Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Note sur l'identité de deux ensembles de la famille F d'ensembles parfaits.

Autor: Piccard, Sophie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16903

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Note sur l'identité de deux ensembles de la famille F d'ensembles parfaits

Par Sophie Piccard, Neuchâtel

1. *Définitions.* Soient $k \geqslant 1$ et $n > k + 1$ deux entiers, soient $a_0, a_1, \ldots, a_k$ $(a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_k)$ $k + 1$ nombres de la suite $0, 1, \ldots, n - 1$. Considérons le système de numération à base n et soit $[a_0, a_1, \ldots, a_k]_n$ l'ensemble des nombres réels de l'intervalle fermé $< 0, \frac{a_k}{n-1} >$, dont le développement à base n peut s'écrire avec les seuls chiffres $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Posons, pour abréger, $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_n$. C'est un ensemble parfait que l'on peut construire de la façon suivante. Soit $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ et soit $\mathfrak{E}^{(1)} = (-\infty, \infty)$ l'ensemble des nombres réels. Appelons intervalle contigu de rang 0 de A l'ensemble $\mathfrak{E}^{(1)} - < 0, \frac{a_k}{n-1} >$. Soit, à présent, m un entier quelconque $\geqslant 1$. Si $a_k < n - 1$, appellons intervalle contigu de rang m de A tout intervalle ouvert (a, b) ayant pour extrémite *gauche*[1]) un nombre de la forme

$$a = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{a_i}{n^m} + \frac{a_k}{n^m(n-1)},$$

où $\alpha_j \varepsilon K$, $j = 1, 2, \ldots, m - 1$, et i est un nombre de la suite $0, 1, \ldots, k - 1$, et pour extrémité *droite*[1]) le nombre

$$b = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{a_{i+1}}{n^m}.$$

La longueur d'un tel intervalle est

$$\frac{a_{i+1} - a_i - 1}{n^m} + \frac{n - 1 - a_k}{n^m(n-1)}$$

et le nombre des intervalles contigus de rang m, lorsque $a_k < n - 1$, est égal à $(k + 1)^{m-1}k$. Si $a_k = n - 1$, appellons intervalle contigu de rang m de A tout intervalle ouvert (a, b) ayant pour extrémité *gauche* un nombre de la forme

$$a = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{a_i + 1}{n^m},$$

[1]) a et b étant les extrémités d'un intervalle linéaire δ, on dit que a est l'extrémité gauche de δ et que b est son extrémité droite, si $a < b$.

où $\alpha_j \in K$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, et i est un nombre de la suite $0, 1, \ldots, k-1$, tel que $a_{i+1} - a_i > 1$, et pour extrémité *droite* le nombre

$$b = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{a_{i+1}}{n^m} .$$

La longueur d'un tel intervalle est $\dfrac{a_{i+1} - a_i - 1}{n^m}$.

Eliminons successivement de l'ensemble $\mathfrak{E}^{(1)}$ les intervalles contigus de rangs $0, 1, 2, \ldots$. A est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{E}^{(1)}$ qui subsistent après toutes ces éliminations. On dit que A est construit sur l'intervalle $< 0, \dfrac{a_k}{n-1} >$.

La famille F se compose de tous les ensembles du type A que nous venons de définir.

2. Soient k, l, m, n quatre entiers, tels que $k \geqslant 1$, $l > k+1$, $m \geqslant 1$, $n > m+1$, soient $a_0, a_1, \ldots, a_k$ $(a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_k)$ $k+1$ nombres de la suite $0, 1, \ldots, l-1$, soient $b_0, b_1, \ldots, b_m$ $(b_0 = 0 < b_1 < \cdots < b_m)$ $m+1$ nombres de la suite $0, 1, \ldots, n-1$ et soit $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$, $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$. A et B sont deux ensembles quelconques de la famille F. Posons $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$. Il est évident que si $l = n$ et si $K = K'$, on a $A = B$. Mais la réciproque peut être en défaut, comme l'a montré M. Henri Cartan. Ainsi, par exemple, on a $[0, 2]_3 = [0, 2, 6, 8]_9$. Dans le compte-rendu qu'il a fait de mon travail «*Sur des ensembles parfaits*»[2]), M. Henri Cartan a énoncé les deux résultats suivants:

1) Soit $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ un ensemble quelconque de la famille F, soit $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, soit p un entier quelconque > 1, soit $m = (k+1)^p - 1$, soit $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ l'ensemble des nombres entiers $\geqslant 0$ et $< l^p$ dont le développement à base l comprend p chiffres pris dans K et soit $n = l^p$. Alors $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n = A$.

2) Soient $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ deux ensembles de la famille F. Soit $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$. Alors, si $A = B$, il existe des entiers p, q, r, s, c_0, $c_1, \ldots, c_s$, tels que $1 \leqslant s < r-1$, $r^p = l$, $r^q = n$, $c_0 = 0 < c_1 < \cdots < c_s < r$, que $A = B = [c_0, c_1, \ldots, c_s]_r$ et que $K(K')$ est l'ensemble des entiers $\geqq 0$ et $< l$ $(\geqslant 0$ et $< n)$ dont le développement à base r comprend $p(q)$ chiffres pris dans la suite $c_0, c_1, \ldots, c_s$.

---

[2]) Bulletin des Sciences mathématiques, Deuxième série, tome LXVII, janvier-février 1943.

Ce résultat général a été obtenu par M. Henri Cartan, en collaboration avec Mlle Hélène Cartan.

Nous avons repris la question de l'identité de deux ensembles de la famille F et nous avons établi un critère général dont nous déduisons le critère 2 de M. H. Cartan. La démonstration de notre critère repose sur des lemmes, dont le premier est le critère 1 de M. H. Cartan.

3. *Lemme 1.* Quel que soit l'ensemble $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ de la famille F et quel que soit l'entier $p > 1$, si l'on pose $m = (k+1)^p - 1$, $n = l^p$ et si $b_0, b_1, \ldots, b_m$ $(b_0 = 0 < b_1 < \ldots < b_m)$ est la suite composée de tous les nombres de la forme $l^{p-1}\alpha_1 + l^{p-2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_p$, où $\alpha_i \in K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, p$, on a $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n = A$.

Demonstration. Supposons les conditions du lemme 1 satisfaites et soit $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$.

Soit a un nombre quelconque de l'ensemble A et soit

$$a = \frac{\alpha_1}{l} + \frac{\alpha_2}{l^2} + \cdots \qquad (\alpha_i \in K,\ i = 1, 2, \ldots)$$

son développement à base l. On peut écrire

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\alpha_1}{l} + \frac{\alpha_2}{l^2} + \cdots + \frac{\alpha_p}{l^p}\right) + \left(\frac{\alpha_{p+1}}{l^{p+1}} + \frac{\alpha_{p+2}}{l^{p+2}} + \cdots + \frac{\alpha_{2p}}{l^{2p}}\right) + \cdots \\ &= \frac{l^{p-1}\alpha_1 + l^{p-2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_p}{l^p} + \frac{l^{p-1}\alpha_{p+1} + l^{p-2}\alpha_{p+2} + \cdots + \alpha_{2p}}{l^{2p}} + \cdots \\ &= \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots, \end{aligned}$$

en posant $\beta_i = l^{p-1}\alpha_{(i-1)p+1} + l^{p-2}\alpha_{(i-1)p+2} + \cdots + \alpha_{ip}$, $i = 1, 2, \ldots$.

On a $\beta_i \in K'$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots$ et, par conséquent, $a \in B$. Cela étant quel que soit le nombre a de l'ensemble A, on voit que 1) $A \subset B$.

Soit, à présent, b un nombre quelconque de l'ensemble B et soit

$$b = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots \quad (b_i \in K',\ \ i = 1, 2, \ldots)$$

son développement à base n.

De la définition des nombres de K', il résulte l'existence d'une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de nombres entiers, tels que $\alpha_i \varepsilon K$, $i = 1, 2, \ldots$, et que

$$\beta_i = l^{p-1}\alpha_{(i-1)p+1} + l^{p-2}\alpha_{(i-1)p+2} + \cdots + \alpha_{ip}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Et comme $n = l^p$, on a

$$b = \frac{\alpha_1}{l} + \frac{\alpha_2}{l^2} + \cdots .$$

Donc $b \varepsilon A$.

Cela étant quel que soit l'élément b de B, on voit que 2) $B \subset A$.

Des deux inclusions 1) et 2), il résulte que $A = B$ et le lemme 1 est démontré.

4. *Lemme* 2. Si deux ensembles $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ de la famille F définis au § 2 ont les mêmes intervalles contigus de rangs 0, 1 et 2, alors $k=m$, $l=n$ et $a_i=b_i$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Démonstration. Soient A et B deux ensembles de la famille F qui satisfont la condition du lemme 2.

Comme A et B ont le même intervalle contigu de rang zéro, ces deux ensembles sont construits sur un même intervalle. Or, A est construit sur l'intervalle $< 0, \frac{a_k}{l-1} >$ et B est construit sur l'intervalle $< 0, \frac{b_m}{n-1} >$. On doit donc avoir 1) $\frac{a_k}{l-1} = \frac{b_m}{n-1}$.

Deux cas sont maintenant à distinguer:

a) $a_k < l - 1$ et $b_m < n - 1$.

Les intervalles contigus de rang un de A sont alors

$$\left(\frac{a_i}{l} + \frac{a_k}{l(l-1)}, \frac{a_{i+1}}{l}\right), \quad i = 0, 1 \ldots, k-1 ,$$

et les intervalles contigus de rang un de B sont

$$\left(\frac{b_j}{n} + \frac{b_m}{n(n-1)}, \frac{b_{j+1}}{n}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1 .$$

Puisque A et B ont, par hypothèse, les mêmes intervalles contigus de rang un, on doit avoir 2) $k = m$ et 3) $\frac{a_i}{l} = \frac{b_i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

De 2) et 1), résulte 4) $\frac{a_k}{l-1} = \frac{b_k}{n-1}$ et de 3), pour $i = k$, résulte 5) $\frac{a_k}{l} = \frac{b_k}{n}$. Or, de 4) et 5), il découle que 6) $l=n$. Et de 6) et de 3), il découle que $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

On voit donc que, dans le cas a), il suffit que A et B aient les mêmes intervalles contigus de rangs 0 et 1 pour que $l = n$, $k = m$, $a_i = b_i$,

$i = 1, 2, \ldots, k$ et, par suite, que les deux ensembles A et B soient confondus.

b) On a l'une au moins des égalités: $a_k = l - 1$, $b_m = n - 1$. L'égalité 1) implique alors que l'on a simultanément $a_k = l - 1$ et $b_m = n - 1$.

Soient 7) $\delta_{11}, \delta_{12}, \ldots, \delta_{1r}$, où $r \geqslant 1$, les intervalles contigus de rang 1 de A pris dans un ordre tel que δ_{1i} est situé *à gauche*[3]) de δ_{1j}, si $i < j$.

D'après nos hypothèses sur A et B, la suite 7) constitue également l'ensemble des intervalles contigus de rang 1 de B. Il existe donc, d'une part, r indices $t_1, t_2, \ldots, t_r$ $(0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_r \leqslant k - 1)$ et, d'autre part, r indices $s_1, s_2, \ldots, s_r$ $(0 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_r \leqslant m - 1)$, tels que

$$\delta_{1i} = \left(\frac{a_{t_i} + 1}{l}, \frac{a_{t_i+1}}{l}\right) = \left(\frac{b_{s_i} + 1}{n}, \frac{b_{s_i+1}}{n}\right),$$

$$a_{t_i+1} - a_{t_i} > 1, \quad b_{s_i+1} - b_{s_i} > 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

On doit donc avoir

$$8) \quad \frac{a_{t_i} + 1}{l} = \frac{b_{s_i} + 1}{n} \quad \text{et} \quad 9) \quad \frac{a_{t_i+1}}{l} = \frac{b_{s_i+1}}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Les intervalles contigus de rang 2 de A sont au nombre de $(k+1)r$ et ce sont les intervalles

$$\delta_{2ij} = \left(\frac{a_j}{l} + \frac{a_{t_i} + 1}{l^2}, \frac{a_j}{l} + \frac{a_{t_i+1}}{l^2}\right), \quad i=1, 2, \ldots, r; \; j=0, 1, \ldots, k,$$

alors que les intervalles contigus de rang 2 de B sont au nombre de $(m + 1)r$ et ce sont les intervalles

$$\delta'_{2ij} = \left(\frac{b_j}{n} + \frac{b_{s_i} + 1}{n^2}, \frac{b_j}{n} + \frac{b_{s_i+1}}{n^2}\right), \quad i=1, 2, \ldots, r, j=0, 1, \ldots, m.$$

Et comme, d'après nos hypothèses, A et B ont les mêmes intervalles contigus de rang 2, on doit avoir, d'une part 10) $k = m$ et d'autre part, comme $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ et que $b_0 < b_1 < \cdots < b_m$, on doit avoir

$$11) \quad \delta_{2ij} = \delta'_{2ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \; j = 0, 1, \ldots, k.$$

---

[3]) C'est-à-dire que l'extrémité droite de δ_{1i} est un nombre inférieur à l'extrémité gauche de δ_{1j}.

Soit i un entier quelconque compris entre 1 et r. On a, d'après 8) et 9),

$$12)\quad \frac{a_{t_i+1} - a_{t_i} - 1}{l} = \frac{b_{s_i+1} - b_{s_i} - 1}{n}$$

et, d'après 11), on a

$$13)\quad \frac{a_j}{l} + \frac{a_{t_i} + 1}{l^2} = \frac{b_j}{n} + \frac{b_{s_i} + 1}{n^2}$$

et

$$14)\quad \frac{a_j}{l} + \frac{a_{t_i+1}}{l^2} = \frac{b_j}{n} + \frac{b_{s_i+1}}{n^2}\ , \quad j = 0, 1, \ldots, k\ .$$

Attribuons à j une valeur fixe quelconque comprise entre 0 et k et soustrayons membre à membre les deux égalités correspondantes 14) et 13). Il vient

$$15)\quad \frac{a_{t_i+1} - a_{t_i} - 1}{l^2} = \frac{b_{s_i+1} - b_{s_i} - 1}{n^2}\ .$$

Divisons les égalités 12) et 15) membre à membre. Il vient 16) $l = n$. Donc, d'après 8), on a 17) $a_{t_i} = b_{s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$ et, d'après 13), 16) et 17), on a 18) $a_j = b_j$, $j = 0, 1, \ldots, k$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.

5. *Lemme 3.* Soient $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ deux ensembles de la famille F et soit $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_k$ et $b_0 = 0 < b_1 < \cdots < b_m$. Alors, si $l = n$ et si $A = B$, on a nécessairement $k = m$ et $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Démonstration. En effet, soient A et B deux ensembles de la famille F qui satisfont les conditions du lemme 3.

Comme $A = B$, ces deux ensembles sont construits sur un même intervalle et, par conséquent, $\frac{a_k}{n-1} = \frac{b_m}{n-1}$, donc $a_k = b_m$. D'autre part, l'ensemble des intervalles contigus de A se confond avec l'ensemble des intervalles contigus de B . Deux cas sont maintenant à distinguer:

a) $a_k = n - 1$.

Alors, quel que soit l'entier $t \geqslant 1$ et quel que soit l'intervalle contigu δ de rang t de A ou de B, cet intervalle est de longueur $\geqslant \frac{1}{n^t}$ et $\leqslant \frac{n-2}{n^t}$ et, comme $\frac{1}{n^t} > \frac{n-2}{n^{t+1}}$, tout intervalle contigu de rang t de A ou de B est de longueur supérieure à celle de tout intervalle contigu de rang $\geqslant t + 1$ aussi bien de A que de B. Il s'ensuit que, quel que soit l'entier $t \geqslant 1$, les deux ensembles A et B ont les mêmes intervalles contigus de

rang t. Et, comme A et B sont construits sur le même intervalle, d'après le lemme 3, $k = m$ et $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

b) $a_k < n - 1$, *donc aussi* $b_m < n - 1$.

Alors A possède k intervalles contigus de rang 1, dont les extrémités droites sont les nombres $\frac{a_i}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Comme l'ensemble des intervalles contigus de A se confond avec l'ensemble des intervalles contigus de B, il en est de mêmes des ensembles formés des extrémités droites de ces deux familles d'intervalles. Or, un intervalle contigu de B a pour extrémité droite un nombre de la forme

$$\frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_t}{n^t}, \text{ où } \beta_i \in K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\},\ i = 1, 2, \ldots, t, \text{ et } \beta_t > 0$$

et comme, dans aucun système de numération, un même nombre rationnel ne saurait posséder deux développements limités distincts, on ne saurait avoir l'égalité

$$\frac{a_i}{n} = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_t}{n^t}$$

que si $t = 1$ et $a_i = \beta_1$. Donc, quel que soit l'indice $i = 1, 2, \ldots, k$, il lui correspond un indice j de la suite $1, 2, \ldots, m$, tel que $a_i = b_j$.

Par un raisonnement tout à fait analogue, en partant des intervalles contigus de rang 1 de B, on démontre que, quel que soit l'indice $j = 1, 2, \ldots, m$, il lui correspond un indice i de la suite $1, 2, \ldots, k$, tel que $b_j = a_i$.

Il en résulte que les deux suites $a_1, a_2, \ldots, a_k$ et $b_1, b_2, \ldots, b_m$ comprennent un nombre égal $k = m$ de termes et se composent des mêmes nombres et, comme $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$, on a bien $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, c. q. f. d.

6. *Lemme* 4. Soient $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ deux ensembles de la famille F. Alors, si $A = B$, il existe deux entiers p et q, tels que $l^p = n^q$.

Démonstration. Soit $A = B$. Alors ces deux ensembles ont les mêmes intervalles contigus et il existe une suite finie $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t (t \geqslant 1)$ de nombres réels positifs distincts, tels que chacun de ces nombres est la longueur d'un intervalle contigu de rang 1 de l'un au moins des deux ensembles A ou B, la longueur de tout intervalle contigu de rang 1 de A et de B figurant parmi les nombres de cette suite.

Comme l'ensemble des intervalles contigus de A se confond avec l'ensemble des intervalles contigus de B, chacun des nombres δ_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ est la longueur d'un intervalle contigu aussi bien de A que de B (pas nécessairement du même rang).

La longueur de tout intervalle contigu de A est un nombre de la forme

$$\frac{\delta_i}{l^j} \; (i = 1, 2, \ldots, t \; ; \quad j = 1, 2, \ldots)$$

et la longueur de tout intervalle contigu de B est un nombre de la forme

$$\frac{\delta_i}{n^j} \; (i = 1, 2, \ldots, t \; ; \quad j = 1, 2, \ldots) \; .$$

Et comme l'ensemble des intervalles contigus de A se confond avec celui des intervalles contigus de B, il existe, pour tout couple donné d'indices i et j $(1 \leqslant i \leqslant t, j \geqslant 1)$ un couple d'indices u_{ij}, v_{ij} $(1 \leqslant u_{ij} \leqslant t, v_{ij} \geqslant 1)$, tel que $\dfrac{\delta_i}{l^j} = \dfrac{\delta_{u_{ij}}}{n^{v_{ij}}}$. Attribuons à i une valeur fixe quelconque comprise entre 1 et t et faisons varier j de 1 à l'infini. Comme u_{ij} ne peut prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, t$ qui sont en nombre fini, la suite $u_{i1}, u_{i2}, \ldots$ comprend une infinité de nombres égaux.

Soit $u_{ij_1} = u_{ij_2} = \cdots = \alpha$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots$, $1 \leqslant \alpha \leqslant t$.

D'après ce qui précède, on a 1) $\dfrac{\delta_i}{l^{j_1}} = \dfrac{\delta_\alpha}{n^{v_{ij_1}}}$ et 2) $\dfrac{\delta_i}{l^{j_2}} = \dfrac{\delta_\alpha}{n^{v_{ij_2}}}$.

Divisons membre à membre les égalités 1) et 2). Il vient, en posant $j_2 - j_1 = p$ et $v_{ij_2} - v_{ij_1} = q$, $l^p = n^q$, ce qui démontre le lemme 4.

7. *Remarque 1.* On voit sans peine que si $l, n, p, q, p' > p, q' > q$ sont des entiers positifs tels que $l^p = n^q$, $l^{p'} = n^{q'}$ et si p est le plus petit entier positif, tel que l^p est égal à une puissance entière de n, alors il existe en entier $t > 1$, tel que $p' = tp, q' = tq$.

8. *Proposition I.* Soient $A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l$ et $B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n$ deux ensembles de la famille F et soit $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ et $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$. Alors, si $A = B$, il existe deux entiers positifs p et q, tels que $l^p = n^q$ et que l'ensemble K_1 des entiers de la forme

$$l^{p-1}\alpha_1 + l^{p-2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_p \; , \qquad \text{où} \quad \alpha_i \in K \; , \quad i = 1, 2, \ldots, p \; ,$$

se confond avec l'ensemble K_1' des entiers de la forme

$$n^{q-1}\beta_1 + n^{q-2}\beta_2 + \cdots + \beta_q \; , \qquad \text{où} \quad \beta_j \in K' \; , \quad j = 1, 2, \ldots, q \; .$$

Démonstration. Soit $A = B$. L'existence des deux entiers positifs p et q, tels que $l^p = n^q$, résulte alors du lemme 4.

Soit $C(D)$ l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire, dans le système de numération à base $l^p(n^q)$, au moyen des seuls chiffres pris dans l'ensemble $K_1(K_1')$. D'après le lemme 1, on a $A = C$ et $B = D$ et, par conséquent, $C = D$. Et comme $l^p = n^q$, il résulte du lemme 3 que $K_1 = K_1'$, c. q. f. d.

9. *Remarque 2.* Soient l et n deux entiers positifs. Alors, s'il existe deux entiers positifs p et q, tels que $l^p = n^q$, il existe aussi trois entiers positifs r, p_1 et q_1 tels que p_1 et q_1 sont premiers entre eux et que $l = r^{q_1}$ et $n = r^{p_1}$.

En effet, soient l, n, p, q quatre entiers positifs, tels que 1) $l^p = n^q$. Soit $D(p, q) = d$ le plus grand commun diviseur de p et q et soit $p = p_1 d$, $q = q_1 d$. p_1 et q_1 sont deux entiers positifs premiers entre eux. Envisageons les décompositions en facteurs premiers des deux nombres l et n. L'égalité 1) implique que tout facteur premier qui fait partie de la décomposition de l fait également partie de la décomposition de n et vice versa. Il existe donc un entier $h \geqslant 1$ et h nombres premiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, tels que $l = \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \ldots \alpha_h^{\mu_h}$ et $n = \alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \ldots \alpha_h^{\nu_h}$, où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ sont des entiers positifs.

L'égalité 1) peut donc s'écrire $\alpha_1^{\mu_1 p} \alpha_2^{\mu_2 p} \ldots \alpha_h^{\mu_h p} = \alpha_1^{\nu_1 q} \alpha_2^{\nu_2 q} \ldots \alpha_h^{\nu_h q}$ et elle implique que 2) $\dfrac{\nu_1}{\mu_1} = \dfrac{\nu_2}{\mu_2} = \cdots = \dfrac{\nu_h}{\mu_h} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{p_1}{q_1}$.

Comme p_1 et q_1 sont premiers entre eux, il existe, d'après 2), h entiers positifs $k_1, k_2, \ldots, k_h$, tels que $\mu_i = k_i q_1$ et $\nu_i = k_i p_1$, $i = 1, 2, \ldots, h$. Mais alors $l = (\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \ldots \alpha_h^{k_h})^{q_1}$ et $n = (\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \ldots \alpha_h^{k_h})^{p_1}$. Posons $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \ldots \alpha_h^{k_h} = r$. C'est un entier positif.

D'après ce qui précède, on a $l = r^{q_1}$ et $n = r^{p_1}$, ce qui justifie la remarque 2.

10. *Remarque 3.* Si k, l, m, n, $a_0, a_1, \ldots, a_k$, $b_0, b_1, \ldots, b_m$ sont des entiers, tels que $1 \leqslant k < l - 1$, $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_k \leqslant l - 1$, $1 \leqslant m < n - 1$, $b_0 = 0 < b_1 < \cdots < b_m \leqslant n - 1$ et que

$$A = [a_0, a_1, \ldots, a_k]_l = B = [b_0, b_1, \ldots, b_m]_n,$$

alors il existe quatre entiers p_1, q_1, r, s, tels que p_1 et q_1 sont premiers entre eux, $1 \leqslant s < r$, $l = r^{q_1}$, $n = r^{p_1}$, $k + 1 = s^{q_1}$, $m + 1 = s^{p_1}$ et on a:

$$a_i = b_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, \min.\,(k\,, m)\,,$$

$$a_{\alpha_1 s^{q_1-1} + \alpha_2 s^{q_1-2} + \cdots + \alpha_{q_1}} = r^{q_1-1} a_{\alpha_1} + r^{q_1-2} a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_{q_1}}\,,$$

quels que soient les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q_1}$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s-1$, et

$$b_{\beta_1 s^{p_1-1} + \beta_2 s^{p_1-2} + \cdots + \beta_{p_1}} = r^{p_1-1} a_{\beta_1} + r^{p_1-2} a_{\beta_2} + \cdots + a_{\beta_{p_1}}\,,$$

quels que soient les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_1}$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s-1$.

D'après le lemme 3, il suffit de considérer le cas où $l \neq n$. Supposons, pour fixer les idées, que $l < n$. Le cas où $n < l$ se traite de façon tout à fait analogue.

Posons $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, $K' = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ et soit $A = B$. Donc, d'après la proposition I, il existe deux entiers positifs p et q, tels que 1) $l^p = n^q$ et que l'ensemble K_1 des nombres entiers de la forme $l^{p-1}\alpha_1 + l^{p-2}\alpha_2 + \cdots + \alpha_p$, où $\alpha_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, p$, coïncide avec l'ensemble K_1' des entiers de la forme $n^{q-1}\beta_1 + n^{q-2}\beta_2 + \cdots + \beta_q$, où $\beta_j \in K'$, $j = 1, 2, \ldots, q$. Or, la puissance de l'ensemble K_1 est évidemment égale à $(k+1)^p$ et la puissance de l'ensemble K_1' est égale à $(m+1)^q$. Et, comme $K_1 = K_1'$, on a 2) $(k+1)^p = (m+1)^q$.

Comme, par hypothèse, $l < n$, on a $p > q$.

Soit $D(p,q) = d$, $p = p_1 d$, $q = q_1 d$. p_1 et q_1 sont deux entiers positifs premiers entre eux et $p_1 > q_1$. Soit 3) $p_1 = tq_1 + q_2$, où $t \geqslant 1$ et q_2 $(1 \leqslant q_2 < q_1)$ sont deux entiers. Comme p_1 et q_1 sont premiers entre eux, q_1 et q_2 sont également premiers entre eux. D'après 1), 2) et la remarque 2, il existe deux entiers positifs r et s, tels que 4) $l = r^{q_1}$, 5) $n = r^{p_1}$, 6) $k + 1 = s^{q_1}$, 7) $m + 1 = s^{p_1}$. Et comme $k + 1 < l$ et $m + 1 < n$, on a forcément $s < r$.

Posons $s^{q_1 p} = s^{p_1 q} = N$. Soit $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ $(c_0 < c_1 < \cdots < c_{N-1})$ une suite formée de tous les nombres de K_1 rangés par ordre de grandeur croissante et soit $d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}$ $(d_0 < d_1 < \cdots < d_{N-1})$ une suite formée de tous les nombres de l'ensemble K_1', rangés par ordre de grandeur croissante.

Par définition de l'ensemble K_1, on a

$$8)\quad c_{\alpha_1 s^{q_1\beta} + \alpha_2 s^{q_1(\beta-1)} + \cdots + \alpha_\beta s^{q_1} + \alpha_{\beta+1}} = l^\beta a_{\alpha_1} + l^{\beta-1} a_{\alpha_2} + \cdots + l a_{\alpha_\beta} + a_{\alpha_{\beta+1}}.$$

quel que soit l'entier β de la suite $0, 1, \ldots, p-1$ et quels que soient les entiers α_i $(i = 1, 2, \ldots, \beta+1)$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s^{q_1} - 1$.

En particulier, 9) $c_i = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$; d'autre part, quel que soit l'entier β $(1 \leqslant \beta \leqslant p-1)$, on a 10) $c_{s^{q_1}\beta} = l^\beta a_1$ et, quels que soient les entiers α, β, γ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s^{q_1} - 1$, $\beta = 1, 2, \ldots, p-1$, $\gamma = 1, 2, \ldots, s^{q_1\beta} - 1)$, on a 11) $c_{\alpha s^{q_1}\beta + \gamma} = l^\beta a_\alpha + c_\gamma$.

De même, par définition de K_1', on a

$$12)\quad d\gamma_1 s^{p_1\delta} + \gamma_2 s^{p_1(\delta-1)} + \cdots + \gamma_\delta s^{p_1} + \gamma_{\delta+1} =$$
$$= n^\delta b_{\gamma_1} + n^{\delta-1} b_{\gamma_2} + \cdots + n b_{\gamma\delta} + b_{\gamma\delta+1},$$
$$\delta = 0, 1, \ldots, q-1; \quad \gamma_j = 0, 1, \ldots, s^{p_1} - 1, \; j = 1, 2, \ldots, \delta + 1.$$

En particulier,

13) $d_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$,

14) $d_{s^{p_1}\delta} = n^\delta b_1$, quel que soit $\delta = 1, 2, \ldots, q-1$,

et

15) $d_{\gamma s^{p_1}\delta + \mu} = n^\delta b_\gamma + d_\mu$, quels que soient

$\gamma = 1, 2, \ldots, s^{p_1} - 1$, $\delta = 1, 2, \ldots, q-1$ et $\mu = 1, 2, \ldots, s^{p_1\delta} - 1$.

Comme $K_1 = K_1'$, on a 16) $d_i = c_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Donc d'après 9) et 13), on a 17) $b_i = a_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$ et, quel que soit l'indice $i = \alpha_1 s^{q_1\beta} + \alpha_2 s^{q_1(\beta-1)} + \cdots + \alpha_{\beta+1}$, où β est un nombre de la suite $0, 1, \ldots, t$, α_j prend l'une des valeurs $0, 1, \ldots, s^{q_1} - 1$, quel que soit $j = 1, 2, \ldots, \beta + 1$, et $\alpha_1 \leqslant s^{q_2} - 1$, si $\beta = t$ (donc $0 \leqslant i \leqslant m$), on a, d'après 13), 16) et 8),

$$18)\quad b_i = d_i = c_i = l^\beta a_{\alpha_1} + l^{\beta-1} a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_{\beta+1}}.$$

D'autre part, d'après 14) et 17), on a 19) $d_{s^{p_1}\delta} = n^\delta a_1$, $\delta = 1, 2, \ldots, q-1$.

Montrons que, quel que soit l'entier $h = 1, 2, \ldots, q_1 - 1$, on a 20) $a_{s^h} = r^h a_1$. En effet, nous avons déjà remarqué que les nombres q_1 et q_2 sont premiers entre eux. Donc, quel que soit l'entier h de la suite $1, 2, \ldots, q_1 - 1$, il existe un entier h' faisant partie de la même suite et tel que $q_2 h' \equiv h \pmod{q_1}$.

Soit h'' l'entier positif défini par l'égalité 21) $q_2 h' = h + q_1 h''$. Comme $q_1 > q_2$, on a évidemment $h' > h''$.

D'après 19), 16), 3), 21) et 11), on a

$$d_{(s^{p_1})h'} = n^{h'}a_1 = c_{(s^{p_1})h'} = c_{s^{(tq_1+q_2)h'}} = c_{s^{tq_1h'+q_2h'}} = c_{s^{q_1(th'+h'')+h}}$$
$$= c_{s^h s^{q_1(th'+h'')}} = l^{th'+h''}a_{s^h} .$$

Donc

$$n^{h'}a_1 = l^{th'+h''}a_{s^h} , \text{ soit, d'après 5) et 4), } r^{p_1h'}a_1 = r^{q_1(th'+h'')}a_{s^h}$$

ou encore, d'après 3), $r^{(tq_1+q_2)h'}a_1 = r^{q_1(th'+h'')}a_{s^h}$, soit d'après 21) $r^{tq_1h'+q_1h''+h}a_1 = r^{q_1th'+q_1h''}a_{s^h}$, d'où 20) $a_{s^h} = r^h a_1$, ce que nous voulions démontrer.

Soit à présent, h un entier fixe quelconque compris entre 1 et $q_1 - 1$, soit λ un entier compris entre 1 et $s - 1$ et soit μ un entier de la suite $0, 1, \ldots, s^h - 1$.

Montrons que 22) $a_{\lambda s^h+\mu} = r^h a_\lambda + a_\mu$.

En effet, comme $\lambda < s$ et $\mu < s^h$, on a $\lambda s^h + \mu < s^{h+1} \leqslant s^{q_1}$.

Donc, d'après 11), $c_{(\lambda s^h+\mu)s^{q_1(th'+h'')}} = l^{th'+h''}a_{\lambda s^h+\mu}$.

Or, d'après 16), 21) et 3),

$$c_{(\lambda s^h+\mu)s^{q_1(th'+h'')}} = d_{(\lambda s^h+\mu)s^{q_1(th'+h'')}} = d_{\lambda s^{p_1h'}+\mu s^{q_1(th'+h''}} .$$

Et comme $\mu s^{q_1(th'+h'')} < s^{p_1h'}$, on a, d'après 15), 17), 16) et 11),

$$d_{\lambda s^{p_1h'}+\mu s^{q_1(th'+h'')}} = n^{h'}b_\lambda + d_{\mu s^{q_1(th'+h'')}} = n^{h'}a_\lambda + c_{\mu s^{q_1(th'+h'')}} =$$
$$= n^{h'}a_\lambda + l^{th'+h''}a_\mu .$$

On a donc $n^{h'}a_\lambda + l^{th'+h''}a_\mu = l^{th'+h''}a_{\lambda s^h+\mu}$.

D'où, d'après 4), 5), 3) et 21), 22) $r^h a_\lambda + a_\mu = a_{\lambda s^h+\mu}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte sans peine des relations 20) et 22) que, quel que soit l'entier β de la suite $1, 2, \ldots, q_1 - 1$ et quels que soient les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\beta+1}$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s - 1$, on a

$$23) \quad a_{\alpha_1 s^\beta + \alpha_2 s^{\beta-1} + \cdots + \alpha_{\beta+1}} = r^\beta a_{\alpha_1} + r^{\beta-1}a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_{\beta+1}} .$$

Donc tous les nombres $a_s, a_{s+1}, \ldots, a_k$ ont un développement à base r qui peut s'écrir à l'aide des seuls chiffres $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$.

Et comme, en particulier, $a_{is^{q_1-1}} = r^{q_1-1}a_i$, $i = 1, 2, \ldots, s - 1$, et que $a_j < l = r^{q_1}$, quel que soit $j = 0, 1, \ldots, k$, il s'ensuit que $a_i < r$, $i = 0, 1, \ldots, s - 1$.

Ainsi $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$ sont s nombres de la suite $0, 1, \ldots, r-1$. Posons $\mathfrak{K} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}\}$.

D'après ce qui précède, K est l'ensemble des nombres de la forme

$$r^{q_1-1}\varphi_1 + r^{q_1-2}\varphi_2 + \cdots + \varphi_{q_1}, \quad \text{où} \quad \varphi_i \in \mathfrak{K}, \quad i = 1, 2, \ldots, q_1,$$

et

$$a_{\alpha_1 s^{q_1-1} + \alpha_2 s^{q_1-2} + \cdots + \alpha_{q_1}} = r^{q_1-1} a_{\alpha_1} + r^{q_1-2} a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_{q_1}},$$

quels que soient les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q_1}$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s-1$. De 18), 23) et 4), on déduit sans peine que K' est l'ensemble des nombres de la forme

$$r^{p_1-1}\psi_1 + r^{p_1-2}\psi_2 + \cdots + \psi_{p_1}, \quad \text{où} \quad \psi_j \in \mathfrak{K}, \quad j = 1, 2, \ldots, p_1,$$

et, comme $b_0 < b_1 < \cdots < b_m$, on a bien

$$b_{\beta_1 s^{p_1-1} + \beta_2 s^{p_1-2} + \cdots + \beta_{p_1}} = r^{p_1-1} a_{\beta_1} + r^{p_1-2} a_{\beta_2} + \cdots + a_{\beta_{p_1}},$$

quels que soient les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p_1}$ pris dans la suite $0, 1, \ldots, s-1$, ce qui justifie la remarque 3.

11. *Remarque* 4. De la proposition I et de la remarque 3 découle aussitôt le critère 2 de M. Henri Cartan et on a, d'après le lemme 1, $A = B = [a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}]_r$.

(Reçu le 15 septembre 1945.)