$ die beliebig, aber fest orientierten n-dimensionalen Simplexe

$$c^n = [u_0, u_1, \ldots, u_n] \tag{8}$$

von K (dabei bedeuten $u_0, u_1, \ldots, u_n$ die Eckpunkte des betr. Simplexes, und die in (8) angeschriebene Reihenfolge entspricht der *positiven* Orientierung; ist $i_0, i_1, \ldots, i_n$ eine Permutation von $0, 1, \ldots, n$, so bedeutet das Symbol $[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}]$ die Kette $+c^n$ oder $-c^n$, je nachdem es sich um eine gerade oder ungerade Permutation handelt). Die Randbildung ∂ ist durch $\partial c^0 = 0$ und

$$\partial c^n = \partial[u_0, u_1, \ldots, u_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [u_0, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_n] = \sum_j \eta_j c_j^{n-1}$$

für $n > 0$ gegeben; rechts steht eine endliche ganzzahlige Kette, und es ist $\partial\partial = 0$. Die Bedingungen (a) und (b) aus 4.1 sind erfüllt. — Wir sagen gelegentlich, K sei eine „Orientierung" von K. Man kann die Orientierung auf verschiedene Arten wählen; die Homologie- und Cohomologie-

---

[14]) Darunter verstehen wir einen endlich-dimensionalen simplizialen Komplex im Sinne von [11], S. 155 ff.; ein solcher läßt sich geometrisch realisieren, ist also Simplizialzerlegung eines (Euklidischen oder krummen) Polyeders.

gruppen von K haben aber stets dieselbe Struktur und dürfen deshalb mit $\mathfrak{B}^n(\mathsf{K},J)$ und $B^n(\mathsf{K},J)$ bezeichnet werden — es sind die üblichen (nicht-topologisierten) Homologie- und Cohomologiegruppen des simplizialen Komplexes K.

5.2. *Das* $\cup$*-Produkt in* K. In simplizialen Komplexen kann man bekanntlich[15]) stets ein $\cup$-Produkt (4.9) einführen. Man wählt in jedem Simplex von K eine *feste Reihenfolge seiner Eckpunkte*, und zwar so, daß im Durchschnitt zweier Simplexe die Reihenfolge übereinstimmt, und verwendet nur noch Symbole $[u_0, u_1, \ldots, u_n] = \pm c^n$, in denen die Eckpunkte u_i in der vorgeschriebenen Reihenfolge stehen. Dann setzt man für zwei Funktionen f^n und g^k in K und ein beliebiges $(n+k)$-Simplex $[u_0, u_1, \ldots, u_{n+k}] = \pm c^{n+k}$

$$f^n \cup g^k\big([u_0, u_1, \ldots, u_{n+k}]\big) = f^n\big([u_0, u_1, \ldots, u_n]\big) \cdot g^k\big([u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k}]\big)$$

dadurch ist $f^n \cup g^k$ für alle c^{n+k} definiert, und man verifiziert leicht, daß die Axiome I—IV (4.9) erfüllt sind. Der resultierende Cohomologiering ist bekanntlich[15]) von der Orientierung und von der gewählten Eckpunktreihenfolge unabhängig und darf deshalb mit $R(\mathsf{K},J)$ bezeichnet werden.

5.3. *Simpliziale Abbildung.* Es seien K und K_1 zwei simpliziale Komplexe, K und K_1 „Orientierungen“ (5.1) von K bzw. K_1. Φ sei eine simpliziale Abbildung von K in K_1. Ist $c^n = [u_0, u_1, \ldots, u_n]$ ein orientiertes Simplex von K (eine Zelle von K), und ordnet man ihm das orientierte Simplex $[\Phi u_0, \Phi u_1, \ldots, \Phi u_n] = \pm c_1^n$ von K_1 zu, falls die Bilder Φu_i der Eckpunkte u_i alle verschieden sind, andernfalls die Kette 0 (Ausartung), so entsteht bekanntlich eine Homologie-Abbildung (4.8) von K in K_1, die ebenfalls mit Φ bezeichnet werden soll.

Hat man überdies die Eckpunktreihenfolge der Simplexe (5.2) in beiden Komplexen so gewählt, daß sie bei der simplizialen Abbildung erhalten bleibt — das ist immer möglich, wenn man zuerst die Reihenfolge in K_1 festsetzt — so ist die zu Φ duale Cohomologie-Abbildung Φ^* (4.8) von K_1 in K auch $\cup$-produkthomomorph[16]), induziert also einen dimensionstreuen Ringhomomorphismus des Cohomologieringes von K_1 in denjenigen von K; dieser Homomorphismus ist von den Orientierungen und von der in K_1 gewählten Eckpunktreihenfolge unabhängig. Es gehört somit zu einer simplizialen Abbildung von K in K_1 ein wohlbestimmter Ringhomomorphismus von $R(\mathsf{K}_1,J)$ in $R(\mathsf{K},J)$.

[15]) Vgl. [8] oder [6], S. 405; ferner [9], S. 436.

[16]) Vgl. [6], S. 406, Theorem 7.

§ 6. Automorphismengruppe und Überlagerung.

6.1. K sei ein rand-endlicher abstrakter Komplex (§ 4). Unter einem *Automorphismus*[17]) von K verstehen wir eine dimensionstreue Permutation x aller Zellen von K, bei welcher „der Rand erhalten bleibt"; diese Bedingung bedeutet, daß der durch die Permutation definierte Homomorphismus der ganzzahligen Kettengruppe $\mathfrak{L}(K, \mathfrak{A})$ in sich, der ebenfalls mit x bezeichnet wird, mit ∂ vertauschbar, also eine Homologie-Abbildung von K in sich ist (4.8). Die zu x duale Cohomologie-Abbildung wird gemäß 4.8 mit x^* bezeichnet. x bildet alle Gruppen $\mathfrak{L}^n(K,J)$, $\mathfrak{Z}^n(K,J)$ und $\mathfrak{H}^n(K,J)$, x^* alle Gruppen $L^n(K,J)$, $Z^n(K,J)$ und $H^n(K,J)$ isomorph auf sich ab. Zu jedem Automorphismus x existiert ein inverser Automorphismus x^{-1}.

6.2. Es sei eine *Gruppe* $\mathfrak{G}$ *von Automorphismen* des Komplexes $\overline{K}$ gegeben. Die Gesamtheit aller Zellen von $\overline{K}$ zerfällt in *Transitivitäts-bereiche* gegenüber $\mathfrak{G}$: zwei Zellen gehören zu demselben Bereich, wenn es einen Automorphismus $x \epsilon \mathfrak{G}$ gibt, welcher die eine in die andere überführt. Alle Zellen eines Bereiches haben dieselbe Dimension.

Wir definieren nun einen neuen (rand-endlichen abstrakten) Komplex K. Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ wählen wir als n-Zellen c^n von K die n-dimensionalen Transitivitätsbereiche von $\overline{K}$ gegenüber $\mathfrak{G}$ (oder ihnen eineindeutig zugeordnete Dinge). Es besteht dann eine natürliche Abbildung U von $\overline{K}$ auf K: Man ordne jeder Zelle $\bar{c}^n$ von $\overline{K}$ den Transitivitätsbereich $c^n = U\bar{c}^n$ zu, welcher sie enthält. Für $x \epsilon \mathfrak{G}$ und für alle Zellen $\bar{c}^n$ von $\overline{K}$ gilt $Ux\bar{c}^n = U\bar{c}^n$, und, wenn man U linear zu einem Homomorphismus der Kettengruppen von $\overline{K}$ auf diejenigen von K erweitert, für jede Kette $\bar{a}^n$ von $\overline{K}$

$$Ux\bar{a}^n = U\bar{a}^n \ ,$$

d. h. es ist $Ux = U$ für alle $x \epsilon \mathfrak{G}$. — Wir sagen, $\overline{K}$ sei eine (abstrakte) *Überlagerung von* K *mit der Automorphismengruppe* $\mathfrak{G}$; U heißt die *Überlagerungsabbildung* von $\overline{K}$ auf K.

Wir haben noch die Randbildung in K zu erklären. Ist c^n eine beliebige Zelle von K, $\bar{c}^n$ eine Zelle von $\overline{K}$ mit $U\bar{c}^n = c^n$, so setzen wir

$$\partial c^n = U\partial\bar{c}^n \ . \tag{11}$$

---

[17]) Zu diesem Begriff vgl. [2], S. 50 und die in [2] angegebene Literatur.

Die rechte Seite von (11) hängt tatsächlich nur von c^n und nicht von der Auswahl von $\bar{c}^n$ ab; denn ist $U\bar{c}^n = U\bar{c}_1^n$, d. h. gehören $\bar{c}^n$ und $\bar{c}_1^n$ zu demselben Transitivitätsbereich, so gibt es ein x mit $\bar{c}_1^n = x\bar{c}^n$, und es ist

$$U\partial\bar{c}_1^n = U\partial x\bar{c}^n = Ux\partial\bar{c}^n = U\partial\bar{c}^n \ .$$

(11) läßt sich auch in der Form $\partial U\bar{c}^n = U\partial\bar{c}^n$ schreiben; die Randbildung ∂ in K ist also so gewählt, daß U eine *Homologie-Abbildung von* $\bar{K}$ *in* K ist.

Für jede Zelle $c^n = U\bar{c}^n$ von K ist $\partial\partial c^n = \partial\partial U\bar{c}^n = U\partial\partial\bar{c}^n = 0$; die Bedingung $\partial\partial = 0$ ist also in K erfüllt. Ebenso sind (a) und (b) aus 4.1 in K erfüllt, weil sie es in $\bar{K}$ sind: (a) ist klar, und (b) ergibt sich so: Für jede 1-Zelle $c^1 = U\bar{c}^1$ von K ist $\partial c^1 = U\partial\bar{c}^1 = U\Sigma\nu_i\bar{c}_i^0 = \Sigma\nu_i U\bar{c}_i^0$ mit $\Sigma\nu_i = 0$; da die $U\bar{c}_i^0$ 0-Zellen von K sind, ist also die Koeffizientensumme von ∂c^1 gleich 0.

Für alle n und jeden Koeffizientenbereich J ist $U\mathfrak{L}^n(\bar{K},J) = \mathfrak{L}^n(K,J)$, d. h. U ist eine Abbildung von $\bar{K}$ *auf* K; daraus folgt $U\mathfrak{H}^n(\bar{K},J) = U\partial\mathfrak{L}^{n+1}(\bar{K},J) = \partial U\mathfrak{L}^{n+1}(\bar{K},J) = \partial\mathfrak{L}^{n+1}(K,J) = \mathfrak{H}^n(K,J)$. Ferner sieht man leicht, daß $U\mathfrak{Z}^{00}(\bar{K},J) = \mathfrak{Z}^{00}(K,J)$ ist.

6.3. Eine Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von $\bar{K}$ heißt *fixpunktfrei*[18]), wenn außer der Identität e jeder Automorphismus $x \in \mathfrak{G}$ keine Zelle von $\bar{K}$ festläßt. In diesem Falle gilt für jede Zelle $\bar{c}^n$ von $\bar{K}$: Aus $x\bar{c}^n = y\bar{c}^n$ folgt $x^{-1}y\bar{c}^n = \bar{c}^n$, also $x^{-1}y = e$, also $x = y$. Man erhält somit in der Form $x\bar{c}^n$ jede Zelle des Transitivitätsbereiches von $\bar{c}^n$ genau einmal, wenn x die Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft.

6.4. *Reguläre Überlagerung eines simplizialen Komplexes.* K sei ein simplizialer Komplex (eine Simplizialzerlegung eines Polyeders[14])), $\bar{\mathsf{K}}$ ein regulärer Überlagerungskomplex von K im üblichen Sinne[2]). Diese Überlagerung kann in bekannter Weise mit Hilfe eines Normalteilers $\mathfrak{N}$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von K konstruiert werden; es gehört zu ihr eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von Decktransformationen[2]), die zur Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ isomorph ist. Unter den *Decktransformationen* $x \in \mathfrak{G}$ versteht man eineindeutige simpliziale Abbildungen von $\bar{\mathsf{K}}$ auf sich, welche für jeden Eckpunkt u von K die ihn überlagernden Eckpunkte $\bar{u}_j$ von $\bar{\mathsf{K}}$ permutieren. Die Überlagerungsabbildung U ist die simpliziale Abbildung von $\bar{\mathsf{K}}$ auf K, die jedem Eckpunkt $\bar{u}$ von $\bar{\mathsf{K}}$ den von ihm überlagerten Eckpunkt u von K zuordnet.

Wir orientieren nun die Simplexe von K und $\bar{\mathsf{K}}$ und gehen zu den

---

[18]) Erläuterung dieser Bezeichnung s. [2], S. 52.

abstrakten Komplexen K bzw. $\overline{K}$ über, deren Zellen die positiv orientierten Simplexe sind (vgl. 5.1). Und zwar orientieren wir die Simplexe von K beliebig, diejenigen von $\overline{\mathsf{K}}$ so, daß die simpliziale Abbildung U die Orientierung erhält, d. h. positive Simplexe auf positive abbildet (Ausartungen kommen nicht vor). In diesem Fall erhalten auch alle Decktransformationen $x \in \mathfrak{G}$ die Orientierung: Ein orientiertes Simplex $\bar{c}^n = [\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n]$ von $\overline{\mathsf{K}}$ und $x\bar{c}^n = [x\bar{u}_0, x\bar{u}_1, \ldots, x\bar{u}_n]$ haben dasselbe U-Bild $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ in K mit $u_i = U\bar{u}_i = Ux\bar{u}_i$, somit dieselbe Orientierung. Die Decktransformationen bedeuten also (dimensionstreue und randtreue) Permutationen der positiv orientierten Simplexe von $\overline{\mathsf{K}}$, d. h. der Zellen von $\overline{K}$; es sind somit Automorphismen von $\overline{K}$. $\mathfrak{G}$ läßt sich also als *Automorphismengruppe von* $\overline{K}$ auffassen, die übrigens *fixpunktfrei* ist[2]); offenbar erzeugt sie im Sinne von 6.2 als überlagerten Komplex gerade den Komplex K, und U ist die zugehörige Überlagerungsabbildung.

In dieser Weise ist die geometrische reguläre Überlagerung eines Polyeders in unserem abstrakten Begriff der Überlagerung (6.2) enthalten.

6.5. Es sei weiterhin $\overline{\mathsf{K}}$ eine reguläre Überlagerung des simplizialen Komplexes K, mit der Decktransformationengruppe $\mathfrak{G}$ und der Überlagerungsabbildung U. In K sei, zum Zwecke der $\cup$-Produktbildung, für jedes Simplex eine Eckpunktreihenfolge ausgezeichnet (vgl. 5.2). Dann wähle man in den Simplexen von $\overline{\mathsf{K}}$ die Eckpunktreihenfolge so, *daß sie bei U erhalten bleibt*; d. h. ist $\bar{c}^n = [\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n]$ ein in der richtigen Reihenfolge angeschriebenes (orientiertes) Simplex von $\overline{\mathsf{K}}$, dann ist $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$, mit $u_i = U\bar{u}_i$, ein ebensolches von K (die zu U duale Cohomologie-Abbildung U^* ist dann $\cup$-produkthomomorph, vgl. 5.3). *Dann bleibt die Eckpunktreihenfolge bei allen Decktransformationen $x \in \mathfrak{G}$ erhalten*: Mit $\bar{c}^n = [\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n]$ ist auch $x\bar{c}^n = [x\bar{u}_0, x\bar{u}_1, \ldots, x\bar{u}_n]$ in der richtigen Reihenfolge angeschrieben, weil beide durch U auf $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$, mit $u_i = U\bar{u}_i = Ux\bar{u}_i$, abgebildet werden.

§ 7. Die Cohomologiegruppen des überlagerten Komplexes.

Wir zeigen in diesem Paragraphen, wie sich die Cohomologiegruppen $B^n(K, J)$ eines Komplexes K in einer Überlagerung $\overline{K}$ von K durch geeignete Gruppen von Funktionen beschreiben lassen; dabei ist in natürlicher Weise eine Untergruppe $B_0^n(K, J)$ von $B^n(K, J)$ — bzw. ein Teilring $R_0(K, J)$ des Cohomologieringes $R(K, J)$ — ausgezeichnet. Die Ergebnisse werden beim Beweis der Hauptsätze (Abschnitt IV) verwendet.

7.1. Es sei K ein rand-endlicher Komplex, $\overline{K}$ eine Überlagerung von K mit der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$, U die zugehörige Überlagerungsabbildung (vgl. 6.2). U ist eine Homologie-Abbildung von $\overline{K}$ auf K; U^* sei die dazu duale Cohomologie-Abbildung von K in $\overline{K}$ (4.8). Nach 6.2 gilt für jeden Automorphismus $x \in \mathfrak{G}$ die Beziehung $Ux = U$, somit auch $x^* U^* = U^*$.

Der Koeffizientenbereich J sei beliebig, n eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$. Wir setzen zur Abkürzung $L^n = L^n(K,J)$ und $\overline{L}^n = L^n(\overline{K}, J)$. *$U^*$ bildet L^n isomorph in $\overline{L}^n$ ab;* denn wenn für eine Funktion $f^n \in L^n$ gilt $U^* f^n = 0$, so folgt $U^* f^n(\overline{c}^n) = f^n(U\overline{c}^n) = 0$ für alle $\overline{c}^n$, also $f^n(c^n) = 0$ für alle c^n, d. h. $f^n = 0$. Wir bezeichnen das Bild $U^* L^n \subset \overline{L}^n$ mit $\overline{L}_0^n$.

7.2. *Die Untergruppe $\overline{L}_0^n$ von $\overline{L}^n$ besteht aus denjenigen Funktionen $\overline{f}^n \in \overline{L}^n$, die gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant sind.* Dabei nennen wir eine Funktion $\overline{f}^n$ invariant, wenn für jedes $x \in \mathfrak{G}$ gilt $x^* \overline{f}^n = \overline{f}^n$, d. h. $\overline{f}^n(x\overline{c}^n) = \overline{f}^n(\overline{c}^n)$ für jede Zelle $\overline{c}^n$ von $\overline{K}$.

Beweis. a) Wenn $\overline{f}^n = U^* f^n$ ist, so gilt $x^* \overline{f}^n = x^* U^* f^n = U^* f^n = \overline{f}^n$. b) Es sei $x^* \overline{f}^n = \overline{f}^n$, d. h. $\overline{f}^n(x\overline{c}^n) = \overline{f}^n(\overline{c}^n)$ für jede Zelle $\overline{c}^n$ von $\overline{K}$, dies für alle $x \in \mathfrak{G}$. Dann kann man durch $f^n(U\overline{c}^n) = \overline{f}^n(\overline{c}^n)$ eine Funktion $f^n \in L^n$ definieren, für welche $U^* f^n = \overline{f}^n$ ist.

7.3. Wir verfolgen beim Isomorphismus U^* von L^n in $\overline{L}^n$ (auf $\overline{L}_0^n$) die Cozyklen und Coränder. Zur Abkürzung sei $Z^n = Z^n(K,J)$, $\overline{Z}^n = Z^n(\overline{K}, J)$, $H^n = H^n(K,J)$ und $\overline{H}^n = H^n(K,J)$ geschrieben.

Natürlich ist $U^* Z^n$ im Durchschnitt $\overline{Z}^n \cap \overline{L}_0^n$ von $\overline{Z}^n$ und $\overline{L}_0^n$ enthalten. Umgekehrt sei $\overline{f}^n \in \overline{Z}^n \cap \overline{L}_0^n$, d. h. $\delta\overline{f}^n = 0$ und $\overline{f}^n = U^* f^n$; dann folgt $\delta U^* f^n = U^* \delta f^n = 0$, also, weil U^* isomorph ist, $\delta f^n = 0$ und somit $\overline{f}^n \in U^* Z^n$. Es ist also

$$U^* Z^n = \overline{Z}^n \cap \overline{L}_0^n \,. \tag{9}$$

Ferner ist

$$U^* H^n = U^* \delta L^{n-1} = \delta U^* L^{n-1} = \delta \overline{L}_0^{n-1} \,.$$

Man erhält also für die Cohomologiegruppe $B^n(K,J)$ die Isomorphie

$$B^n(K,J) \cong \overline{Z}^n \cap \overline{L}_0^n / \delta \overline{L}_0^{n-1} \,. \tag{10}$$

7.4. *Die Gruppe B_0^n.* U^* bewirkt einen Homomorphismus von $B^n(K,J)$ in $B^n(\overline{K}, J)$. Sein *Kern* sei mit $B_0^n(K,J)$ bezeichnet; das ist die folgendermaßen charakterisierte Untergruppe von $B^n(K,J)$: Ein Cozyklus $f^n \in Z^n$ repräsentiert dann und nur dann ein Element von $B_0^n(K,J)$, wenn $U^* f^n \in \overline{H}^n$ ist. Alle derartigen Cozyklen werden beim

Isomorphismus U^* von L^n auf $\overline{L}_0^n$ auf die Untergruppe $\overline{H}^n \cap \overline{L}_0^n$ von $\overline{Z}^n \cap \overline{L}_0^n$ abgebildet. Es gilt also

$$B_0^n(K,J) \cong \overline{H}^n \cap \overline{L}_0^n / \delta \overline{L}_0^{n-1} . \tag{11}$$

Wegen $\overline{H}^0 = 0$ ist offenbar $B_0^0(K,J) = 0$.

7.5. Als Koeffizientenbereiche für die Cohomologie- und die Homologiegruppen wählen wir jetzt zwei Abelsche Gruppen J_1 und J_2, die bezüglich J ein Paar bilden (und zwar einen der Fälle (1), (2), (3) aus 3.4). Der Kroneckersche Index (4.3) ist in K und $\overline{K}$ erklärt; er macht $B^n(K,J_1)$ und $\mathfrak{B}^n(K,J_2)$ zu einem Paar bezüglich J. Wir schreiben $B^n = B^n(K,J_1), \mathfrak{B}^n = \mathfrak{B}^n(K,J_2)$, $\overline{\mathfrak{B}}^n = \mathfrak{B}^n(\overline{K}, J_2)$ usw. und setzen $n \geqslant 1$.

U bewirkt einen (ebenfalls mit U bezeichneten) Homomorphismus von $\overline{\mathfrak{B}}^n$ in $\mathfrak{B}^n$. *Das Bild* $U\overline{\mathfrak{B}}^n \subset \mathfrak{B}^n$ *wird durch* B_0^n *annulliert*, d. h. der Kroneckersche Index eines Elementes von B_0^n und eines solchen von $U\overline{\mathfrak{B}}^n$ ist stets $= 0$. In der Tat gilt für einen Cozyklus f^n, der einer Cohomologieklasse aus B_0^n angehört, und einen Zyklus $\overline{a}^n \in \overline{\mathfrak{Z}}^n$

$$f^n(U\overline{a}^n) = U^*f^n(\overline{a}^n) = \delta g^{n-1}(\overline{a}^n) = g^{n-1}(\partial \overline{a}^n) = 0 .$$

Wir wollen untersuchen, ob sich die Untergruppe B_0^n von B^n durch diese Eigenschaft charakterisieren läßt. Es sei also f^n ein Cozyklus in K, derart, daß $f^n(U\overline{a}^n) = 0$ ist für jeden Zyklus $\overline{a}^n \in \overline{\mathfrak{Z}}^n$; ist dann $U^*f^n \in \overline{H}^n$? Da $U^*f^n(\overline{a}^n) = 0$ ist für alle Zyklen $\overline{a}^n$, ist der Wert von $U^*f^n(\overline{b}^n)$ konstant, wenn $\overline{b}^n$ eine Restklasse von $\overline{\mathfrak{L}}^n$ nach $\overline{\mathfrak{Z}}^n$ durchläuft; er definiert also, weil $\overline{\mathfrak{L}}^n/\overline{\mathfrak{Z}}^n$ zu $\overline{\mathfrak{H}}^{n-1}$ isomorph ist, einen Homomorphismus h von $\overline{\mathfrak{H}}^{n-1}$ in J, wenn man

$$h(\partial \overline{b}^n) = U^*f^n(\overline{b}^n)$$

setzt für alle $\overline{b}^n \in \overline{\mathfrak{L}}^n$. *Wenn man diesen Homomorphismus* h *von* $\overline{\mathfrak{H}}^{n-1}$ *in* J *zu einem solchen von* $\overline{\mathfrak{L}}^{n-1}$ *in* J *erweitern kann*, dann gehört zu ihm eine $(n-1)$-Funktion $\overline{g}^{n-1}$ (vgl. 4.3), für welche

$$\overline{g}^{n-1}(\partial \overline{b}^n) = U^*f^n(\overline{b}^n) , \qquad \text{also} \qquad \delta \overline{g}^{n-1}(\overline{b}^n) = U^*f^n(\overline{b}^n)$$

ist für alle $\overline{b}^n \in \overline{\mathfrak{L}}^n$, also $U^*f^n = \delta \overline{g}^{n-1}$, d. h. $U^*f^n \in \overline{H}^n$, und f^n gehört zu einer Cohomologieklasse von B_0^n.

Die genannte Erweiterung des Homomorphismus h ist insbesondere dann möglich, wenn $\overline{\mathfrak{B}}_I^{n-1} = 0$ ist[19]) ($\overline{\mathfrak{B}}_I^{n-1} \subset \overline{\mathfrak{B}}^{n-1}$ ist die Homologiegruppe erster Art, vgl. 4.8). Dies bedeutet nämlich für $n \geqslant 2$, daß $\overline{\mathfrak{H}}^{n-1}$ gleich der Gruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_I^{n-1}$ der Zyklen erster Art ist, für $n = 1$, daß $\overline{\mathfrak{H}}^0$ gleich der Gruppe $\overline{\mathfrak{Z}}^{00}$ der 0-Ketten mit verschwindender Koeffizientensumme ist (4.2); in beiden Fällen also nach 4.7, daß $\overline{\mathfrak{H}}^{n-1}$ direkten Summand in $\overline{\mathfrak{L}}^{n-1}$ ist. Also:

7.6. *Hilfssatz. Wenn für ein* $n \geqslant 1$ $\mathfrak{B}_I^{n-1}(\overline{K}, J_2) = 0$ *ist, dann ist die Untergruppe* $B_0^n(K, J_1)$ *von* $B^n(K, J_1)$ *dadurch charakterisiert, daß sie* $U\mathfrak{B}^n(\overline{K}, J_2)$ *annulliert.*

Korollar. Wenn für ein $n \geqslant 1$ $\mathfrak{B}^{n-1}(\overline{K}, J_2) = \mathfrak{B}^n(\overline{K}, J_2) = 0$ *ist, dann ist* $B_0^n(K, J_1)$ *gleich der ganzen Gruppe* $B^n(K, J_1)$.

7.7. *Der Ring* R_0. Wir nehmen jetzt an, daß in K und in $\overline{K}$ ein $\cup$-Produkt definiert und daß die Cohomologie-Abbildung U^* von K in $\overline{K}$ $\cup$-produkthomomorph ist; dann bewirkt sie, wenn J ein Ring mit Einselement ist, einen Ringhomomorphismus von $R(K,J)$ in $R(\overline{K},J)$, dessen *Kern* ein Ideal (also ein Teilring) $R_0(K,J)$ von $R(K,J)$ ist. Seiner additiven Struktur nach ist der Ring R_0 die direkte Summe der Gruppen B_0^n, $n = 1, 2, \ldots$ (vgl. 7.4). Beim Isomorphismus U^* von L^n in $\overline{L}^n$ wird jede Cohomologieklasse $\epsilon\, B_0^n$ auf eine Restklasse von $\overline{H}^n \cap \overline{L}_0^n$ modulo $\delta \overline{L}_0^{n-1}$ abgebildet; daraus folgt, daß das $\cup$-Produkt in $\overline{K}$ für die Restklassen von $\overline{H}^n \cap \overline{L}_0^n$ modulo $\delta \overline{L}_0^{n-1}$, also die Elemente der Gruppen $\overline{H}^n \cap \overline{L}_0^n / \delta \overline{L}_0^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, ein Produkt definiert, welches die direkte Summe der $\overline{H}^n \cap \overline{L}_0^n / \delta \overline{L}_0^{n-1}$ zu einem Ring $S(\overline{K}, J)$ macht, und dieser ist zu R_0 isomorph.

$R_0(K,J)$ *ist dimensionstreu isomorph zu dem Ring* $S(\overline{K},J)$, *der seiner additiven Struktur nach die direkte Summe der Gruppen* $\overline{H}^n \cap \overline{L}_0^n / \delta \overline{L}_0^{n-0}$ *ist, und dessen multiplikative Struktur durch das* $\cup$*-Produkt in* $\overline{K}$ *gegeben ist.*

Bemerkung: Ist K ein simplizialer Komplex, $\overline{\mathsf{K}}$ eine reguläre Überlagerung von K, so ist der Ringhomomorphismus U^* von $R(\mathsf{K},J)$ in $R(\overline{\mathsf{K}},J)$ von der in K gewählten Numerierung der Eckpunkte und Orientierung der Simplexe unabhängig (vgl. 5.3); dasselbe gilt also auch für den Kern $R_0(\mathsf{K},J)$ von U^*.

III. Der zur Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörige abstrakte Komplex

Jeder beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ ordnen wir hier einen Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ zu, welcher eine Überlagerung $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher Automorphismen-

[19]) Diese Bedingung wird später auftreten. Natürlich ist die Erweiterung bei geeigneter Wahl der Koeffizienten auch in anderen Fällen möglich.

gruppe besitzt. $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ ist azyklisch, d. h. seine Homologiegruppen sind alle 0. Der im Abschnitt I beschriebene Ring $P(\mathfrak{G},J)$ ist der Cohomologiering des Komplexes K.

§ 8. Der Komplex $K_{\mathfrak{G}}$.

8.1. $\mathfrak{G}$ sei wie im Abschnitt I eine beliebige, multiplikativ geschriebene Gruppe. Wir konstruieren von ihr ausgehend einen rand-endlichen abstrakten Komplex (Definition in § 4) $K_{\mathfrak{G}}$, indem wir festsetzen:

Die n-Zellen von $K_{\mathfrak{G}}$ sind für $n \geqslant 1$ die geordneten Systeme

$$c^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{12}$$

von n Elementen $x_i \in \mathfrak{G}$. Es gibt eine einzige 0-Zelle c^0 (das leere System). Der Rand ∂c^n der Zelle $c^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wird für $n \geqslant 2$ durch

$$\begin{aligned} \partial c^n &= \partial(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= (x_1^{-1} x_2, \ldots, x_1^{-1} x_n) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{13}$$

definiert (Bedeutung von $\hat{x}_i$ s. 1.2); für $n = 0$ und 1 setzen wir $\partial c^0 = 0$ und $\partial c^1 = 0$. Die Bedingungen (a) und (b) aus 4.1 sind erfüllt. Wir haben zu verifizieren:

Für jede Zelle c^n ist $\partial\partial c^n = 0$.

Beweis. Für $n \leqslant 2$ ist nichts zu zeigen. Es sei $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned} &\partial\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= \partial(x_1^{-1} x_2, \ldots, x_1^{-1} x_n) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \partial(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) = \\ &= (x_2^{-1} x_3, \ldots, x_2^{-1} x_n) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-1} (x_1^{-1} x_2, \ldots, \widehat{x_1^{-1} x_i}, \ldots, x_1^{-1} x_n) \\ &\quad -(x_2^{-1} x_3, \ldots, x_2^{-1} x_n) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i (x_1^{-1} x_2, \ldots, \widehat{x_1^{-1} x_i}, \ldots, x_1^{-1} x_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Bigg[\sum_{k=1}^{i=1} (-1)^k (x_1, \ldots, \hat{x}_k, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) + \\ &\qquad\qquad + \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{k-1} (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_k, \ldots, x_n) \Bigg] . \end{aligned}$$

Das letzte Glied $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i [\ldots]$ erweist sich leicht als 0; also ist $\partial\partial c^n = 0$.

8.2. Eine n-Funktion f^n im Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ ist eine Funktion aller n-Zellen $c^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit Werten im Koeffizientenbereich J; dieser Begriff läßt sich offenbar identifizieren mit dem der n-Funktion, den wir in 1.1 betrachtet haben; es ist also $L^n(\mathfrak{G}, J) = L^n(K_{\mathfrak{G}}, J)$. Ebenso sieht man, daß die Corandbildung in $K_{\mathfrak{G}}$

$$\delta f^n(c^{n+1}) = f^n(\partial c^{n+1}) = f^n\big(\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\big)$$

auf Grund von (13) mit derjenigen in 1.1 identisch ist. Da in jedem Komplex $\delta\delta = 0$ ist, haben wir damit den Beweis der Behauptung 1.4 nachgeholt, und es ist für alle $n \geqslant 0$

$$\Gamma^n(\mathfrak{G}, J) = B^n(K_{\mathfrak{G}}, J) \ .$$

8.3. $\cup$-*Produkt in* $K_{\mathfrak{G}}$. Wir übernehmen die Definition eines $\cup$-Produktes in $K_{\mathfrak{G}}$ aus 3.1 und setzen für zwei Funktionen f^n und g^k und jede $(n+k)$-Zelle $c^{n+k} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+k})$

$$f^n \cup g^k(c^{n+k}) = f^n(x_1, \ldots, x_n) \cdot g^k(x_n^{-1} x_{n+1}, \ldots, x_n^{-1} x_{n+k}) \qquad (14)$$

und

$$f^0 \cup g^k(c^k) = f^0 \cdot g^k(c^k) \ , \quad f^n \cup g^0(c^n) = f^n(c^n) \cdot g^0 \ .$$

Aus 3.1 und 3.2 ist zu entnehmen, daß die Axiome I—IV (vgl. 4.9) erfüllt sind.

J sei ein Ring; der in § 3 definierte *Cohomologiering* $P(\mathfrak{G}, J)$ *der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist identisch mit dem Cohomologiering des Komplexes* $K_{\mathfrak{G}}$:

$$P(\mathfrak{G}, J) = R(K_{\mathfrak{G}}, J) \ .$$

Wir werden auch — bei beliebiger Koeffizientengruppe J — die Homologiegruppen $\mathfrak{B}^n(K_{\mathfrak{G}}, J)$ des Komplexes $K_{\mathfrak{G}}$ kurz die „Homologiegruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ bezüglich J" nennen und mit $\mathfrak{B}^n(\mathfrak{G}, J)$ bezeichnen.

8.4. *Die erste ganzzahlige Homologiegruppe* $\mathfrak{B}^1(\mathfrak{G}, J)$. Wir haben in 2.1 gesehen, daß $\Gamma^1(\mathfrak{G}, J)$ die Gruppe der Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ in die Abelsche Gruppe J ist; diese Homomorphismen lassen sich identifizieren mit denjenigen der Faktorgruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ nach ihrer Kommutatorgruppe (der „Abelsch gemachten Gruppe $\mathfrak{G}$") in J.

$\mathfrak{A}$ sei die additive Gruppe der ganzen Zahlen, $Ch\, \mathfrak{A} = \mathfrak{R}$ ihre Charakterengruppe, isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen modulo 1. Aus dem Dualitätssatz (4.5) ergibt sich: $\Gamma^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}) = B^1(K_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{R})$ ist isomorph zur Gruppe der Charaktere von $\mathfrak{B}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$. Andererseits ist $\Gamma^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$ die Gruppe der Homomorphismen von $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{R}$, d. h. der Charaktere von $\mathfrak{G}'$; aber daraus, daß die diskreten Gruppen $\mathfrak{B}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ und $\mathfrak{G}'$ isomorphe Charakterengruppen haben, folgt, daß sie selbst isomorph sind:

$\mathfrak{B}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ *ist isomorph zur Abelsch gemachten Gruppe* $\mathfrak{G}$.

§ 9. Der azyklische Komplex $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$.

9.1. Wir konstruieren zu der Gruppe $\mathfrak{G}$ einen zweiten abstrakten Komplex $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$. Es wird wie $K_{\mathfrak{G}}$ definiert durch Angabe seiner Zellen und der Randoperation ∂.

Die n-Zellen von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ sind für alle $n \geqslant 0$ die geordneten Systeme

$$\bar{c}^n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

von $n+1$-Elementen $x_i \in \mathfrak{G}$. Der Rand $\partial \bar{c}^n$ der Zelle $\bar{c}^n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ wird für $n \geqslant 1$ durch

$$\partial \bar{c}^n = \partial \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \{x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n\} \tag{15}$$

definiert, für $n = 0$ durch $\partial \bar{c}^0 = \partial\{x_0\} = 0$. Die Bedingungen (a) und (b) aus 4.1 und ebenso $\partial\partial \bar{c}^n = 0$ sind erfüllt, wie man leicht feststellt.

9.2. Ein Komplex K soll *„azyklisch in der Dimension n bezüglich des Koeffizientenbereiches J“* heißen, wenn $\mathfrak{B}^n(K, J) = 0$ ist; dies bedeutet für $n \geqslant 1$, daß jeder n-Zyklus ein Rand ist, für $n = 0$, daß jeder 0-Zyklus mit verschwindender Koeffizientensumme ein Rand ist (vgl. 4.2).

Der Komplex $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ ist in allen Dimensionen und bezüglich jedes Koeffizientenbereiches J azyklisch.

Beweis. Ist x ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$, so verstehen wir für jede Zelle $\bar{c}^n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ unter $\{x, \bar{c}^n\}$ die $(n+1)$-Zelle $\{x, x_0, \ldots, x_n\}$ und für jede Kette $\bar{a}^n = \Sigma \tau_i \bar{c}_i^n$ unter $\{x, \bar{a}^n\}$ die $(n+1)$-Kette $\Sigma \tau_i \{x, \bar{c}_i^n\}$. Für $n \geqslant 1$ gilt dann

$$\partial \{x, \bar{c}^n\} = \bar{c}^n - \{x, \partial \bar{c}^n\} ,$$

also für jede n-Kette $\bar{a}^n$

$$\partial \{x, \bar{a}^n\} = \bar{a}^n - \{x, \partial \bar{a}^n\} ;$$

ist $\bar{a}^n$ ein Zyklus, so folgt $\bar{a}^n = \partial\{x, \bar{a}^n)\}$, d. h. $\bar{a}^n$ ist ein Rand. Für $n=0$ gilt $\partial\{x, \bar{c}^0\} = \bar{c}^0 - \{x\}$; ist $\bar{a}^0 = \Sigma\, \tau_i\, \bar{c}_i^0$, so wird

$$\partial\{x, \bar{a}^0\} = \Sigma\, \tau_i\, \partial\{x, \bar{c}_i^0\} = \Sigma\, \tau_i\, (\bar{c}_i^0 - \{x\}) = \bar{a}^0 - \Sigma\, \tau_i\, \{x\}\ ,$$

und ist $\Sigma\, \tau_i = 0$, so folgt $\bar{a}^0 = \partial\{x, \bar{a}^0\}$, d. h. $\bar{a}^0$ ist ein Rand.

9.3. $\cup$-*Produkt in* $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$. Für zwei Funktionen $\bar{f}^n$ und $\bar{g}^n$ in $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ und jede $(n+k)$-Zelle $\bar{c}^{n+k} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+k}\}$ setzen wir

$$\bar{f}^n \cup \bar{g}^k(\bar{c}^{n+k}) = \bar{f}^n(\{x_0, \ldots, x_n\}) \cdot \bar{g}^k(\{x_n, \ldots, x_{n+k}\})\ . \tag{16}$$

Daß die Axiome (vgl. 4.9) I, II und IV erfüllt sind ist klar. III ergibt sich so (wir lassen Funktionsklammern () bei Zellen $\{x_0, \ldots, x_n\}$ weg): $\bar{c}^{n+k+1} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+k+1}\}$ sei eine beliebige $(n+k+1)$ Zelle. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\delta(\bar{f}^n \cup \bar{g}^k)(\bar{c}^{n+k+1}) \\
&\quad = \bar{f}^n \cup \bar{g}^k(\partial\bar{c}^{n+k+1}) = \sum_{i=0}^{n+k+1} (-1)^i\, \bar{f}^n \cup \bar{g}^k\{x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+k+1}\} \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, \bar{f}^n\{x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}\} \cdot \bar{g}^k\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+k+1}\} \\
&\quad\ + \sum_{i=n+1}^{n+k+1} (-1)^i\, \bar{f}^n\{x_0, \ldots, x_n\} \cdot \bar{g}^k\{x_n, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+k+1}\}\ .
\end{aligned}$$

Wir addieren zur ersten Summe

$$(-1)^{n+1}\, \bar{f}^n\{x_0, \ldots, x_n\} \cdot \bar{g}^k\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+k+1}\}$$

und subtrahieren diesen Ausdruck von der zweiten und erhalten

$$\begin{aligned}
= \quad &\delta\, \bar{f}^n\{x_0, \ldots, x_{n+1}\} \cdot \bar{g}^k\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+k+1}\} \\
&+ (-1)^n\, \bar{f}^n\{x_0, \ldots, x_n\} \cdot \delta\bar{g}^k\{x_n, \ldots, x_{n+k+1}\}\ ,
\end{aligned}$$

also

$$\delta(\bar{f}^n \cup \bar{g}^k) = \delta\, \bar{f}^n \cup \bar{g}^k + (-1)^n\, \bar{f}^n \cup \delta\bar{g}^k\ .$$

§ 10. $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ als Überlagerung von $K_{\mathfrak{G}}$.

10.1. *Der soeben beschriebene Komplex $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ besitzt eine fixpunktfreie Automorphismengruppe, welche zu $\mathfrak{G}$ isomorph ist.*

Diese Automorphismen (Definition und Bezeichnungen vgl. § 6) erhält man so: Ist x ein Element von $\mathfrak{G}$, $\bar{c}^n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine n-Zelle von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$, so verstehen wir unter $x\bar{c}^n$ die n-Zelle $\{x x_0, x x_1, \ldots, x x_n\}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ Offenbar ist $x\bar{c}^n = x\bar{c}_1^n$ nur für $\bar{c}^n = \bar{c}_1^n$, und $x\bar{c}^n = \bar{c}^n$ nur für $x = e$ (Einselement von $\mathfrak{G}$). Das bedeutet, daß der Übergang von $\bar{c}^n$ zu $x\bar{c}^n$ (für alle $n \geqslant 0$ und alle n-Zellen) eine dimensionstreue Permutation der Zellen von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ ist, welche für $x \neq e$ fixpunktfrei ist, und es liegt eine treue Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch Permutationen der Zellen von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ vor (in der Dimension 0 ist es die „reguläre Darstellung“ von $\mathfrak{G}$); man verifiziert leicht, daß bei diesen Permutationen der Rand ∂ erhalten bleibt, d. h. daß $\partial x\bar{c}^n = x\partial\bar{c}^n$ ist (vgl. 6.1). In dieser Weise läßt sich also tatsächlich $\mathfrak{G}$ als fixpunktfreie Automorphismengruppe von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ auffassen.

10.2. Jeder n-dimensionale Transitivitätsbereich (6.2) von $\overline{K}_{\mathfrak{g}}$ gegenüber dieser Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ enthält eine und nur eine Zelle der Form $\{e, x_1, \ldots, x_n\}$, ist also durch ein geordnetes System von n Elementen $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{G}$ bestimmt (für $n = 0$ durch das leere System). Wir können diese Transitivitätsbereiche also eineindeutig den n-Zellen $c^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des Komplexes $K_{\mathfrak{G}}$ (§ 8) zuordnen. Die Abbildung U, welche jeder Zelle $\bar{c}^n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ ihren Transitivitätsbereich, d. h. eine Zelle $c^n = U\bar{c}^n$ von $K_{\mathfrak{G}}$ zuordnet, ist durch

$$U\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = U\{e, x_0^{-1}x_1, \ldots, x_0^{-1}x_n\} = (x_0^{-1}x_1, \ldots, x_0^{-1}x_n) \tag{17}$$

für $n > 0$, und $U\{x_0\} = U\{e\} = c^0$ gegeben. Es gilt $\partial U\bar{c}^n = U\partial\bar{c}^n$; in der Tat ist für $n \geqslant 1$ (für $n = 0$ sind beide Seiten $= 0$)

$$\begin{aligned} U\partial\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} &= U \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \{x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n\} \\ &= U\{x_1, \ldots, x_n\} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, U\{x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n\}, \end{aligned}$$

und dies ist für $n = 1$ gleich 0, für $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned} &= (x_1^{-1}x_2, \ldots, x_1^{-1}x_n) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (x_0^{-1}x_1, \ldots, \widehat{x_0^{-1}x_i}, \ldots, x_0^{-1}x_n) \\ &= \partial(x_0^{-1}x_1, \ldots, x_0^{-1}x_n) = \partial U\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}. \end{aligned}$$

Der Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ besitzt somit $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ als Überlagerung mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher fixpunktfreier Automorphismengruppe.

10.3. Die zur Überlagerungsabbildung U von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ auf $K_{\mathfrak{G}}$ duale Cohomologie-Abbildung U^* von $K_{\mathfrak{G}}$ in $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ ist $\cup$-produkthomomorph.

Beweis. f^n und g^k seien zwei Funktionen in $K_{\mathfrak{G}}$, $\bar{c}^{n+k} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+k}\}$ eine $(n+k)$-Zelle von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$, $n > 0$, $k > 0$.

$$\begin{aligned}
U^*(f^n \cup g^k)\{x_0, \ldots, x_{n+k}\} &= (f^n \cup g^k)\, U\{x_0, \ldots, x_{n+k}\} \\
&= f^n \cup g^k\, (x_0^{-1} x_1, \ldots, x_0^{-1} x_{n+k}) \\
&= f^n\, (x_0^{-1} x_1, \ldots, x_0^{-1} x_n) \cdot g^k\, (x_n^{-1} x_{n+1}, \ldots, x_n^{-1} x_{n+k}), \text{ nach (14)}, \\
&= f^n\, (U\{x_0, \ldots, x_n\}) \cdot g^k\, (U\{x_n, \ldots, x_{n+k}\}) \\
&= U^* f^n \{x_0, \ldots, x_n\} \cdot U^* g^k \{x_n, \ldots, x_{n+k}\} \\
&= U^* f^n \cup U^* g^k \{x_0, \ldots, x_{n+k}\}, \qquad \text{nach (16)},
\end{aligned}$$

also

$$U^*(f^n \cup g^k) = U^* f^n \cup U^* g^k .$$

Derselbe Beweis gilt für $n = 0$ oder $k = 0$; man hat nur für $U\{x_0\}$ bzw. $U\{x_n\}$ die 0-Zelle c^0 von $K_{\mathfrak{G}}$ (das leere System) zu setzen.

10.4. Anwendung auf endliche Gruppen.

Ist $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe der Ordnung γ, so ist bei beliebigem Koeffizientenbereich J für alle $n \geqslant 1$ die Ordnung eines jeden Elementes von $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$ endlich und ein Teiler von γ.

Beweis. Wir betrachten den Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ und seine azyklische Überlagerung $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ mit der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$. Es ist $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J) = B^n(K_{\mathfrak{G}}, J)$. Nach dem Korollar zum Hilfssatz 7.6 ist $B^n(K_{\mathfrak{G}}, J) = B^n_0(K_{\mathfrak{G}}, J)$ für $n \geqslant 1$, d.h. es gibt zu jedem Cozyklus f^n in $K_{\mathfrak{G}}$ eine Funktion $\bar{g}^{n-1}$ in $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ mit $U^* f^n = \delta \bar{g}^{n-1}$. Dann gilt

$$\sum_{x \in \mathfrak{G}} x^* U^* f^n = \sum_{x \in \mathfrak{G}} x^* \delta \bar{g}^{n-1} = \delta \big(\sum_{x \in \mathfrak{G}} x^* \bar{g}^{n-1}\big) .$$

Wegen $x^* U^* = U^*$ (7.1) ist das erste Glied $= \gamma U^* f^n$. $\bar{h}^{n-1} = \sum_{x \in \mathfrak{G}} x^* \bar{g}^{n-1}$ ist eine invariante Funktion; denn für $y \in \mathfrak{G}$ ist

$$y^* \bar{h}^{n-1} = \sum_{x \in \mathfrak{G}} y^* x^* \bar{g}^{n-1} = \sum_{x \in \mathfrak{G}} (xy)^* \bar{g}^{n-1} = \bar{h}^{n-1} .$$

Es gibt also (nach 7.2) in $K_{\mathfrak{G}}$ eine Funktion h^{n-1} mit $U^* h^{n-1} = \bar{h}^{n-1}$, und es ist $\gamma\, U^* f^n = \delta\, U^* h^{n-1}$, also $U^* \gamma f^n = U^* \delta h^{n-1}$, also, weil U^*

isomorph ist, $\gamma f^n = \delta h^{n-1}$. Die Cohomologieklasse von f^n ist also von endlicher Ordnung, welche Teiler von γ ist.

Ist $\mathfrak{G}$ endlich, so sind für $n \geqslant 1$ die ganzzahligen Gruppen $\Gamma^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ endlich.

Beweis. Die Gruppen $L^n(K_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{A})$, also auch die $\Gamma^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$, sind Abelsche Gruppen mit endlich-vielen Erzeugenden, und jedes Element von $\Gamma^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ hat endliche Ordnung; also ist $\Gamma^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ endlich. — Dasselbe gilt offenbar, wenn man statt $\mathfrak{A}$ eine Abelsche Gruppe mit endlich-vielen Erzeugenden als Koeffizientenbereich nimmt.

Aus dem letzten Satz und aus dem bekannten Zusammenhang zwischen den ganzzahligen Homologie- und Cohomologiegruppen (in einem Komplex, der in jeder Dimension endlich viele Zellen hat) ergibt sich, daß für $n \geqslant 2$ $\Gamma^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$, also nach 8.4 speziell $\Gamma^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) \cong \mathfrak{G}'$ ist, wo $\mathfrak{G}'$ die „Abelsch gemachte Gruppe $\mathfrak{G}$" bedeutet. Beachtet man noch 2.4, so folgt:

Die Gruppe der zentralen Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ durch eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist zur Abelsch gemachten Gruppe $\mathfrak{G}$ isomorph).* Ist die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ ihre eigene Kommutatorgruppe, so gibt es also als einzige zentrale Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt.

IV. Zusammenhänge zwischen Automorphismengruppe und Cohomologie-Eigenschaften

§ 11. Azyklische Überlagerung und Cohomologiegruppen eines Komplexes.

11.1. Unter einem Komplex soll, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, ein beliebiger rand-endlicher abstrakter Komplex (§ 4) verstanden werden. Als *Koeffizientenbereiche* verwenden wir in diesem Abschnitt IV entweder

(1) für die Homologie- und Cohomologiegruppen einen Ring J mit Einselement 1, oder

(2) für die Homologiegruppen den Ring $\mathfrak{A}$ der ganzen Zahlen, für die Cohomologiegruppen eine beliebige Abelsche Gruppe J. Es handelt sich also um die Beispiele (1) und (2) von Gruppen-Paaren aus 3.4. Eine einzelne Zelle c^n kann in beiden Fällen als Kette betrachtet werden.

*) Dies ist ein Spezialfall eines bekannten Satzes, vgl. *M. Hall*, Group rings and extensions, Ann. of Math. 39 (1938) 220—234, bes. S. 228.

Ein Komplex K heißt in der Dimension n *azyklisch* bezüglich J (vgl. 9.2), wenn $\mathfrak{B}^n(K,J) = 0$ ist. Für einen simplizialen Komplex (§ 5) bedeutet bei beliebigem J „azyklisch in der Dimension 0" dasselbe wie *zusammenhängend*. — Statt azyklisch bezüglich $\mathfrak{A}$ sagen wir *ganzzahlig azyklisch*.

Wegen der Begriffe Überlagerung und Automorphismus usw. vgl. man § 6.

11.2. Satz I. *Es seien $\overline{K}$ und $\overline{K_1}$ Überlagerungen der Komplexe K bzw. K_1 mit fixpunktfreien Automorphismengruppen, welche isomorph sind.* (1) *J sei ein Ring mit Einselement; sind $\overline{K}$ und $\overline{K_1}$ in den Dimensionen* $0, 1, \ldots, N-1$ $(N \geqslant 1)$ *azyklisch bezüglich J, dann gilt für die Cohomologiegruppen von K und K_1 bezüglich J*

$$B^n(K,J) \cong B^n(K_1,J) \;, \qquad n = 1,\, 2, \ldots, N-1 \;.$$

(2) *Sind $\overline{K}$ und $\overline{K_1}$ in den Dimensionen* $0, 1, \ldots, N-1$ *ganzzahlig azyklisch, so gelten dieselben Isomorphien für eine beliebige Koeffizientengruppe J.*

U bezeichne die Überlagerungsabbildung von $\overline{K}$ auf K und ebenso diejenige von $\overline{K_1}$ auf K_1. $B_0^n(K,J)$ sei diejenige Untergruppe von $B^n(K,J)$, welche durch die zu U duale Cohomologie-Abbildung U^* auf die Null von $B^n(\overline{K},J)$ abgebildet wird (vgl. 7.4); analog sei $B_0^n(K_1,J)$ erklärt.

Satz I'. *Unter den Voraussetzungen von Satz I gilt ferner*

$$B_0^N(K,J) \cong B_0^N(K_1,J) \;.$$

11.3. Satz I ist eine Folge von Satz I'. Denn aus Satz I' folgt $B_0^n(K,J) = B_0^n(K_1,J)$ für $n = 1, 2, \ldots, N-1$; aber für diese n ist $\mathfrak{B}^{n-1}(\overline{K}, J) = \mathfrak{B}^n(\overline{K}, J) = 0$ (bzw. $\mathfrak{B}^{n-1}(\overline{K}, \mathfrak{A}) = \mathfrak{B}^n(\overline{K}, \mathfrak{A}) = 0$), also nach dem Korollar von Hilfssatz 7.6 $B_0^n(K,J) = B^n(K,J)$, und dasselbe gilt für K_1. — Wir werden den Satz I' in § 12 beweisen.

11.4. Die Sätze I und I' besagen: In einem Komplex K, der eine in den Dimensionen $< N$ azyklische Überlagerung $\overline{K}$ mit fixpunktfreier Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ besitzt, ist die Struktur der Cohomologiegruppen B^n, $n < N$, sowie B_0^N durch diejenige der Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt. Sie geben aber keine Auskunft über den algebraischen Zusammenhang zwischen diesen Strukturen, d. h. darüber, wie man bei gegebener

Gruppe $\mathfrak{G}$ auf algebraischem Wege die betr. Cohomologiegruppen bestimmen kann.

Um diese Frage zu beantworten, ziehen wir den zur Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörigen Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ (§ 8) heran; er besitzt nach § 10 eine Überlagerung $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher fixpunktfreier Automorphismengruppe, und nach 9.2 ist $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ in allen Dimensionen und bezüglich jedes Koeffizientenbereiches azyklisch. Die Cohomologiegruppen von $K_{\mathfrak{G}}$ sind die in § 1 rein algebraisch definierten Gruppen $\Gamma^n(\mathfrak{G},J)$. Es folgt also aus Satz I:

Satz II. *Der Komplex K besitze eine Überlagerung $\overline{K}$ mit der fixpunktfreien Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$.* (1) *J sei ein Ring mit Einselement; ist $\overline{K}$ in den Dimensionen* $0, 1, \ldots, N-1$ *azyklisch bezüglich J, dann gilt für die Cohomologiegruppen von K bezüglich J*

$$B^n(K,J) \cong \Gamma^n(\mathfrak{G},J) \;, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1 \;.$$

(2) *Ist K in den Dimensionen* $0, 1, \ldots, N-1$ *ganzzahlig azyklisch, so gelten dieselben Isomorphien für eine beliebige Koeffizientengruppe J.*

Ebenso folgt aus Satz I′, wenn man noch beachtet, daß für alle $n \geqslant 1$ $B_0^n(K_{\mathfrak{G}},J) = B^n(K_{\mathfrak{G}},J) = \Gamma^n(\mathfrak{G},J)$ ist:

Satz II′. *Unter den Voraussetzungen von Satz II gilt ferner*

$$B_0^N(K\,,J) \cong \Gamma^N(\mathfrak{G},J) \;.$$

11.5. Die vorstehenden Sätze lassen sich nach 6.4 insbesondere anwenden auf *reguläre Überlagerungen simplizialer Komplexe* K mit der Decktransformationengruppe $\mathfrak{G}$, welche stets fixpunktfrei ist. Die so erhaltenen Resultate werden wir in § 13 auf den Cohomologiering von K ausdehnen (Sätze IV und IV′).

Handelt es sich speziell um die *universelle Überlagerung*[2]) $\overline{\mathsf{K}}$ eines zusammenhängenden simplizialen Komplexes K, so ist die zugehörige Decktransformationengruppe zur Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von K isomorph, und man erhält Beziehungen zwischen der Fundamentalgruppe und den Cohomologie-Eigenschaften von K. Diese sind in 13.9 (Sätze V und V′) ausführlich formuliert. — Die universelle Überlagerung $\overline{\mathsf{K}}$ ist zusammenhängend und einfach zusammenhängend (d. h. jeder geschlossene Weg in dem zu $\overline{\mathsf{K}}$ gehörigen Polyeder ist auf einen Punkt zusammenziehbar); also sind die Voraussetzungen $\mathfrak{B}^0(\overline{\mathsf{K}}, \mathfrak{A}) = \mathfrak{B}^1(\overline{\mathsf{K}}, \mathfrak{A}) = 0$ stets erfüllt. Es ergibt sich also eine Folgerung aus den Sätzen II und II′, die wir besonders hervorheben wollen:

Satz III. *Für jeden zusammenhängenden simplizialen Komplex* K *mit der Fundamentalgruppe* $\mathfrak{F}$ *gilt bei beliebiger Koeffizientengruppe* J

$$B^1(\mathsf{K}, J) \cong \Gamma^1(\mathfrak{F}, J) \quad \text{und} \quad B_0^2(\mathsf{K}, J) \cong \Gamma^2(\mathfrak{F}, J) .$$

Dabei bezieht sich $B_0^2(\mathsf{K}, J)$ auf die universelle Überlagerung $\overline{\mathsf{K}}$ von K; die geometrische Bedeutung dieser Gruppe wird in 14.4 erläutert. Die gruppentheoretische Rolle von $\Gamma^1(\mathfrak{F}, J)$ und $\Gamma^2(\mathfrak{F}, J)$ haben wir in § 2 bestimmt.

Korollar. $\mathfrak{F}$ *sei eine beliebige,* J *eine Abelsche Gruppe. Tritt* $\mathfrak{F}$ *auf als Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden simplizialen Komplexes* K, *für welchen* $B^2(\mathsf{K}, J) = 0$ *ist, so gibt es als einzige zentrale Erweiterung* (2.4) *von* J *durch* $\mathfrak{F}$ *das direkte Produkt der beiden Gruppen.*

Beispiel: $\mathfrak{F}$ sei eine freie Gruppe, J beliebig (als Komplex K kann man einen Streckenkomplex wählen; dann ist $B^n(\mathsf{K}, J) = 0$ für alle $n \geqslant 2$).

11.6. *Dimension* 0. In den Sätzen dieses § haben wir über die 0-te Cohomologiegruppe B^0 keine Aussagen gemacht; für diese liegen nämlich die Verhältnisse einfacher: Wenn die Überlagerung $\overline{K}$ von K in der Dimension 0 azyklisch ist, dann ist auch K in der Dimension 0 azyklisch. Denn es ist (vgl. 6.2) $\mathfrak{Z}^{00}(K, J) = U\mathfrak{Z}^{00}(\overline{K}, J) = U\mathfrak{H}^0(\overline{K}, J) = \mathfrak{H}^0(K, J)$, also $\mathfrak{B}^0(K, J) = 0$.

Nach 4.6 folgt aber aus $\mathfrak{B}^0(K, J) = 0$ für einen Ring J mit Einselement $B^0(K, J) = B_k^0(K, J) \cong J$ und aus $\mathfrak{B}^0(K, \mathfrak{A}) = 0$ dasselbe für eine beliebige Abelsche Gruppe J (dabei bedeutet $B_k^0(K, J)$ die Gruppe der konstanten 0-Funktionen f^0). Die Struktur von B^0 ist also, wenn $\overline{K}$ in der Dimension 0 azyklisch ist, stets dieselbe, unabhängig von der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$.

11.7. *Die Homologiegruppen.* Besitzt der Komplex K eine Überlagerung $\overline{K}$ mit der fixpunktfreien Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$, und ist $\overline{K}$ in den Dimensionen $0, 1, \ldots, N-1$ azyklisch bezüglich eines Ringes J mit Einselement, so gilt nach *Hopf*[20]) für die Homologiegruppen von K bezüglich J

$$\mathfrak{B}^n(K, J) \cong \mathfrak{G}_J^n, \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$\mathfrak{B}^N(K, J)/U\mathfrak{B}^N(\overline{K}, J) \cong \mathfrak{G}_J^N .$$

---

[20]) [2], S. 56, Sätze II und III. Der dort gegebene Beweis überträgt sich ohne weiteres von simplizialen auf abstrakte Komplexe.

Dabei sind die $\mathfrak{G}_J^n$ Abelsche Gruppen, die einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ und einem Ring J mit Einselement in bestimmter, rein algebraischer Weise zugeordnet werden [21]. Insbesondere sieht man, wenn man für K den in § 8 konstruierten Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ heranzieht, daß *die Homologiegruppen* $\mathfrak{B}^n(\mathfrak{G}, J) = \mathfrak{B}^n(K_{\mathfrak{G}}, J)$ von $\mathfrak{G}$ *bezüglich* J *mit den Hopfschen Gruppen* $\mathfrak{G}_J^n$ *isomorph sind.* Aus 8.4 folgt z. B., daß $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}^1$ die Abelsch gemachte Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, was von Hopf auf anderem Wege bewiesen wurde [22]. Auf Grund des Dualitätssatzes der Homologie- und Cohomologiegruppen eines Komplexes (4.5) ergibt sich die folgende allgemeine Beziehung zwischen den Hopfschen Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$ und unseren Gruppen $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J_1)$, wenn $J_1 = Ch\,J$ die Charakterengruppe der diskreten additiven Gruppe von J ist: $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J_1)$ ist zur Gruppe der Charaktere von $\mathfrak{G}_J^n$ isomorph.

§ 12. Hilfssätze. Beweis von Satz I′.

12.1. Der Komplex K besitze die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$. J sei ein Ring mit Einselement; wir betrachten den *Gruppenring* [23] G von $\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten aus J. Die Elemente von G, die endlichen Linearformen $g = \Sigma\,\sigma_j\,x_j$, $\sigma_j \in J$, $x_j \in \mathfrak{G}$, können als Operatoren der Kettengruppen $\mathfrak{L}^n = \mathfrak{L}^n(K, J)$ aufgefaßt werden, wenn man für jede Kette $a^n = \Sigma\,\tau_i c_i^n$ unter $g\,a^n$ die Kette

$$g\,a^n = \sum_j \sigma_j\,x_j\,a^n = \sum_j \sum_i \sigma_j\,\tau_i\,x_j\,c_i^n$$

versteht. G ist dann ein *Operatorenring* [23] von $\mathfrak{L}^n$. Ein Homomorphismus V einer Kettengruppe $\mathfrak{L}^n$ in eine andere, die ebenfalls G als Operatorenring besitzt, heißt ein *G-Homomorphismus*, wenn für alle $g \in G$ und $a^n \in \mathfrak{L}^n$

$$V g a^n = g\,V a^n$$

ist; m. a. W. wenn für alle $\sigma \in J$ $\quad V\sigma a^n = \sigma\,V a^n$ und für alle $x \in \mathfrak{G}$ $Vx = xV$ ist.

Die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ sei nun fixpunktfrei (6.3). Wählt man aus jedem Transitivitätsbereich der n-Zellen von K gegenüber $\mathfrak{G}$ eine Zelle beliebig aus, so bilden diese Zellen c_i^n *eine Basis von* $\mathfrak{L}^n$ *in bezug auf* G (kurz G-Basis; das bedeutet, daß jede Kette $a^n \in \mathfrak{L}^n$ sich auf eine und nur eine Art als Linearkombination der c_i^n mit Koeffizienten aus G darstellen

[21]) [2], Nr. 3.

[22]) [2], Nr. 4.

[23]) Vgl. [2], Nr. 3.1 und Nr. 1.

läßt). In der Tat kommt nach 6.3 unter den $x_j c_i^n$, wenn x_j die Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft, jede n-Zelle genau einmal vor, so daß jede Kette $a^n \in \mathfrak{L}^n$ eindeutig in der Form $a^n = \sum_{ij} \sigma_{ji} x_j c_i^n = \sum_i g_i c_i^n$ darstellbar ist. — Ein G-Homomorphismus von $\mathfrak{L}^n$ ist bekannt, wenn er für die Basiszellen c_i^n bekannt ist; jede beliebige Wahl der Bilder der Basiszellen definiert einen G-Homomorphismus von $\mathfrak{L}^n$.

12.2. In der Funktionengruppe $L^n = L^n(K, J)$ bezeichnen wir mit L_0^n die Untergruppe der gegenüber $\mathfrak{G}$ invarianten Funktionen f^n, d. h. derjenigen, für welche $x^* f^n = f^n$ ist für alle $x \in \mathfrak{G}$ (vgl. 7.2). Wegen $x^* \delta = \delta x^*$ ist δL_0^{n-1} stets in L_0^n enthalten, und natürlich in $H^n = \delta L^{n-1}$. Also ist δL_0^{n-1} Untergruppe von $H^n \cap L_0^n$, und wir können die Faktorgruppe $F^n = H^n \cap L_0^n / \delta L_0^{n-1}$ bilden.

12.3. Es sei von jetzt an K ein Komplex, welcher die fixpunktfreie Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ besitzt und welcher in den Dimensionen $0, 1, \ldots, N-1$ entweder (1) azyklisch bezüglich eines Ringes J mit Einselement, oder (2) ganzzahlig azyklisch ist.

Der Koeffizientenbereich für die Kettengruppen $\mathfrak{L}^n$ von K sowie für den Gruppenring G von $\mathfrak{G}$ sei im Falle (1) der Ring J, im Falle (2) der Ring $\mathfrak{A}$ der ganzen Zahlen, derjenige für die Funktionengruppen L^n im Falle (1) der Ring J, im Falle (2) eine beliebige Abelsche Gruppe.

Hilfssatz. Es sei für jede der Zahlen $n = 0, 1, \ldots, N-1$ ein G-Homomorphismus V von $\mathfrak{L}^n$ in sich gegeben, derart daß $\partial V = V\partial$ ist und daß für jede 0-Kette a^0 die Koeffizientensumme von Va^0 verschwindet. Dann gibt es für $m = 0, 1, \ldots, N$ je einen G-Homomorphismus Y von $\mathfrak{L}^{m-1}$ in $\mathfrak{L}^m$, derart daß $V = \partial Y + Y\partial$ ist, d. h. daß für $n = 0, 1, \ldots, N-1$ und jede Kette $a^n \in \mathfrak{L}^n$ gilt

$$Va^n = \partial Y a^n + Y \partial a^n \ . \tag{18}$$

Beweis. Wir bezeichnen den zu konstruierenden G-Homomorphismus Y von $\mathfrak{L}^{m-1}$ in $\mathfrak{L}^m$ wenn nötig ausführlicher mit Y_m.

Y_0 ist die Nullabbildung von $\mathfrak{L}^{-1}$ in $\mathfrak{L}^0$. Wir definieren Y_1 für die 0-Basiszellen c^0 (vgl. 12.1): Nach Voraussetzung ist $Vc^0 \in \mathfrak{Z}^{00}$ und, weil K in der Dimension 0 azyklisch ist, $\mathfrak{Z}^{00} = \mathfrak{H}^0$; es gibt also eine 1-Kette $Y_1 c^0$, deren Rand Vc^0 ist. Dadurch ist Y_1 für alle $a^0 \in \mathfrak{L}^0$ definiert und es gilt $Va^0 = \partial\, Y_1 a^0 + Y_0 \partial\, a^0$.

Es sei nun $m \leqslant N$, und $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ seien schon definiert, so daß (18) für $n \leqslant m-2$ gilt. Wir definieren Y_m für die $(m-1)$-Basiszellen c^{m-1}: Es ist

$$\partial V c^{m-1} = V\partial c^{m-1} = \partial Y \partial c^{m-1} + Y\partial\partial c^{m-1} = \partial Y \partial c^{m-1} \ ,$$

somit $\partial(Vc^{m-1} - Y\partial c^{m-1}) = 0$, d. h. $Vc^{m-1} - Y\partial c^{m-1}$ ist ein Zyklus, also, weil K in der Dimension $m-1$ azyklisch ist, ein Rand; es gibt also eine m-Kette $Y_m c^{m-1}$, deren Rand $= Vc^{m-1} - Y\partial c^{m-1}$ ist. Dadurch ist Y_m für alle $a^{m-1} \in \mathfrak{L}^{m-1}$ definiert, und es gilt $Va^{m-1} - Y\partial a^{m-1} = \partial Y_m a^{m-1}$, also

$$Va^{m-1} = \partial Y a^{m-1} + Y\partial a^{m-1} \ .$$

12.4. *Hilfssatz.* Es sei für jede der Zahlen $n = 0, 1, \ldots, N$ ein G-Homomorphismus W von $\mathfrak{L}^n$ in sich gegeben, derart daß $\partial W = W\partial$ ist und daß W jede 0-Zelle auf eine 0-Zelle abbildet; W^* sei der zu W duale Homomorphismus von L^n in sich. Dann bildet W^* für $n = 1, 2, \ldots, N$ die Faktorgruppe $F^n = H^n \cap L_0^n / \delta L_0^{n-1}$ identisch auf sich ab.

Beweis. I sei für jedes n die identische Abbildung von $\mathfrak{L}^n$ auf sich. $V = W - I$ erfüllt alle Voraussetzungen von Hilfssatz 1; denn für jede 0-Zelle c^0 hat $Vc^0 = Wc^0 - c^0$ die Koeffizientensumme 0. Überdies ist V auch in der Dimension N definiert, mit $\partial Va^N = V\partial a^N$ für jede N-Kette a^N.

Nach Hilfssatz 12.3 gibt es für $m = 0, 1, \ldots, N$ G-Homomorphismen Y von $\mathfrak{L}^{m-1}$ in $\mathfrak{L}^m$, derart daß in den Dimensionen $\leqslant N-1$ $V = \partial Y + Y\partial$ ist; Y^* sei der zu Y duale Homomorphismus von L^m in L^{m-1}. Wegen $xY = Yx$ gilt, für alle $x \in \mathfrak{G}$, $x^*Y^* = Y^*x^*$. Mit dem zu V dualen Homomorphismus V^* von L^n in sich ($n = 0, 1, \ldots, N$) ist Y^* durch die in den Dimensionen $\leqslant N-1$ gültige Formel

$$V^* = Y^*\delta + \delta Y^*$$

verknüpft. Ferner gilt in denselben Dimensionen (wegen $\partial V = V\partial$) $V^*\delta = \delta V^*$.

Es genügt, die Behauptung des Hilfssatzes 12.4 für $n = N$ zu beweisen. Es sei erstens $g^N \in L_0^N$, d. h. $x^* g^N = g^N$; dann ist $x^*Y^* g^N = Y^* x^* g^N = Y^* g^N$, für alle $x \in \mathfrak{G}$, also $Y^* g^N \in L_0^{N-1}$. Zweitens sei $g^N \in H^N$, d. h. $g^N = \delta f^{N-1}$; dann ist

$$V^* g^N = V^*\delta f^{N-1} = \delta V^* f^{N-1} = \delta Y^* \delta f^{N-1} + \delta\delta Y^* f^{N-1} = \delta Y^* g^N .$$

Zusammen ergibt sich, daß für $g^N \in H^N \cap L_0^N$ gilt

$$V^* g^N = W^* g^N - g^N \in \delta L_0^{N-1} \ ,$$

also

$$W^* g^N \equiv g \qquad \text{mod. } \delta L_0^{N-1} \ .$$

12.5. Es seien K und K_1 zwei Komplexe mit fixpunktfreien Automorphismengruppen, die zueinander isomorph sind; ist $\mathfrak{G}$ eine zu beiden isomorphe Gruppe, so können wir die Elemente $x \in \mathfrak{G}$ gleichzeitig als Automorphismen von K und von K_1 auffassen, und ebenso die Elemente g des Gruppenringes G von $\mathfrak{G}$ als Operatoren der Kettengruppen $\mathfrak{L}^n$ von K und $\mathfrak{L}_1^n$ von K_1. In diesem Sinne werden wir sagen, K und K_1 haben „dieselbe Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$".

Hilfssatz. K und K_1 seien zwei Komplexe mit derselben fixpunktfreien Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$. K sei in den Dimensionen $0, 1, \ldots, N-1$ azyklisch (Koeffizientenbereiche wie in 12.3). Dann gibt es für jede der Zahlen $n = 0, 1, \ldots, N$ einen G-Homomorphismus A von $\mathfrak{L}_1^n$ in $\mathfrak{L}^n$, derart daß $\partial A = A \partial$ ist und daß A jede 0-Zelle auf eine 0-Zelle abbildet.

Beweis. In K_1 seien Zellen ausgewählt, die eine G-Basis bilden (vgl. 12.1). Für jede 0-Basiszelle c_1^0 von K_1 wählen wir eine Zelle c^0 von K und setzen $A c_1^0 = c^0$; dann ist A für $\mathfrak{L}_1^0$ definiert. Sodann sei $n \leqslant N$, und A sei für $\mathfrak{L}_1^0, \mathfrak{L}_1^1, \ldots, \mathfrak{L}_1^{n-1}$ schon erklärt und habe die gewünschten Eigenschaften; wir definieren A für $\mathfrak{L}_1^n$: Für jede n-Basiszelle c_1^n ist $\partial A \partial c_1^n = A \partial \partial c_1^n = 0$, also $A \partial c_1^n$ ein Zyklus (für $n = 1$ hat ∂c_1^1, also auch $A \partial c_1^1$ die Koeffizientensumme 0), und weil K in der Dimension $n-1$ azyklisch ist, gibt es eine Kette d^n in K mit $\partial d^n = A \partial c_1^n$. Wir setzen $A c_1^n = d^n$; dann ist A für $\mathfrak{L}^n$ definiert, und es gilt für jede Kette a_1^n in K_1 $\partial A a_1^n = A \partial a_1^n$.

12.6. A^* sei der zum soeben konstruierten Homomorphismus A von $\mathfrak{L}_1^n$ in $\mathfrak{L}^n$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ duale Homomorphismus der Funktionengruppe L^n von K in diejenige L_1^n von K_1 (Koeffizienten wie in 12.3). Wegen $\partial A = A \partial$ ist $\delta A^* = A^* \delta$, und wegen $xA = Ax$ gilt $x^* A^* = A^* x^*$ für alle $x \in \mathfrak{G}$. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt leicht: A^* bildet die Gruppe $H^n \cap L_0^n$ von K in die entsprechende $(H^n \cap L_0^n)_1$ von K_1 ab und δL_0^{n-1} in $(\delta L_0^{n-1})_1$. Also bewirkt A^* einen Homomorphismus der Gruppe $F^n = H^n \cap L_0^n / \delta L_0^{n-1}$ von K in die entsprechende Gruppe $F_1^n = (H^n \cap L_0^n / \delta L_0^{n-1})_1$ von K_1. Wir wollen zeigen:

Ist nicht nur K, sondern auch K_1 in den Dimensionen $0, 1, \ldots, N-1$ azyklisch, so *bewirkt* A^* *für* $n = 1, 2, \ldots, N$ *einen Isomorphismus von* F^n *auf* F_1^n.

Beweis. Es gibt in diesem Falle ein System B von Homomorphismen von $\mathfrak{L}^n$ in $\mathfrak{L}_1^n$ für $n = 0, 1, \ldots, N$, mit genau denselben Eigenschaften wie A; der duale Homomorphismus B^* bewirkt einen Homomorphismus von F_1^n in F^n.

$W = AB$ ist ein System von Homomorphismen von $\mathfrak{L}^n$ in sich, $n = 0, 1, \ldots, N$, welches den Voraussetzungen des Hilfssatzes 12.4 genügt. Also bildet $W^* = B^* A^*$ die Faktorgruppen F^n identisch auf sich ab. Ebenso zeigt man, daß $A^* B^*$ die F_1^n identisch auf sich abbildet. Es gibt also für $n = 1, 2, \ldots, N$ einen Homomorphismus A^* von F^n in F_1^n und einen B^* von F_1^n in F^n, derart daß $A^* B^*$ die Identität von F_1^n, $B^* A^*$ die Identität von F_1 ist; daraus folgt aber, daß A^* ein Isomorphismus von F^n auf F_1^n ist, und B^* seine Umkehrung. — Wir fassen zusammen:

Lemma 1. K und K_1 seien zwei Komplexe mit derselben Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$, beide in den Dimensionen $0, 1, \ldots, N-1$ azyklisch (Koeffizientenbereiche wie in 12.3). *Dann sind für $n = 1, 2, \ldots, N$ die Gruppen F^n und F_1^n isomorph*; genauer: Ist für jede der Zahlen $n = 0, 1, \ldots, N$ ein G-Homomorphismus A von $\mathfrak{L}_1^n$ in $\mathfrak{L}^n$ gegeben, derart daß $\partial A = A\partial$ und daß das Bild jeder 0-Zelle eine 0-Zelle ist — nach Hilfssatz 12.5 existiert stets ein solches System von Homomorphismen —, dann bewirkt A^* für $n = 1, 2, \ldots, N$ einen Isomorphismus von F^n auf F_1^n.

12.7. *Beweis von Satz I'* (11.2).

Die beiden in 11.2 vorkommenden Überlagerungskomplexe $\overline{K}$ und $\overline{K_1}$ erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 1. Also sind die zugehörigen Gruppen $\overline{F}^N$ und $\overline{F}_1^N$ isomorph. Aber nach 7.4 und mit den dortigen Bezeichnungen ist $\overline{F}^N = \overline{H}^N \cap \overline{L}_0^N / \delta \overline{L}_0^{N-1}$ zu $B_0^N(K, J)$ isomorph, wo K der von $\overline{K}$ überlagerte Komplex ist, und analog $\overline{F}_1^N$ zu $B_0^N(K_1, J)$, wo K_1 der von $\overline{K_1}$ überlagerte Komplex ist. Damit ist die Isomorphie

$$B_0^N(K, J) \cong B_0^N(K_1, J)$$

bewiesen.

§ 13. Azyklische Überlagerungen und Cohomologiering eines simplizialen Komplexes.

13.1. Wir beschränken uns hier auf simpliziale Komplexe K und ihre regulären Überlagerungen (6.4) und dehnen dafür die Untersuchung auch auf das $\cup$-Produkt der Cohomologieklassen von K aus. Der Koeffizientenbereich sei stets, für die Homologiegruppen und den Cohomologiering, ein Ring J mit Einselement. — Ist $\overline{\mathsf{K}}$ eine reguläre Überlagerung von K mit der Decktransformationengruppe $\mathfrak{G}$, so ziehen wir den abstrakten Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ (§ 8) heran; der Cohomologiering von $K_{\mathfrak{G}}$ ist der in § 3 algebraisch definierte Ring $P(\mathfrak{G}, J)$, der seiner additiven Struktur nach die direkte Summe der Gruppen $\Gamma^n(\mathfrak{G}, J)$ ist.

13.2. $\overline{\mathsf{K}}$ sei eine reguläre Überlagerung des simplizialen Komplexes K; die Überlagerungsabbildung U von $\overline{\mathsf{K}}$ auf K ist eine simpliziale Abbildung, und es gehört zu ihr (vgl. 5.3) ein Ringhomomorphismus U^* von $R(\mathsf{K},J)$ in $R(\overline{\mathsf{K}},J)$. Wir bezeichnen, wie in 7.7, den *Kern* von U^* mit $R_0(\mathsf{K},J)$. — Im abstrakten Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ ist ebenfalls ein Teilring $R_0(K_{\mathfrak{G}},J)$ von $R(K_{\mathfrak{G}},J) = \mathsf{P}(\mathfrak{G},J)$ ausgezeichnet, wenn man die Überlagerung $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ von $K_{\mathfrak{G}}$ heranzieht (§ 10): für die zugehörige Überlagerungsabbildung U ist U^* nach 10.3 $\cup$-produkthomomorph, bewirkt also einen Ringhomomorphismus von $R(K_{\mathfrak{G}},J)$ in $R(\overline{K}_{\mathfrak{G}}, J)$, dessen Kern wir mit $R_0(K_{\mathfrak{G}},J)$ bezeichnen.

Es ist bequem, die folgende Bezeichnung zu verwenden: Für jeden Ring R, R_0, P usw. verstehen wir unter R^N, R_0^N, P^N usw. den Ring, den man erhält, wenn man im ursprünglichen *alle Elemente der Dimensionen* $n > N$ *gleich* 0 *setzt*; er gibt also die additive Struktur des ursprünglichen Ringes in den Dimensionen $n \leqslant N$ sowie alle Produkte von zwei Elementen der Dimensionen n und k mit $n + k \leqslant N$ getreu wieder.

Lemma 2. $\overline{\mathsf{K}}$ *sei eine reguläre Überlagerung des simplizialen Komplexes* K *mit der Decktransformationenengruppe* $\mathfrak{G}$, *und* $\overline{\mathsf{K}}$ *sei bezüglich* J *in den Dimensionen* $0, 1, \ldots, N-1$ *azyklisch. Dann sind die Ringe* $R_0^N(\mathsf{K},J)$ *und* $R_0^N(K_{\mathfrak{G}},J)$ *dimensionstreu isomorph.*

13.3. Dem Beweis dieses Lemmas (13.5) schicken wir einige Bemerkungen und Festsetzungen voraus. Wir wählen in K eine *Eckpunktreihenfolge* der Simplexe (5.2), die im folgenden stets festgehalten werden soll; in $\overline{\mathsf{K}}$ wählen wir die Eckpunktreihenfolge so, daß sie bei der Überlagerungsabbildung U erhalten bleibt (6.5). Es sollen in K und $\overline{\mathsf{K}}$ nur Symbole $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ bzw. $[\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n]$ verwendet werden, in denen die Eckpunkte u_i bzw. $\bar{u}_i$ in der vorgeschriebenen Reihenfolge stehen; nach 6.5 ist dann für jede Decktransformation $x \in \mathfrak{G}$ $x[\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n] = [x\bar{u}_0, x\bar{u}_1, \ldots, x\bar{u}_n]$. Wir bezeichnen ferner die durch die vorgeschriebene Eckpunktreihenfolge bestimmte Orientierung der Simplexe als die positive; K bzw. $\overline{K}$ seien die abstrakten Komplexe, deren Zellen diese orientierten Simplexe sind (5.1); $\overline{K}$ ist eine Überlagerung von K mit der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$.

Es sei $\overline{T}$ eine Basis der Eckpunkte von $\overline{\mathsf{K}}$, d. h. eine Teilmenge der Eckpunkte von $\overline{\mathsf{K}}$, welche genau einen Eckpunkt aus jedem Transitivitätsbereich gegenüber $\mathfrak{G}$ enthält, also für jeden Eckpunkt von K genau einen von $\overline{\mathsf{K}}$, der ihn überlagert. $\overline{T}$ läßt sich auf verschiedene Arten wählen; eine bestimmte sei herausgegriffen und im folgenden festgehalten. Eckpunkte aus $\overline{T}$ seien mit $\bar{v}$ (evtl. mit einem Index, $\bar{v}_0$, $\bar{v}_i$ usw.) bezeichnet.

Aus diesen Festsetzungen ergibt sich: *Jeder Eckpunkt $\bar{u}$ von $\overline{K}$ läßt sich auf eine und nur eine Art in der Form $\bar{u} = x\bar{v}$ ($x \in \mathfrak{G}$, $\bar{v} \in \overline{T}$) darstellen, und jede Zelle $\bar{c}^n$ von $\overline{K}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) auf eine und nur eine Art in der Form*

$$\bar{c}^n = [x_0\bar{v}_0, x_1\bar{v}_0, \ldots, x_n\bar{v}_n] \qquad \text{mit } x_i \in \mathfrak{G},\ \bar{v}_i \in \overline{T}\ .$$

Dabei gilt, für alle $x \in \mathfrak{G}$, $x\bar{c}^n = [xx_0\bar{v}_0, xx_1\bar{v}_1, \ldots, xx_n\bar{v}_n]$.

13.4. Wir definieren nun eine *Homologie-Abbildung A von $\overline{K}$ in $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$*, indem wir für jedes n und jede Zelle $\bar{c}^n$ von $\overline{K}$

$$A\bar{c}^n = A[x_0\bar{v}_0, x_1\bar{v}_1, \ldots, x_n\bar{v}_n] = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

setzen; $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ist eine n-Zelle von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$. Daß $A\partial = \partial A$ ist, folgt unmittelbar aus der Definition des Randes in $\overline{K}$ und in $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ (letztere vgl. Formel (15) in § 9). — Ferner kann man gemäß § 10 die Gruppe $\mathfrak{G}$ als fixpunktfreie Automorphismengruppe von $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ auffassen, und es ist

$$\begin{aligned} Ax\bar{c}^n &= A[xx_0\bar{v}_0, xx_1\bar{v}_1, \ldots, xx_n\bar{v}_n] = \{xx_0, xx_1, \ldots, xx_n\} \\ &= x\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = xA\bar{c}^n, \end{aligned}$$

also $Ax = xA$ für alle $x \in \mathfrak{G}$.

Überdies ist A^* $\cup$-produkthomomorph (das $\cup$-Produkt in $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ ist durch Formel (16) in § 9 definiert); denn für zwei Funktionen $\bar{f}^n \in L^n(\overline{K}_{\mathfrak{G}}, J)$, $\bar{g}^k \in L^k(\overline{K}_{\mathfrak{G}}, J)$ und eine beliebige $(n+k)$-Zelle

$$\bar{c}^{n+k} = [x_0\bar{v}_0, x_1\bar{v}_1, \ldots, x_{n+k}\bar{v}_{n+k}]$$

aus $\overline{K}$ gilt

$$\begin{aligned} A^*(\bar{f}^n \cup \bar{g}^k)(\bar{c}^{n+k}) &= \bar{f}^n \cup \bar{g}^k(A\bar{c}^{n+k}) = \bar{f}^n \cup \bar{g}^k\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+k}\} \\ &= \bar{f}^n\{x_0, \ldots, x_n\} \cdot \bar{g}^k\{x_n, \ldots, x_{n+k}\} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} A^*\bar{f}^n \cup A^*\bar{g}^k(\bar{c}^{n+k}) &= A^*\bar{f}^n[x_0\bar{v}_0, \ldots, x_n\bar{v}_n] \cdot A^*\bar{g}^k[x_n\bar{v}_n, \ldots, x_{n+k}\bar{v}_{n+k}] \\ & \bar{f}^n\{x_0, \ldots, x_n\} \cdot \bar{g}^k\{x_n, \ldots, x_{n+k}\}\ . \end{aligned}$$

also $A^*(\bar{f}^n \cup \bar{g}^k) = A^*\bar{f}^n \cup A^*\bar{g}^k$.

13.5. *Beweis von Lemma* 2. $\overline{K}$ ist in den Dimensionen $0, 1, \ldots, N-1$, $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ nach 9.2 in allen Dimensionen bezüglich des Ringes J azyklisch, und beide Komplexe besitzen dieselbe Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$. Durch die Homologie-Abbildung A (13.4) ist für alle n ein G-Homomorphismus A (12.1) von $\mathfrak{L}^n(\overline{K}\ ,J)$ in $\mathfrak{L}^n(\overline{K}_{\mathfrak{G}}, J)$ gegeben, derart daß $\partial A = A\partial$ und daß das Bild jeder 0-Zelle eine 0-Zelle ist. Nach dem Lemma 1 (12.6) bewirkt also A^* für $n = 1, 2, \ldots, N$ einen Isomorphismus der Faktorgruppe $\overline{F}^n = \overline{H}^n \cap \overline{L}_0^n / \delta \overline{L}_0^{n-1}$ in $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ auf die analoge Faktorgruppe in $\overline{K}$. Es sei nun, wie in 7.7, S der Ring, der seiner additiven Struktur nach die direkte Summe der $\overline{F}^n$, seiner multiplikativen Struktur nach durch das $\cup$-Produkt gegeben ist, und S^N entstehe aus S durch Nullsetzen aller Elemente der Dimensionen $n > N$. Da A^* $\cup$-produkthomomorph ist, bewirkt A^* einen dimensionstreuen Ringisomorphismus von $S^N(\overline{K}_{\mathfrak{G}}, J)$ auf $S^N(\overline{K}, J)$. Aber nach 7.7 ist $S(\overline{K}_{\mathfrak{G}}, J)$ zu $R_0(K_{\mathfrak{G}}, J)$ und $S(\overline{K}, J)$ zu $R_0(\mathsf{K}, J)$ dimensionstreu isomorph. Es folgt also, daß $R_0^N(K_{\mathfrak{G}}, J)$ und $R_0^N(\mathsf{K}, J)$ dimensionstreu isomorph sind.

13.6. *Zusatz zum Lemma 2.* Der Isomorphismus von $R_0^N(K_{\mathfrak{G}}, J)$ und $R_0^N(\mathsf{K}, J)$ wird durch folgenden Homomorphismus Ω von $L(K_{\mathfrak{G}}, J) = L(\mathfrak{G}, J)$ in $L(K, J)$ bewirkt: Jedes n-Simplex $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ von K $(n \geqslant 1)$ wird gemäß den Festsetzungen 13.3 von *genau einem* Simplex der Form $[\bar{v}_0, x_1\bar{v}_1, \ldots, x_n\bar{v}_n]$ mit $x_i \in \mathfrak{G}$ und $\bar{v}_i \in \overline{T}$ überlagert; für jede Funktion $f^n \in L^n(\mathfrak{G}, J)$ ist $\Omega f^n \in L^n(K, J)$ durch

$$\Omega f^n[u_0, u_1, \ldots, u_n] = f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{19}$$

definiert.

Beweis. Der Isomorphismus von $R_0^N(K_{\mathfrak{G}}, J)$ auf den Ring $S^N(\overline{K}_{\mathfrak{G}}, J)$ ist durch die Cohomologie-Abbildung $U_{\mathfrak{G}}^*$ von $K_{\mathfrak{G}}$ in $\overline{K}_{\mathfrak{G}}$ gegeben, derjenige von $S^N(\overline{K}_{\mathfrak{G}}, J)$ auf $S^N(\overline{K}, J)$ durch A^* (13.4), und derjenige von $R_0^N(K, J)$ auf $S^N(\overline{K}, J)$ durch die Cohomologie-Abbildung U^* von K in $\overline{K}$; U^* ist für jedes n ein Isomorphismus von $L^n(K, J)$ auf $L_0^n(\overline{K}, J)$ (vgl. 7.2), und V sei die Umkehrung von U^*.

$A^* U_{\mathfrak{G}}^*$ ist für jedes n ein G-Homomorphismus von $L^n(\mathfrak{G}, J)$ in $L_0^n(\overline{K}, J)$, und $VA^*U_{\mathfrak{G}}^*$ von $L^n(\mathfrak{G}, J)$ in $L^n(K, J)$. Wir setzen $\Omega = VA^*U_{\mathfrak{G}}^*$; Ω ist ein dimensionstreuer G-Homomorphismus von $L(\mathfrak{G}, J)$ in $L(K, J)$, der den Isomorphismus von $R_0^N(K_{\mathfrak{G}}, J)$ auf $R_0^N(K, J)$ bewirkt. Ω läßt sich so beschreiben: Ist $n \geqslant 1$, $c^n = [u_0, u_1, \ldots, u_n]$ ein Simplex von K, $\bar{c}^n$ eines von K, welches c^n überlagert, so läßt sich $\bar{c}^n$ eindeutig in der Form $[x_0\bar{v}_0, x_1\bar{v}_1, \ldots, x_n\bar{v}_n]$ mit $x_i \in \mathfrak{G}$, $\bar{v}_i \in \overline{T}$ schreiben (vgl. 13.3), und es ist $U\bar{v}_i = u_i$ $(i = 0, \ldots, n)$; es gibt unter diesen Simplexen genau eines mit $x_0 = e$, d. h. $\bar{c}^n = [\bar{v}_0, x_1\bar{v}_1, \ldots, x_n\bar{v}_n]$. Dann ist für $f^n \in L^n(\mathfrak{G}, J)$

$$\begin{aligned}\Omega f^n(c^n) &= VA^*\,U_{\mathfrak{G}}^* f^n(c^n) = A^*\,U_{\mathfrak{G}}^* f^n[\bar{v}_0, x_1\bar{v}_1, \ldots, x_n\bar{v}_n] \\ &= U_{\mathfrak{G}}^* f^n\{e, x_1, \ldots, x_n\} = f^n(x_1, \ldots, x_n)\ .\end{aligned}$$

13.7. Die Elemente der Dimension 0 von $R(\mathsf{K},J)$ gehören nicht zu $R_0(\mathsf{K},J)$, werden also vom Lemma 2 nicht erfaßt; aber nach 11.6 ist, wenn $\mathfrak{B}^0(\overline{\mathsf{K}},J)=0$ ist, $B^0(\mathsf{K},J)\cong J$, nämlich gleich der Gruppe der konstanten 0-Funktionen, deren Rolle im $\cup$-Produkt durch das Axiom IV (4.9) festgelegt ist; dasselbe gilt für $B^0(K_{\mathfrak{G}},J)$. Bezeichnen wir mit R_1 den Ring, den man erhält, wenn man zu R_0 noch *alle Elemente der Dimension* 0 hinzunimmt, so dürfen wir die Behauptung des Lemmas 2 auch so aussprechen: *Die Ringe $R_1^N(\mathsf{K},J)$ und $R_1^N(K_{\mathfrak{G}},J)$ sind dimensionstreu isomorph.*

Die additive Gruppe des Ringes R_0 ist die direkte Summe der Gruppen B_0^n, $n=1, 2,\ldots$ Da $\overline{K_{\mathfrak{G}}}$ in allen Dimensionen, K in den Dimensionen $0, 1,\ldots, N-1$ bezüglich J azyklisch ist, gilt nach dem Korollar von 7.6 für alle $n\geqslant 1$ $B_0^n(K_{\mathfrak{G}},J)=B^n(K^{\mathfrak{G}},J)=\Gamma^n(\mathfrak{G},J)$ und für $n=1, 2,\ldots, N-1$ $B_0^n(\mathsf{K},J)=B^n(\mathsf{K},J)$. Also ist

$$R_1(K_{\mathfrak{G}},J)=R(K_{\mathfrak{G}},J)=P(\mathfrak{G},J)$$

und

$$R_1^{N-1}(\mathsf{K},J)=R^{N-1}(\mathsf{K},J);$$

und $R_1^N(\mathsf{K},J)$ *unterscheidet sich von* $R^N(\mathsf{K},J)$ *nur in der Dimension* N, nämlich dadurch, daß der N-dimensionale Summand $B_0^N(\mathsf{K},J)$ statt $B^N(\mathsf{K},J)$ lautet (daß $R_1^N(\mathsf{K},J)$ ein Ring ist, d. h. daß das $\cup$-Produkt zweier Elemente der Dimensionen $n<N$ und $k<N$ mit $n+k=N$ stets in $B_0^N(\mathsf{K},J)$ liegt, hat sich von selbst ergeben).

13.8. Wir formulieren unsere Ergebnisse in folgender Weise.

Satz IV. *$\overline{\mathsf{K}}$ sei eine reguläre Überlagerung des simplizialen Komplexes K mit der Decktransformationengruppe $\mathfrak{G}$, und $\overline{\mathsf{K}}$ sei bezüglich des Ringes J mit Einselement in den Dimensionen $0, 1,\ldots, N-1$ azyklisch. Dann ist der Ring $R^{N-1}(\mathsf{K},J)$ dimensionstreu isomorph dem Ring $P^{N-1}(\mathfrak{G},J)$; seine Struktur ist also durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ (und durch J) bestimmt.*

Dabei bedeutet, um daran zu erinnern, R^n bzw. P^n den Ring, der aus dem Cohomologiering R bzw. P durch Nullsetzen aller Elemente der Dimensionen $>n$ entsteht.

Satz IV′. *Unter den Voraussetzungen von Satz IV ist ferner der Ring $R_1^N(\mathsf{K},J)$ dimensionstreu isomorph dem Ring $P^N(\mathfrak{G},J)$.*

$R_1^N(\mathsf{K},J)$ ist der Teilring von $R^N(\mathsf{K},J)$, der entsteht, wenn man sich in der Dimension N auf $B_0^N(\mathsf{K},J)$ beschränkt; dabei bezieht sich $B_0^N(\mathsf{K},J)$ auf die gegebene Überlagerung $\overline{\mathsf{K}}$ von K.

Die Ringisomorphismen werden durch die Abbildung Ω von $L(\mathfrak{G}, J)$ in $L(\mathsf{K}, J)$ (Formel (19) in 13.6) bewirkt.

13.9. *Fundamentalgruppe und Cohomologiering.* Ist K ein zusammenhängender simplizialer Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$, so ist die zur universellen Überlagerung $\bar{\mathsf{K}}$ von K gehörige Decktransformationengruppe zu $\mathfrak{F}$ isomorph. $\bar{\mathsf{K}}$ ist bezüglich eines jeden Koeffizientenbereiches in den Dimensionen 0 und 1 azyklisch (vgl. 11.5). Man erhält also als Spezialfälle der Sätze IV und IV':

Satz V. K *sei ein zusammenhängender simplizialer Komplex mit der Fundamentalgruppe* $\mathfrak{F}$, J *ein Ring mit Einselement; die universelle Überlagerung von* K *sei in den Dimensionen* $2, 3, \ldots, N-1$ *azyklisch bezüglich* J *Dann ist der Ring* $R^{N-1}(\mathsf{K}, J)$ *dimensionstreu isomorph zu* $P^{N-1}(\mathfrak{F}, J)$.

Satz V'. *Unter den Voraussetzungen von Satz V ist ferner der Ring* $R_1^N(\mathsf{K}, J)$ *dimensionstreu isomorph zu* $P^N(\mathfrak{F}, J)$. *Dabei bezieht sich der Summand* $B_0^N(\mathsf{K}, J)$ *von* $R_1^N(\mathsf{K}, J)$ *auf die universelle Überlagerung von K.*

Der Spezialfall $N = 2$ von V' lautet (vgl. Satz III):

Satz VI. *Ist* K *ein zusammenhängender simplizialer Komplex mit der Fundamentalgruppe* $\mathfrak{F}$, J *ein Ring mit Einselement, so ist der Ring* $R_1^2(\mathsf{K}, J)$ *dimensionstreu isomorph zu* $P^2(\mathfrak{F}, J)$.

Auf die Bedeutung des Summanden $B_0^2(\mathsf{K}, J)$, der sich auf die universelle Überlagerung bezieht, kommen wir in 14.4 zu sprechen. — Ist K ein Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$, und ist $\Gamma^2(\mathfrak{F}, J) = 0$, so ist das $\cup$-Produkt zweier 1-Cozyklen in K cohomolog 0; denn dieses Produkt liegt in einer Klasse aus $B_0^2(\mathsf{K}, J) \cong \Gamma^2(\mathfrak{F}, J)$.

§ 14. Asphärische Komplexe.

14.1. Ein simplizialer Komplex K heißt *„asphärisch* in der Dimension n“, wenn das zugehörige Polyeder Π — dessen Simplizialzerlegung K ist — folgende Eigenschaft hat: Jede stetige Abbildung der n-dimensionalen Sphäre S^n in Π ist nullhomotop, d. h. läßt sich stetig in eine Abbildung auf einen einzigen Punkt deformieren.

Aus einfachen Sätzen der Homotopietheorie folgt[24]): Wenn der zusammenhängende simpliziale Komplex K asphärisch ist in den Dimensionen $2, 3, \ldots, N-1$, so ist seine universelle Überlagerung in diesen Dimensionen (übrigens auch in den Dimensionen 0 und 1) azyklisch be-

[24]) Vgl. [2], Nr. 16.1 oder [5], Teil I, Satz IV, in Verbindung mit Teil II, Satz II.

züglich eines jeden Koeffizientenbereiches. Aus Satz V ergibt sich also (wegen der Bezeichnungen R^n usw. vgl. § 13):

Satz VII. *Der zusammenhängende simpliziale Komplex* K *mit der Fundamentalgruppe* $\mathfrak{F}$ *sei in den Dimensionen* $2, 3, \ldots, N-1$ *asphärisch. Dann ist für einen beliebigen Koeffizientenring* J *mit Einselement der Ring* $R^{N-1}(\mathsf{K}, J)$ *dimensionstreu isomorph zu* $P^{N-1}(\mathfrak{F}, J)$; *seine Struktur ist also durch die Fundamentalgruppe* $\mathfrak{F}$ (*und durch* J) *bestimmt.*

Aus Satz V′ folgt unter denselben Voraussetzungen, daß $R_1^N(\mathsf{K}, J)$ und $P^N(\mathfrak{F}, J)$ dimensionstreu isomorph sind. Dabei ist der N-dimensionale Summand $B_0^N(\mathsf{K}, J)$ mit Hilfe der universellen Überlagerung von K erklärt. Er läßt sich aber, bei beliebiger Koeffizientengruppe J, in K selbst unabhängig von jeder Überlagerung charakterisieren, und zwar mit Hilfe der „Sphärenbilder“.

14.2. Unter einem *n-Sphärenbild* in K versteht man einen ganzzahligen Zyklus in K, welcher simpliziales Bild des Grundzyklus der n-dimensionalen Sphäre S^n ist. Diejenigen ganzzahligen Homologieklassen der Dimension n in K, welche Sphärenbilder enthalten, bilden, wie man leicht zeigt[25]), eine Untergruppe $\mathfrak{S}^n(\mathsf{K})$ von $\mathfrak{B}^n(\mathsf{K}, \mathfrak{A})$.

Es sei nun K ein zusammenhängender simplizialer Komplex, der in den Dimensionen $2, 3, \ldots, N-1$ asphärisch ist, $\overline{\mathsf{K}}$ die universelle Überlagerung von K und U die Überlagerungsabbildung von $\overline{\mathsf{K}}$ auf K. Aus Sätzen der Homotopietheorie folgt[26]), daß $\overline{\mathsf{K}}$ in allen Dimensionen $\leqq N-1$ asphärisch ist, und hieraus[27]), daß $\mathfrak{B}^N(\overline{\mathsf{K}}, \mathfrak{A}) = \mathfrak{S}^N(\overline{\mathsf{K}})$ ist; ferner gilt, wie leicht zu sehen[28]), $U\mathfrak{S}^N(\overline{\mathsf{K}}) = \mathfrak{S}^N(\mathsf{K})$. Es ist also, wenn $\overline{\mathsf{K}}$ die genannte Voraussetzung erfüllt, $\mathfrak{S}^N(\mathsf{K}) = U\mathfrak{B}^N(\overline{\mathsf{K}}, \mathfrak{A})$.

J sei eine beliebige Abelsche Gruppe; sie bildet mit $\mathfrak{A}$ zusammen ein Paar (3.4, Fall (2)). Wegen $\mathfrak{B}^{N-1}(\overline{\mathsf{K}}, \mathfrak{A}) = 0$ (14.1) ist nach 7.6 die Untergruppe $B_0^N(\mathsf{K}, J)$ von $B^N(\mathsf{K}, J)$ dadurch charakterisiert, daß sie $U\mathfrak{B}^N(\overline{\mathsf{K}}, \mathfrak{A})$ annulliert, d. h. daß der Kroneckersche Index ihrer Elemente für alle Elemente von $U\mathfrak{B}^N(\overline{\mathsf{K}}, \mathfrak{A})$ gleich 0 ist. Also:

Wenn K *in den Dimensionen* $2, 3, \ldots, N-1$ *asphärisch ist, so ist* (*für eine beliebige Koeffizientengruppe* J) *die auf die universelle Überlagerung bezügliche Gruppe* $B_0^N(\mathsf{K}, J)$ *diejenige Untergruppe von* $B^N(\mathsf{K}, J)$, *welche* $\mathfrak{S}^N(\mathsf{K})$ *annulliert.*

---

25) [1], Nachtrag, Nr. 1 (S. 28).
26) Nach [5], Teil I, Satz IV.
27) [5], Teil II, S. 526, Behauptung 2).
28) Vgl. [2], Nr. 16.4.

14.3. Satz VII′. *Unter den Voraussetzungen von Satz VII ist ferner der Ring $R_1^N(\mathsf{K},J)$ dimensionstreu isomorph zu $P^N(\mathfrak{F},J)$. Dabei ist der Summand $B_0^N(\mathsf{K},J)$ von $R_1^N(K,J)$ diejenige Untergruppe von $B^N(\mathsf{K},J)$, welche $\mathfrak{S}^N(\mathsf{K})$ annulliert.*

Die Struktur von $R_1^N(\mathsf{K},J)$ ist also in diesem Falle durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von K (und durch J) bestimmt; oder: Wenn zwei Komplexe, die in den Dimensionen $2, 3, \ldots, N-1$ asphärisch sind, isomorphe Fundamentalgruppen haben, so sind ihre Ringe R_1^N isomorph. Dieser Satz läßt sich leicht mit den Methoden der Hurewiczschen Homotopietheorie beweisen[29]), ohne daß aber dabei über den algebraischen Zusammenhang zwischen R_1^N und $\mathfrak{F}$ etwas ausgesagt werden kann; dieser Zusammenhang wird durch den Ring $P^N(\mathfrak{F},J)$ gegeben.

14.4. Für $N=2$ trifft die in 14.2 festgestellte Bedeutung von $B_0^N(\mathsf{K},J)$ (bezüglich der universellen Überlagerung von K) auf *jeden* zusammenhängenden simplizialen Komplex K zu, unabhängig von weitern Voraussetzungen: *$B_0^2(\mathsf{K},J)$ ist für beliebige Koeffizientengruppe J diejenige Untergruppe von $B^2(\mathsf{K},J)$, welche $\mathfrak{S}^2(\mathsf{K})$, d. h. alle Kugelbilder annulliert.* Das ist die in 11.5 und 13.8 in Aussicht gestellte geometrische Charakterisierung von $B_0^2(\mathsf{K},J)$.

§ 15. Beispiele.

15.1. Die folgenden einfachen Beispiele sollen nur zur Illustration der Begriffe und Sätze dienen; auf weitergehende Anwendungen soll an anderer Stelle eingegangen werden.

Will man für spezielle Gruppen $\mathfrak{G}$ die Struktur von $P(\mathfrak{G},J)$ untersuchen oder sogar vollständig bestimmen, so kann dies auf zwei Arten geschehen: Man kann *erstens* von der algebraischen Definition von $P(\mathfrak{G},J)$ ausgehen, wie sie im Abschnitt I gegeben wurde; wir haben auf diesem direkten Wege in § 2 die algebraische Bedeutung der Gruppen $\Gamma^1(\mathfrak{G},J)$ und $\Gamma^2(\mathfrak{G},J)$, in 3.5 die Bedeutung des $\cup$-Produktes zweier Elemente von $\Gamma^1(\mathfrak{G},J)$ geklärt; auch 10.4 ist hierher zu rechnen, obwohl wir dort an Stelle der Definition den abstrakten Komplex $K_{\mathfrak{G}}$ verwenden (was nach 8.3 nur eine andere, allerdings bequemere Formulierung bedeutet). *Zweitens* kann man Eigenschaften von $P(\mathfrak{G},J)$ gewinnen, indem man ein spezielles, möglichst einfaches Polyeder (einen simplizialen Komplex) heranzieht, der eine azyklische Überlagerung mit der Deck-

---

[29]) Vgl. Fußnote [4]); ferner [1], Nachtrag.

transformationengruppe $\mathfrak{G}$ besitzt; die Beispiele 15.2 bis 15.5 gehören hierher, ferner das Korollar zu Satz III (11.5), in welchem aus der geometrischen Betrachtung eine algebraische Folgerung gezogen wird. — Die zweite Methode führt natürlich zu speziellen Resultaten von eher zufälligem Charakter.

Die Kenntnis von Eigenschaften des Ringes $P(\mathfrak{G},J)$ für eine gegebene Gruppe $\mathfrak{G}$ hat für die Topologie folgenden Wert: Man gewinnt Aussagen über die Cohomologiestruktur aller derjenigen zusammenhängenden Polyeder, welche eine reguläre Überlagerung mit der Decktransformationengruppe $\mathfrak{G}$ besitzen — oder deren Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ als homomorphes Bild besitzt —; diese Aussagen gelten nur für diejenigen Dimensionen $1, 2, \ldots, N$, in welchen die Überlagerung azyklisch ist, so wie dies in unsern Sätzen präzisiert ist. Ist das Polyeder eine orientierbare *Mannigfaltigkeit* der Dimension m, so übertragen sich die Aussagen auf den *Schnittring*, wobei zu beachten ist, daß im bekannten Isomorphismus des Cohomologie- und des Schnittringes der Cohomologiegruppe der Dimension n die Homologiegruppe[30]) der „Dualdimension" $m - n$, dem $\cup$-Produkt der Schnitt entspricht.[31])

15.2. *Ist $\mathfrak{G}$ eine abzählbare freie Gruppe, so sind bei beliebiger Koeffizientengruppe J alle $\Gamma^n(\mathfrak{G},J) = 0$ für $n \geqslant 2$.*

Beweis. Es gibt einen Streckenkomplex K mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; seine universelle Überlagerung ist in allen Dimensionen azyklisch bezüglich eines jeden Koeffizientenbereiches. Also ist nach Satz II für $n \geqslant 2$ $\Gamma^n(\mathfrak{G},J) \cong B^n(K,J) = 0$. — $\Gamma^1(\mathfrak{G},J)$ ist auf Grund von 2.1 leicht zu bestimmen.

Aus 13.9 (Satz VI) ergibt sich also: Ist K ein simplizialer Komplex mit freier Fundamentalgruppe, so ist in K das $\cup$-Produkt zweier 1-Cozyklen stets cohomolog 0.

15.3. *$\mathfrak{G}$ sei die freie Abelsche Gruppe vom Range r, J ein Ring mit Einselement. Dann ist $P(\mathfrak{G},J)$ isomorph dem Polynomring über J in r antikommutativen Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots, z_r$, welche Cohomologieklassen der Dimension 1 entsprechen*; d. h. dem Ring aller Polynome

$$\tau + \sum_{p=1}^{r} \sum_{(i_1,\ldots,i_p)} \tau_{i_1 i_2 \ldots i_p} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_p} \quad \text{mit } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant r$$

[30]) Hier ist die Homologiegruppe i. A. mit unendlichen Ketten zu bilden.
[31]) Vgl. hiezu die Bemerkungen in Nr. 3 der Einleitung.

mit Koeffizienten aus J, wobei $z_i z_j + z_j z_i = 0$ ist. $\Gamma^n(\mathfrak{G},J)$ ist also die direkte Summe von $\binom{r}{n}$ mit J isomorphen Gruppen ($= 0$, wenn $n > r$ ist).

Beweis. Der r-dimensionale Torus, das topologische Produkt von r Kreislinien, besitzt $\mathfrak{G}$ als Fundamentalgruppe; seine universelle Überlagerung, der r-dimensionale Euklidische Raum, ist in allen Dimensionen azyklisch. Also ist $P(\mathfrak{G},J)$ nach Satz IV zum Cohomologiering des Torus dimensionstreu isomorph, und dieser hat bekanntlich die angegebene Struktur.

15.4. $\mathfrak{G}$ sei die Gruppe der Ordnung 2, J der Ring, der aus 2 Elementen besteht. Dann ist $P(\mathfrak{G},J)$ isomorph dem Polynomring in einer Unbestimmten über J, welche einer 1-dimensionalen Cohomologieklasse entspricht.

Zum Beweis betrachte man einen N-dimensionalen reellen projektiven Raum P^N; seine Fundamentalgruppe ist $\mathfrak{G}$, seine universelle Überlagerung die Sphäre S^N, welche in den Dimensionen $< N$ azyklisch ist. Nach Satz IV ist $P^{N-1}(\mathfrak{G},J) \cong R^{N-1}(P^N,J)$, und letzterer ist isomorph dem Polynomring über J in einer Unbestimmten z, welche einer 1-dimensionalen Cohomologieklasse entspricht und für welche $z^N = 0$ ist. Da N beliebig ist, folgt daraus die Behauptung.

15.5. $\mathfrak{G}$ sei die Fundamentalgruppe der orientierbaren geschlossenen Fläche F_p vom Geschlecht $p \geqslant 1$, also durch $2p$ Erzeugende $x_1,\ldots,x_p$, $y_1,\ldots,y_p$ und die Relation $x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \ldots x_p y_p x_p^{-1} y_p^{-1} = e$ gegeben. Dann ist für jeden Ring J mit Einselement $P(\mathfrak{G},J)$ isomorph dem Polynomring über J in $2p+1$ Unbestimmten $z_1,\ldots,z_p, Z_1,\ldots,Z_p, z$, für welche $z_i z_j = Z_i Z_j = 0$, $z_i Z_j = -Z_j z_i = \delta_{ij} z$ gilt, und die z_i, Z_i entsprechen 1-dimensionalen Elementen von $P(\mathfrak{G},J)$, also z einem 2-dimensionalen. — Es ist also $\Gamma^n(\mathfrak{G},J) = 0$ für $n \geqslant 3$ und $\Gamma^2(\mathfrak{G},J) \cong J$, und dies gilt auch für eine beliebige Koeffizientengruppe J.

Beweis. F_p besitzt die Ebene als universelle Überlagerung, und diese ist in allen Dimensionen azyklisch, ganzzahlig oder bezüglich beliebiger Koeffizienten. Also ist, nach Satz IV, $P(\mathfrak{G},J)$ zu $R(F_p,J)$ dimensionstreu isomorph für jeden Ring J mit Einselement, und nach Satz II $\Gamma^n(\mathfrak{G},J) = B^n(F_p,J)$, $n = 1, 2, 3,\ldots$ für jede Koeffizientengruppe J.

15.6. Der zusammenhängende simpliziale Komplex K sei in den Dimensionen $2, 3,\ldots, N-1$ asphärisch und seine Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ sei *endlich. Dann hat, für beliebige Koeffizientengruppe* J, *jede Cohomologieklasse der Dimension* $\leqslant N-1$ *endliche Ordnung* (die Teiler der

Ordnung von $\mathfrak{F}$ ist); dasselbe gilt für diejenigen Cohomologieklassen der Dimension N, welche alle N-Sphärenbilder annullieren. *Die Gruppen* $B^n(\mathsf{K}, \mathfrak{A})$, $n = 1, 2, \ldots, N - 1$, *sind alle endlich.*

Beweis. Die universelle Überlagerung von K ist nach 14.1 in den Dimensionen $\leqslant N - 1$ ganzzahlig azyklisch; also ist nach Satz II und II' $B^n(\mathsf{K}, J) \cong \Gamma^n(\mathfrak{F}, J)$ für $n = 1, 2, \ldots, N-1$ und $B_0^N(\mathsf{K}, J) \cong \Gamma^N(\mathfrak{F}, J)$. B_0^N bezieht sich auf die universelle Überlagerung von K, hat also die in 14.2 angegebene Bedeutung. Die $\Gamma^n(\mathfrak{F}, J)$ haben nach 10.4 die genannten Endlichkeits-Eigenschaften.

(Eingegangen den 4. Dezember 1945.)

LITERATUR

[1] *H. Hopf*, Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comm. math. helv. 14 (1941/42) 257—309. — Nachtrag hiezu, Comm. math. helv. 15 (1943) 27—32.

[2] *H. Hopf*, Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören, Comm. math. helv. 17 (1944/45) 39—79.

[3] *E. Čech*, Les groupes de Betti d'un complexe infini, Fund. math. 25 (1935) 33—44.

[4] *Seifert-Threlfall*, Lehrbuch der Topologie (Leipzig und Berlin 1934).

[5] *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen, (I) Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935) 112—119; (II) ibidem, 521—528; (IV) Proc. Akad. Amsterdam 39 (1936) 215—224.

[6] *H. Whitney*, On products in a complex, Ann. of math. 39 (1938) 397—432.

[7] *H. Zassenhaus*, Lehrbuch der Gruppentheorie (Leipzig und Berlin 1937).

[8] *J. W. Alexander*, On the connectivity ring of an abstract space, Ann. of math. 37 (1936) 698—708.

[9] *S. Eilenberg*, Singular homology theory, Ann. of math. 45 (1944) 407—447.

[10] *N. E. Steenrod*, Universal homology groups, Amer. Journ. of math. 58 (1936) 661—701.

[11] *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935).