

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Über ganze Funktionen ganzer Ordnung.
Autor: Pfluger, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16902>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über ganze Funktionen ganzer Ordnung

Von A. PFLUGER, Zürich

1. Die Nullstellen der beiden ganzen Funktionen $\sin \pi z$ und $\frac{1}{\Gamma(z)}$ unterscheiden sich nicht so sehr in ihrer Dichte als vielmehr in ihrem Symmetriecharakter, welch letzterer Unterschied ein völlig verschiedenes asymptotisches Verhalten der beiden Funktionen bewirkt. Dieses verschiedene Verhalten in allgemeinerem Rahmen aufzuklären ist das Ziel dieser Arbeit; genauer, es wird das asymptotische Verhalten solcher ganzer Funktionen untersucht, deren Ordnung ϱ ganzzahlig und deren Nullstellenverteilung messbar ist.

Wir nennen eine Verteilung von Nullstellen messbar bezüglich r^ϱ , wenn für irgend zwei Stetigkeitsstellen einer monoton wachsenden Funktion $N(\varphi)$

$$n(r; \varphi', \varphi'') = (N(\varphi'') - N(\varphi')) r^\varrho + o(r^\varrho) \quad (1.1)$$

ist. Dabei bezeichnet $n(r; \varphi', \varphi'')$ die Anzahl der Nullstellen im Sektor $|z| \leq r, \varphi' \leq \arg z < \varphi''$; $N(\varphi)$ heißt Maßfunktion der Nullstellenverteilung¹⁾.

Die entsprechende Aufgabe für nichtganze Ordnungen wurde in einer früheren Arbeit gelöst²⁾. Hier, im Falle ganzer Ordnungen, ist der Zusammenhang zwischen den Nullstellen und dem Wachstum der ganzen Funktion komplizierter. Um dies zu sehen, genügt ein Blick auf die kanonische Produktdarstellung vom Geschlecht ϱ

$$G(z) = z^m \cdot e^{c_0} + \dots + c_\varrho z^\varrho \cdot \pi(z), \quad (1.2)$$

wo wir mit $\pi(z)$ das Weierstraß'sche Produkt

$$\pi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_\nu}, \varrho\right), \quad E(u, \varrho) = (1-u) e^{u + \frac{1}{2} u^2 + \dots + \frac{1}{\varrho} u^\varrho}, \quad (1.3)$$

¹⁾ Vgl. die in Fußnote 2 zitierte Arbeit P_1 , insbesondere Nr. 11. An Sprungstellen setzen wir $N(\varphi) = \frac{N(\varphi+0) + N(\varphi-0)}{2}$.

²⁾ „Über die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen“, Comm. math. Helv. vol. 11 (1938), 180—214 und vol. 12 (1939/40), 25—65. Diese Arbeit wird im folgenden mit P_1 bzw. P_2 zitiert.

bezeichnen. Denn der Exponentialfaktor vor $\pi(z)$ und jede einzelne Nullstelle liefern einen Beitrag von der Ordnung ϱ und es genügt deshalb nicht, nur das asymptotische Verhalten der Nullstellen, ausgedrückt durch die Maßfunktion $N(\varphi)$ zu betrachten. Es muß auch der „individuelle“ Einfluß der Nullstellen mitberücksichtigt werden. Darin besteht der wesentliche Unterschied gegenüber dem Fall nichtganzer Ordnung.

Die Untersuchungen von *Wiman*, *Pringsheim*, *Lindelöf* und *Cartwright*³⁾ haben nun gezeigt, daß der genannte „individuelle“ Einfluß des Exponentialfaktors und der Nullstellen im Ausdruck

$$S(r) = \bar{c}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \sum_{|z_\nu| \leq r} \bar{z}_\nu^{-\varrho} \quad (1.4)$$

gesammelt wird. So ist z. B. $G(z)$ dann und nur dann höchstens vom Mitteltypus der Ordnung ϱ , wenn die beiden Bedingungen

$$n(r) = O(r^\varrho) \quad \text{und} \quad S(r) = O(1)$$

erfüllt sind.

Es handelt sich im folgenden nun darum, diese früheren Resultate zu präzisieren unter der Voraussetzung, daß die Nullstellen meßbar sind, indem wir genau abklären, welchen Einfluß die Funktion $S(r)$ auf das asymptotische Verhalten von $G(z)$ hat. In der Tat können wir mit den Funktionen $N(\varphi)$ und $S(r)$ das erste bzw. die zwei ersten Glieder einer asymptotischen Entwicklung von $\log |G(z)|$ berechnen. Diese Beziehungen lassen sich geometrisch interpretieren, womit schon bekannte Zusammenhänge zwischen unsren Fragestellungen und der Elementargeometrie ergänzt werden⁴⁾.

2. In dieser Nummer werden einige Begriffe und Resultate zur späteren Verwendung zusammengestellt⁵⁾.

³⁾ *A. Wiman*, Arkiv för Mat. Astr. och Fys. 1 (1904). — *A. Pringsheim*, Math. Ann. 58 (1904). — *E. Lindelöf*, Sur les fonctions entières d'ordre entier. Ann. Sci. de l'Ecole Normale (3) 22 (1905), 369—395. — *M. L. Cartwright*, Integral functions of integral order. Proc. London Math. Soc. (2) 33 (1932), 209—224.

⁴⁾ Vgl. *G. Pólya*, [1] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Zeitschrift 29 (1929). [2] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Part. II. Annals of Math. 34 (1933). [3] Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzenter Funktionen. Münchener Sitzungsberichte 1920, S. 285—290. [4] Analytische Fortsetzung und konvexe Kurven. Math. Ann. 89 (1923). — *Schwengeler, E.*, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen spezieller ganzer Funktionen, Dissertation, Zürich 1925; ferner P_1 und P_2 .

⁵⁾ Vgl. P_1 und P_2 ; insbesondere P_1 Nr. 9 und P_2 Nr. 16—38.

Es sei $F(z)$ im Winkelraum $\alpha < \arg z < \beta$ regulär und höchstens vom Mitteltypus der Ordnung ϱ ($0 < \varrho < \infty$). Die Funktion

$$H(\varphi) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\varrho} \log |F(re^{i\varphi})|, \quad \alpha < \varphi < \beta, \quad (2.1)$$

heißt Strahltypus von $F(z)$. Sie ist stetig und je von rechts und links differenzierbar. Diese Rechts- und Linkableitungen sind von beschränkter totaler Schwankung. Die Funktion

$$H'(\varphi) = \frac{H'_+(\varphi) + H'_-(\varphi)}{2}$$

hat nur abzählbar viele Unstetigkeiten und es ist

$$H'(\varphi) = \frac{H'(\varphi + 0) + H'(\varphi - 0)}{2}.$$

Die Hüllkurve der Geradenschar

$$x \cdot \cos \varrho \varphi + y \cdot \sin \varrho \varphi - H(\varphi) = 0, \quad \alpha < \varphi < \beta$$

ist konvex und heißt Indikatordiagramm. Durch

$$z(\varphi) = \left(H(\varphi) + \frac{i}{\varrho} H'(\varphi) \right) e^{i\varrho\varphi} \quad (2.2)$$

wird jedem φ ein Punkt des Indikatordiagramms zugeordnet. An Stetigkeitsstellen von $H'(\varphi)$ ist es der Berührpunkt der Stützgeraden von Normalenrichtung $\varrho \varphi$, in den Unstetigkeitsstellen ist es der Mittelpunkt der Strecke, die $z(\varphi - 0)$ mit $z(\varphi + 0)$ verbindet. Strebt bei festem φ der Ausdruck $r^{-\varrho} \cdot \log |F(re^{i\varphi})|$ in (2.1) gegen $H(\varphi)$, wenn r auf einer geeigneten Menge von linearer Dichte 1 gegen unendlich strebt, so schreiben wir dafür

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* r^{-\varrho} \cdot \log |F(re^{i\varphi})| = H(\varphi).$$

Gilt dies für alle φ in $\alpha < \varphi < \beta$, so sagen wir, daß sich $F(z)$ im genannten Winkelraum bezüglich r^ϱ asymptotisch regulär verhalte. Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

Die Nullstellenverteilung von $F(z)$ ist meßbar bezüglich r^ϱ . Ihre Maßfunktion $N(\varphi)$ steht mit $H(\varphi)$ in einem einfachen geometrischen Zusammenhang. Die Länge des Indikatordiagramms zwischen $z(0)$ und

$z(\varphi)$ ist nämlich gleich $2\pi N(\varphi)$. Es bedeutet also $2\pi \cdot N(\varphi)$ die zum Indikatordiagramm gehörige Bogenfunktion. Auch hinsichtlich des Argumentes zeigt $F(z)$ ein reguläres asymptotisches Verhalten. Wird nämlich $\arg F(z)$ längs der Halbgeraden $\arg z = \varphi$ als eindeutige Funktion erklärt, indem eventuelle Nullstellen darauf durch kleine Halbkreise im positiven oder negativen Sinne umgangen werden, so gilt

$$-\frac{1}{\varrho} H'(\varphi + 0) - o(1) < \frac{\arg F(re^{i\varphi})}{r^\varrho} < -\frac{1}{\varrho} H'(\varphi - 0) + o(1) .$$

Dieser Satz über $\arg F(z)$ und die Definition des regulären asymptotischen Verhaltens können zu einer einzigen Aussage vereinigt werden, indem wir

$$H(\varphi) - \frac{i}{\varrho} H'(\varphi) = Q(\varphi) \quad (2.3)$$

setzen. Ferner ergibt sich aus dem geometrischen Zusammenhang zwischen $N(\varphi)$ und $H(\varphi)$, für φ und φ_0 im Intervall (α, β) ,

$$H(\varphi) = H(\varphi_0) \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) + \frac{H'(\varphi_0)}{\varrho} \sin \varrho(\varphi - \varphi_0) + 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varrho(\varphi - \theta) \cdot dN(\theta) .$$

Durch Differenzieren folgt dann

$$Q(\varphi) \cdot e^{-i\varrho\varphi} = Q(\varphi_0) \cdot e^{-i\varrho\varphi_0} - 2\pi i \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{-i\varrho\theta} \cdot dN(\theta) . \quad (2.4)$$

Zusammenfassend gilt

Satz A. *Ist die Funktion $F(z)$ im Winkelraum $\alpha < \arg z < \beta$ regulär und bezüglich r^ϱ von regulärem asymptotischen Verhalten, so ist ihre Nullstellenverteilung dort meßbar bezüglich r^ϱ und*

$$\frac{\log F(re^{i\varphi})}{r^\varrho} = Q(\varphi) + \varepsilon(r, \varphi) , \quad \alpha < \varphi < \beta . \quad (2.5)$$

Dabei gilt für alle φ

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \Re \varepsilon(r, \varphi) = 0 , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Re \varepsilon(r, \varphi) = 0 \quad (2.6)$$

und

$$|\Im \varepsilon(r, \varphi)| < \pi(N(\varphi + 0) - N(\varphi - 0)) + o(1) . \quad (2.6')$$

Ist die Funktion $F(z)$ im Winkelraum $(\alpha \leq \alpha' < \arg z < \beta' \leq \beta)$ nullstellenfrei, so gilt sogar

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r, \varphi) = 0 . \quad (2.7)$$

Der Zusammenhang zwischen den Funktionen $h(\varphi)$, $Q(\varphi)$ und $N(\varphi)$ wird durch (2.3) und (2.4) festgelegt.

Ist insbesondere $F(z)$ eine ganze Funktion von ganzzahliger Ordnung ϱ , so genügt die Nullstellenverteilung neben der Meßbarkeitsbedingung noch einer Art *Gleichgewichtsforderung*. Weil nämlich $Q(\varphi)$ die Periode 2π hat, folgt aus (2.4)

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varrho\theta} \cdot dN(\theta) = 0 . \quad (2.8)$$

Dies ist nur eine andere Form der geometrischen Tatsache, daß das Indikatordiagramm eine (im allgemeinen nicht einfache) geschlossene Kurve ist.

Noch einer dritten Bedingung müssen die Nullstellen einer ganzen Funktion von ganzer Ordnung und regulärem asymptotischen Verhalten genügen. Für letzteres ist nämlich notwendig und hinreichend, daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{\varrho r^\varrho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\theta) d\theta .$$

Daraus folgt aber nach einem Satz von *M. L. Cartwright*⁶⁾ (vgl. (1.2) und (1.4))

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(\theta) e^{i\varrho\theta} d\theta . \quad (2.9)$$

Dieser Grenzwert gestattet eine interessante geometrische Deutung. Während nämlich die Bogenfunktion $2\pi N(\varphi)$ das Indikatordiagramm nur bis auf Translationen bestimmt, wird durch den Grenzwert (2.9) seine Lage eindeutig festgelegt. Um dies zu sehen, belegen wir die Kurve mit Masse, deren Dichte gleich ist der Kurvenkrümmung an der betreffenden Stelle. Der Schwerpunkt dieses Massensystems heißt Krümmungsschwerpunkt des Indikatordiagramms⁷⁾. Um ihn zu berechnen beachten wir, daß der Länge ds die Masse $d\varphi$ zukommt. Das zum Kurvenpunkt $z(\varphi)$ gehörige Massenelement ist also gleich $d\varphi$ und die Gesamtmasse gleich 2π . Der Schwerpunkt ist dann

$$z_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(\varphi) d\varphi .$$

⁶⁾ Vgl. Anm. 3; in der unten gegebenen geometrischen Formulierung begegnen wir einem Resultat über Exponentialsummen von *G. Pólya*, vgl. Anm. 4 *Pólya* [3].

⁷⁾ Der Begriff des Krümmungsschwerpunktes geht auf *J. Steiner* zurück.

Aus (2.2), (2.3) und (2.4) folgt

$$z_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{Q(\varphi)} \cdot e^{i\varphi \cdot \varphi} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(\theta) e^{i\varphi \theta} d\theta . \quad (2.10)$$

Es konvergiert also $S(r)$ gegen den Krümmungsschwerpunkt des Indikatordiagramms, wenn r gegen Unendlich strebt.

3. Bis jetzt sind wir ausgegangen von einer ganzen Funktion ganzer positiver Ordnung, die sich asymptotisch regulär verhält, und haben drei notwendige Bedingungen für die Nullstellenverteilung gefunden, nämlich die *Meßbarkeitsbedingung* (1.1), die *Gleichgewichtsbedingung* (2.8) und die *Konvergenzbedingung* (2.9), kurz die Bedingungen M , G und K .

Gehen wir nun zur umgekehrten Fragestellung über. Wir geben uns eine meßbare Nullstellenverteilung $\{z_\nu\}$ und untersuchen das asymptotische Verhalten der zugehörigen ganzen Funktion (1.2) bzw. des kanonischen Produktes (1.3). Der Fall nichtganzer Ordnung wurde in einer früheren Arbeit untersucht und führte zum Ergebnis⁸⁾

Satz B. *Ist die Nullstellenverteilung einer ganzen Funktion von nichtganzer Ordnung ϱ meßbar, so verhält sich die ganze Funktion asymptotisch regulär.*

Im Falle ganzer positiver Ordnung ist die Meßbarkeit allein nicht hinreichend für reguläres asymptotisches Verhalten. Je nachdem wie viele der Bedingungen M , G und K erfüllt sind, wird ein besonderes Verhalten vorliegen. Wir haben also drei Fälle zu unterscheiden,

1. Fall: M , G und K
2. Fall: nur M und G , nicht K
3. Fall: nur M , nicht G und nicht K

und damit drei Aufgaben zu lösen, deren Ergebnis in folgendem Satz zusammengefaßt ist:

Satz 1. *Es sei $G(z)$ eine ganze Funktion von ganzer Ordnung ϱ und von meßbarer Nullstellenverteilung mit der Maßfunktion $N(\varphi)$ bezüglich r^ϱ . c_ϱ und $S(r)$ seien wie in (1.2) und (1.4) definiert. Wir setzen weiter*

$$q(\varphi) = -i \int_0^{2\pi} \theta \cdot e^{-i\varphi\theta} \cdot dN(\varphi + \theta) \quad (3.1)$$

⁸⁾ Vgl. P_1 p. 206.

und

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varrho\theta} dN(\theta) = C . \quad (3.2)$$

Dann ist

$$\frac{\log G(re^{i\varphi})}{r^\varrho} = q(\varphi) + \left[\bar{C} \left(\pi i - \frac{1}{\varrho} \right) + \overline{S(r)} \right] e^{i\varrho\varphi} + \varepsilon(r, \varphi) . \quad (3.4)$$

Dabei erfüllt $\varepsilon(r, \varphi)$ die Bedingungen (2.6) und (2.6').

Die Diskussion verschieben wir auf Nr. 6.

4. Um die Hauptgedanken in der Beweisführung von Satz 1 besser hervortreten zu lassen, sei einiges durch Hilfssätze vorweggenommen.

Hilfssatz 1. Es sei $f(z)$ im Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha$ regulär und $\Re f(z) = 0(|z|^\sigma)$, wobei σ eine positive Konstante bedeutet. Dann gilt sogar $f(z) = 0(|z|^\sigma)$ in jedem Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha - \delta$, $\delta > 0$.

Beweis: Offenbar genügt es, den Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu betrachten. Der Beweis selbst ergibt sich aus folgender Bemerkung: Ist die Funktion $F(z)$ in $|z| \leq R$ regulär, so gilt

$$|F'(z)| \leq \frac{2}{R(1-k)^2} \cdot \text{Max} |\Re F(Re^{i\varphi})| \quad \text{für } |z| \leq kR, k < 1 \text{ *)} .$$

Im Kreis $|z - R| \leq R$ ist nämlich $\text{Max} |\Re f(z)| = 0((2R)^\sigma) = 0(R^\sigma)$ und daher $f'(z) = \frac{2}{R(1-k)^2} \cdot O(R^\sigma)$ im Kreis $|z - R| \leq kR$. Wählen wir $k = \cos \delta$, so ist der Kreisbogen $|z| = R \sqrt{1 - k^2} = r$ $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ im letztern Kreise enthalten und daher $f'(re^{i\varphi}) = O(r^{\sigma-1})$ für $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$.

Durch Integration ergibt sich daraus die Behauptung.

*) Diese Ungleichung ist mit jener von Carathéodory verwandt und kann mit analogen Methoden bewiesen werden. Aus der Cauchy'schen Koeffizientenformel und aus

$$\oint_{|\zeta|=R} \frac{\overline{F(\zeta)}}{\zeta^{n+1}} d\zeta = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{folgt } a_n = \frac{1}{\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{\Re F(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

und $|a_n| \leq \frac{2 \text{Max} |\Re F(Re^{i\varphi})|}{R^n}$

und daraus dann die Ungleichung für $F'(z)$.

Hilfssatz 2. Das Kreisäußere $|z| \geq R$ sei längs der negativen reellen Achse aufgeschnitten; die Funktion $f(z)$ sei im Innern dieses Bereiches regulär und im ganzen Bereich, abgesehen von $z = \infty$, noch stetig. Es gelte

$f(re^{i\varphi}) = O(r^{1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, für $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $r > R$
und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [f(re^{i\pi}) - f(re^{-i\pi})] = a .$$

Dann gilt gleichmäßig in jedem Winkelraum $|\varphi| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (f(re^{i\varphi}) - f(r)) = a \cdot \frac{\varphi}{2\pi} .$$

Der *Beweis* des Hilfssatz 2 ergibt sich leicht aus der *Cauchy'schen Integralformel*. Sei $k > 1$. Der Integrationsweg Γ bestehe aus den beiden Kreisbogen $|\zeta| = kr$ und $|\zeta| = k^{-1}r$ ($-\pi \leq \arg \zeta \leq \pi$) , welche je längs des oberen und untern Ufers der negativen reellen Achse miteinander verbunden werden. Liegen die Punkte z_1 und z_2 innerhalb Γ , so gilt

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{\zeta - z_2} - \frac{1}{\zeta - z_1} \right) f(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{|\zeta|=rk^{-1}} + \int_{|\zeta|=kr} \right] \frac{z_2 - z_1}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)} f(\zeta) d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{rk^{-1}}^{kr} \left(\frac{1}{\varrho + z_2} - \frac{1}{\varrho + z_1} \right) (f(\varrho e^{-i\pi}) - f(\varrho e^{i\pi})) d\varrho . \end{aligned}$$

Setzen wir $z_1 = r$, $z_2 = re^{i\varphi}$, $|\varphi| < \pi$ und $k = r^{1-\varepsilon/2}$, so wird der Betrag des ersten Summanden kleiner als

$$\left(\frac{|e^{i\varphi} - 1| \cdot k^{-1}}{(1 - k^{-1})^2} + \frac{|e^{i\varphi} - 1| k}{(k - 1)^2} \right) \cdot O(r^{1-\varepsilon}) = O(r^{1-\varepsilon/2}) .$$

Setzen wir $f(\varrho e^{i\pi}) - f(\varrho e^{-i\pi}) = a + \varepsilon(\varrho)$, wo $\varepsilon(\varrho) \rightarrow 0$ für $\varrho \rightarrow \infty$, so wird aus dem zweiten Summanden

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{rk^{-1}}^{kr} \left(\frac{1}{\varrho + z_1} - \frac{1}{\varrho + z_2} \right) a d\varrho - \frac{1}{2\pi i} \int_{rk^{-1}}^{kr} \frac{z_2 - z_1}{(\varrho + z_1)(\varrho + z_2)} \varepsilon(\varrho) d\varrho . \quad (4.1)$$

Hie von ist das erste Glied gleich $\frac{a}{2\pi i} \log \frac{1 + k^{-1}}{1 + k^{-1} e^{i\varphi}} \cdot \frac{k^{-1} + e^{i\varphi}}{k^{-1} + 1}$ und dessen Grenzwert für $r \rightarrow \infty$ gleich $a \frac{\varphi}{2\pi}$. Wegen $|\varphi| \leq \pi - \delta$ und $|\varrho + re^{i\varphi}| \geq \sin \frac{\delta}{2} (\varrho + r)$ wird der Betrag des zweiten Gliedes von (4.1) kleiner als $\frac{|e^{i\varphi} - 1|}{\sin \delta/2} \cdot \bar{\varepsilon}(r)$, wenn $\bar{\varepsilon}(r) = \max_{k^{-1}r \leq \varrho \leq kr} \varepsilon(\varrho)$ gesetzt wird. Da aber mit r auch $k^{-1}r$ gegen Unendlich strebt, so ist $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}(r) = 0$ und damit der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 3. Die in (2.3) bzw. (2.4) definierte Funktion $Q(\varphi)$ besitzt auch die Darstellung

$$Q(\varphi) = -i \int_0^{2\pi} (\varphi + \theta) e^{-i\varrho\theta} \cdot dN(\varphi + \theta) + A e^{i\varrho\varphi}, \quad (4.2)$$

wenn A eine geeignete Konstante bedeutet.

Beweis: Setzen wir $t = \varphi + \theta$, so wird

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\varphi + \theta) e^{-i\varrho\theta} \cdot dN(\varphi + \theta) &= \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} t e^{i\varrho(\varphi-t)} \cdot dN(t) \\ &= \int_{\varphi}^{2\pi} t e^{-i\varrho(t-\varphi)} \cdot dN(t) + \int_0^{\varphi} (t + 2\pi) e^{i\varrho(\varphi-t)} \cdot dN(t) \\ &= e^{i\varrho\varphi} \int_0^{2\pi} t e^{-i\varrho t} dN(t) + 2\pi \int_0^{\varphi} e^{-i\varrho(\varphi-t)} \cdot dN(t). \end{aligned}$$

Daraus folgt in Verbindung mit (2.4) die Behauptung.

Hilfssatz 4.¹⁰⁾ Es seien $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ die von null verschiedenen, nach wachsenden Beträgen geordneten Nullstellen der ganzen Funktion $G(z)$. Sei ferner $G(0) = 1$; $\log G(z)$ hat also im Nullpunkt eine Nullstelle und ihre Multiplizität sei $\varrho + 1$.

¹⁰⁾ Der Satz erinnert an die Carleman'sche Formel und wird mit analoger Methode bewiesen; vgl. auch Cartwright in Anm. 3.

Dann gilt für jedes $R > 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\log |G(Re^{i\varphi})|}{R^\varrho} \cdot e^{i\varrho\varphi} d\varphi = \frac{1}{\varrho} \sum_{|z_\nu| \leq R} \left(\bar{z}_\nu^{-\varrho} - \frac{z_\nu^\varrho}{R^{2\varrho}} \right) .$$

Beweis: Wir betrachten das Integral

$$T_\pm = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \log G(\zeta) \left(\frac{\zeta^{\varrho-1}}{R^{2\varrho}} \pm \frac{1}{\zeta^{\varrho+1}} \right) d\zeta .$$

Zunächst folgt

$$T_\pm = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\log G(Re^{i\varphi})}{R^\varrho} \left\{ \begin{array}{l} \cos \varrho \varphi \\ i \sin \varrho \varphi \end{array} \right\} d\varphi , \quad (4.3)$$

anderseits durch partielle Integration, nachherige Anwendung des Argumentprinzips und des Residuensatzes

$$\begin{aligned} T_\pm &= \frac{1}{2\pi i \varrho} \log G(Re^{i\varphi}) \left(\frac{\zeta^\varrho}{R^{2\varrho}} \mp \frac{1}{\zeta^\varrho} \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \frac{1}{2\pi i \varrho} \oint_{|\zeta|=R} \frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \left(\pm \frac{1}{\zeta^\varrho} - \frac{\zeta^\varrho}{R^{2\varrho}} \right) d\zeta \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{2n}{\varrho R^\varrho} \end{array} \right\} + \frac{1}{\varrho} \sum_{|z_\nu| \leq R} \left(\pm z_\nu^{-\varrho} - \frac{z_\nu^\varrho}{R^{2\varrho}} \right) . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dabei bedeutet n die Anzahl der Nullstellen in $|z| \leq R$. Aus (4.3) und (4.4) folgt dann durch Berechnung des Ausdruckes $\Re T_+ + i\Im T_-$ die Behauptung.

Hilfssatz 5. Ist die Nullstellenverteilung $\{z_\nu\}$ meßbar bezüglich r^ϱ und ist $N(\varphi)$ ihre Maßfunktion, so gilt

$$\sum_{|z_\nu| \leq R} \frac{z_\nu^\varrho}{R^{2\varrho}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{i\varrho\theta} \cdot dN(\theta) + o(1) .$$

Beweis: Sei zunächst $0 < r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ eine Punktfolge auf der positiven reellen Achse, deren Anzahlfunktion der Bedingung $n(r) = d \cdot r^\varrho + o(r^\varrho)$ genügt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{r_\nu \leq R} r_\nu^\varrho &= \int_0^R t^\varrho \cdot dn(t) = R^\varrho n(R) - \varrho \int_0^R t^{\varrho-1} \cdot n(t) dt \\
&= \frac{1}{2} dR^{2\varrho} + o(R^{2\varrho}) .
\end{aligned}$$

Bei gleicher Anzahlfunktion sollen nun die Stellen $z_\nu = r_\nu e^{i\theta_\nu}$ im Winkelraum $|\arg z - \theta| \leq \delta$ gelegen sein.

Wegen $|e^{i\varrho\theta_n} - e^{i\varrho\theta}| < \varrho |\theta_n - \theta|$ folgt dann

$$\sum_{|z_\nu| \leq R} z_\nu^\varrho = \frac{1}{2} dR^{2\varrho} \cdot e^{i\varrho\theta} + O(d\delta R^{2\varrho}) + o(R^{2\varrho}) .$$

Sei schließlich $\{z_\nu\}$ die gegebene Nullstellenverteilung. Wir zerlegen die Ebene vom Nullpunkt aus in n Winkelräume mit der Öffnung $< \delta$. Die Richtungswinkel θ_j der teilenden Strahlen seien Stetigkeitspunkte der Maßfunktion $N(\varphi)$. Dann ergibt sich aus dem Vorausgehenden, mit $\Delta N(\theta_j) = N(\theta_{j+1}) - N(\theta_j)$ an Stelle von d und $D = N(2\pi) - N(0)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{|z_\nu| \leq R} z_\nu^\varrho &= \frac{1}{2} R^{2\varrho} \cdot \sum_{(j)} e^{i\varrho\theta_j} \cdot \Delta N(\theta_j) + O(\delta D R^{2\varrho}) + o(n R^{2\varrho}) \\
&= \frac{1}{2} R^{2\varrho} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\varrho\theta} \cdot dN(\theta) + o(R^{2\varrho}) ;
\end{aligned}$$

denn es kann δ beliebig klein gewählt werden.

5. Beweis von Satz 1. Wir beweisen ihn für kanonische Produkte. Es sei also ϱ eine positive ganze Zahl; $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots (z_n \neq 0)$ eine gegebene messbare Punktfolge mit der Maßfunktion $N(\varphi)$ bezüglich r^ϱ und $\pi(z)$ das zugehörige Weierstraß'sche kanonische Produkt vom Geschlecht ϱ .

Man braucht offenbar den Satz nur für den Fall zu beweisen, daß die linke Halbebene nullstellenfrei ist. Denn der allgemeine Fall ergibt sich daraus folgendermaßen: Es sei $N_+(\varphi)$ die Maßfunktion und $\pi_+(z)$ das kanonische Produkt der Nullstellen in der abgeschlossenen rechten Halbebene, $N_-(\varphi)$ und $\pi_-(z)$ entsprechend die Maßfunktion und das kanonische Produkt für die Nullstellen in der offenen linken Halbebene. Dann gilt Satz 1 zunächst für $\pi_+(z)$ mit $N_+(\varphi)$ und $\pi_-(-z)$ mit $N_-(\varphi + \pi)$, nach einer Drehung der z -Ebene um $-\pi$ auch für $\pi_-(z)$ mit $N_-(\varphi)$ und daher für $\pi(z) = \pi_+(z) \cdot \pi_-(z)$ mit $N(\varphi) = N_+(\varphi) + N_-(\varphi)$.

Es sei also die linke Halbebene nullstellenfrei. Durch die Substitution

$w = z^\sigma$, $\frac{2}{3} < \sigma < 1$, $\frac{\varrho}{\sigma} \neq 1, 2, 3, \dots$ wird die Punktfolge $\{z_n\}$ transformiert in die Punktfolge $\{w_n = z_n^\sigma\}$, die ebenfalls meßbar ist, aber bezüglich $r^{\varrho/\sigma}$. Das zugehörige kanonische Produkt $\pi_\sigma(w)$ ist eine ganze Funktion der Ordnung ϱ/σ (nichtganz) und daher nach Satz B von regulärem asymptotischen Verhalten bezüglich $r^{\varrho/\sigma}$. Um zur ursprünglichen Stellenverteilung zurückzukehren, setzen wir $\pi_\sigma(w) = \pi_\sigma(z^\sigma) = F(z)$. Der Winkelraum $|\arg w| \leq \pi$ (längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene w -Ebene wird durch $w = z^\sigma$ auf den Winkelraum

$$|\arg z| \leq \pi/\sigma \quad (\text{Winkelraum } \Sigma)$$

der Riemann'schen Fläche von $\log z$ abgebildet. Es ist also $F(z)$ in diesem Winkelraum eindeutig und analytisch, von der Ordnung ϱ und bezüglich r^ϱ von regulärem asymptotischen Verhalten. Die Nullstellen von $F(z)$ fallen dort mit denjenigen von $\pi(z)$ zusammen, insbesondere ist $F(z) \neq 0$ in den beiden Winkelräumen $|\arg z \pm \pi| < \pi/2$. Es gilt also gemäß Satz A im Winkelraum Σ

$$\frac{\log F(re^{i\varphi})}{r^\varrho} = Q(\varphi) + \varepsilon(r, \varphi), \quad (5.1)$$

wobei sich $Q(\varphi)$ gemäß (2.4) durch die Maßfunktion $N(\varphi)$ darstellen lässt. Insbesondere gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log F(re^{i\varphi})}{r^\varrho} = Q(\varphi)$$

in den beiden Winkelräumen $|\varphi \pm \pi| < \pi/2$. Nun ist nach (2.4) und (3.2)

$$Q(\varphi + 2\pi) - Q(\varphi) = -2\pi i \bar{C} e^{i\varphi}$$

und daher

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\log F(re^{i(\varphi + 2\pi)})}{(re^{i(\varphi + 2\pi)})^\varrho} - \frac{\log F(re^{i\varphi})}{(re^{i\varphi})^\varrho} \right) = -2\pi i \bar{C} \quad (5.2)$$

für $|\varphi - \pi| < \pi/2$.

Vergleichen wir nun $\pi(z)$ mit $F(z)$, indem wir die Funktion

$$\Phi(z) = \frac{\pi(z)}{F(z)} \quad (5.3)$$

betrachten. Diese ist in Σ regulär, nullstellenfrei und von der Ordnung ϱ , also $\log \Phi(z)$ in Σ regulär und $\log |\Phi(z)| < A |z|^{\varrho+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Aus dem Hilfssatz 1, angewandt auf $\log \Phi(z)$, folgt dann weiter

$$|\log \Phi(z)| < B |z|^{\varrho+\varepsilon}. \quad (5.4)$$

Wir setzen jetzt

$$f(z) = \frac{\log \Phi(z)}{z^\varrho} . \quad (5.5)$$

Diese Funktion ist in Σ regulär. Ferner gilt nach (5.4), (5.2) und (5.3)

$$|f(z)| < B |z|^\varepsilon \quad \text{in } \Sigma$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [f(re^{i(\varphi + 2\pi)}) - f(re^{i\varphi})] = 2\pi i \bar{C}$$

für φ in der Umgebung von $-\pi$. Daher ist nach Hilfssatz 2, gleichmäßig für $|\varphi| \leq \pi$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [f(re^{i\varphi}) - f(r)] = \bar{C} i \varphi$$

und weiter nach (5.5) und (5.3)

$$\log \pi(re^{i\varphi}) = \log F(re^{i\varphi}) + (f(r) + \bar{C} i \varphi) (re^{i\varphi})^\varrho + o(r^\varrho)$$

und schließlich nach (5.1)

$$\frac{\log \pi(re^{i\varphi})}{r^\varrho} = Q(\varphi) + (f(r) + \bar{C} i \varphi) e^{i\varrho\varphi} + \varepsilon(r, \varphi) .$$

Dabei hat $\varepsilon(r, \varphi)$ dieselbe Bedeutung wie in Satz A. In Verbindung mit (3.1) folgt aus Hilfssatz 3

$$Q(\varphi) + \bar{C} i \varphi e^{i\varrho\varphi} = q(\varphi) + A e^{i\varrho\varphi} \quad (5.6)$$

und daher mit $P(r) = f(r) + A$

$$\frac{\log \pi(re^{i\varphi})}{r^\varrho} = q(\varphi) + P(r) e^{i\varrho\varphi} + \varepsilon(r, \varphi) . \quad (5.7)$$

Zur weiteren Verwendung setzen wir

$$q(r, \varphi) = q(\varphi) + P(r) e^{i\varrho\varphi} , \quad (5.8)$$

$$\Re q(\varphi) = h(\varphi) \quad \text{und} \quad \Re q(r, \varphi) = h(r, \varphi) . \quad (5.9)$$

Dann ist, wie sich leicht aus (5.6) und (2.3) bestätigen lässt,

$$q(\varphi) = h(\varphi) - \frac{i}{\varrho} h'(\varphi) + \frac{i}{\varrho} \Re(\bar{C} i e^{i\varrho\varphi})$$

und

$$q(r, \varphi) = h(r, \varphi) - \frac{i}{\varrho} \frac{\partial h(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{i}{\varrho} \Re(\bar{C} i e^{i\varrho\varphi}) . \quad (5.10)$$

In (5.7) ist der erste Term der rechten Seite durch das asymptotische Verhalten der Nullstellen vollständig bestimmt. Wie hängt nun $P(r)$ mit den Nullstellen zusammen? Um diesen Zusammenhang zu finden, benötigen wir von (5.7) nur die Realteile. Es ist nach (5.9)

$$\frac{\log |\pi(r e^{i\varphi})|}{r^\varrho} = h(r, \varphi) + \Re \varepsilon(r, \varphi) . \quad (5.11)$$

Nun wird durch eine geeignete Operation aus der rechten Seite das Glied $P(r)$ und aus der linken Seite der gesuchte Ausdruck in den Nullstellen z_ν herauspräpariert. Wir bilden zunächst den zu (2.10) analogen Ausdruck und erhalten nach (5.10) und (5.8)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(r, \varphi) e^{i\varrho\varphi} d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(h(r, \varphi) + \frac{i}{\varrho} \frac{\partial h(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right) e^{i\varrho\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\overline{q(r, \varphi)} + \frac{i}{\varrho} \Re(\overline{C} i e^{i\varrho\varphi}) \right] e^{i\varrho\varphi} d\varphi = \overline{P(r)} + C \left(\pi i + \frac{1}{2\varrho} \right) . \end{aligned} \quad (5.12)$$

Denn es ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{q(\varphi)} \cdot e^{i\varrho\varphi} d\varphi = \pi i C . \quad (5.13)$$

Um dies einzusehen, setzen wir $Q_1(\varphi) = q(\varphi) - \overline{C} i \varphi e^{i\varrho\varphi}$. Nach (5.6) und (2.4) ist dann

$$e^{i\varrho\varphi} \overline{Q_1(\varphi)} = \overline{q(0)} + 2\pi i \int_0^\varphi e^{i\varrho\theta} \cdot dN(\theta) .$$

Nun ist

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\varphi e^{i\varrho\theta} dN(\theta) = 2\pi C - \int_0^{2\pi} \theta e^{i\varrho\theta} \cdot dN(\theta)$$

und nach (3.1)

$$\overline{q(0)} = i \int_0^{2\pi} \theta e^{i\varrho\theta} \cdot dN(\theta)$$

und

$$\int_0^{2\pi} \overline{Q_1(\varphi)} \cdot e^{i\varrho\varphi} d\varphi = 4\pi^2 i C .$$

Daraus ergibt sich die obige Behauptung. Anderseits ist nach Hilfsatz 4¹¹⁾

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\log |\pi(re^{i\varphi})|}{r^\varrho} \cdot e^{i\varrho\varphi} d\varphi = \frac{1}{\varrho} \sum_{|z_\nu| \leq r} \left(\bar{z}_\nu^{-\varrho} - \frac{z_\nu^\varrho}{r^{2\varrho}} \right) = T(r) . \quad (5.14)$$

Die dritte Größe in (5.11), $\Re \varepsilon(r, \varphi)$, ist „meistens klein“; es ist also zu vermuten, daß die linken Seiten von (5.12) und (5.14) sich nur um eine Größe $o(1)$ unterscheiden und daß daher nach Hilfssatz 5 und (3.2)

$$P(r) = \overline{T(r)} + \overline{C} \left(\pi i - \frac{1}{2\varrho} \right) + o(1) = \overline{S(r)} + \overline{C} \left(\pi i - \frac{1}{\varrho} \right) + o(1) \quad (5.15)$$

ist. Es bleibt also zu zeigen, daß

$$\int_0^{2\pi} \frac{\log |\pi(re^{i\varphi})|}{r^\varrho} \cdot e^{i\varrho\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} h(r, \varphi) \cdot e^{i\varrho\varphi} d\varphi + o(1) . \quad (5.16)$$

ist. Aus der Meßbarkeit der Nullstellenverteilung folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\varrho} = N(2\pi) - N(0) = D$$

und daher nach der Jensen'schen Formel

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\log |\pi(re^{i\varphi})|}{r^\varrho} d\varphi = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^\varrho} \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{D}{\varrho} .$$

Anderseits ist wegen (5.8) und (5.9)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi .$$

Aus (3.1) und (5.9) folgt durch partielle Integration

$$h(\varphi) = \int_0^{2\pi} (\sin \varrho \theta + \varrho \theta \cos \varrho \theta) N(\varphi + \theta) d\theta .$$

¹¹⁾ Es hat $\log \pi(z)$ bei $z = 0$ eine $(\varrho + 1)$ -fache Nullstelle, weil $\pi(z)$ vom Geschlecht ϱ ist.

Weiter ist wegen der Periodizität von $dN(\varphi)$

$$\int_0^{2\pi} N(\varphi + \theta) d\varphi = \int_0^{2\pi} N(t) dt + \theta(N(2\pi) - N(0)) = m + D \cdot \theta .$$

Zusammen ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin \varrho \theta + \varrho \theta \cos \varrho \theta) (m + D \cdot \theta) d\theta = \frac{D}{\varrho} .$$

Es folgt also zunächst

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\log |\pi(re^{i\varphi})|}{r^\varrho} - h(r, \varphi) \right] d\varphi = 0 . \quad (5.17)$$

Setzen wir nun

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{\log |\pi(re^{i\varphi})|}{r^\varrho} - h(r, \varphi) , \quad (5.18)$$

So ist wegen (5.11) und (2.6) $\lim_{r \rightarrow \infty} \sup |\Phi(r, \varphi)| = 0$ und zwar

gleichmäßig für alle φ . Es ist also $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \Phi^+(r, \varphi) d\varphi = 0$.

In Verbindung mit (5.17) folgt daraus auch $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (-\Phi(r, \varphi))^+ d\varphi = 0$.

Nun ist $\Phi^+ + (-\Phi)^+ = |\Phi|$, also sogar $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |\Phi(r, \varphi)| d\varphi = 0$ und

somit $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi) e^{i\varrho\varphi} d\varphi = 0$, was mit (5.16) gleichbedeutend ist.

6. Wir kehren nun zur *Diskussion* des Satz 1 zurück. Gemäß (3.4) wird das asymptotische Verhalten von $G(z)$ durch die beiden Funktionen $q(\varphi) + \bar{C} \left(\pi i - \frac{1}{\varrho} \right) e^{i\varrho\varphi}$ und $S(r)$ charakterisiert. Während bei der ersten nur das asymptotische Verhalten der Nullstellen eine Rolle spielt, kommt ihr „individueller Einfluß“ in $S(r)$ zur Geltung. Dieser Unterschied wird auch in der nachfolgenden geometrischen Interpretation zum Ausdruck kommen.

Zunächst bemerken wir, daß

$$S(r) = C \cdot \lg r + o(\lg r) \quad (6.1)$$

ist. Betrachten wir nämlich eine Nullstellenverteilung auf der positiven reellen Achse, deren Anzahlfunktion der Bedingung $n(r) = d \cdot r^\varrho + o(r^\varrho)$ genügt, so ist $\sum_{r_\nu < r} r_\nu^{-\varrho} =$

$$\int_0^r t^{-\varrho} \cdot dn(t) = r^{-\varrho} \cdot n(r) + \varrho \int_0^r t^{-\varrho-1} n(t) dt = \varrho d \lg r + o(\lg r) .$$

Der Rest ergibt sich ganz analog wie bei Hilfssatz 5. Nach (6.1) sind also die Bedingungen $C = 0$ und $S(r) = o(\lg r)$ gleichbedeutend.

Im Falle $C = 0$ ist gemäß (4.2) $Q(\varphi) = q(\varphi) + A e^{i\varrho\varphi}$ und daher

$$h(\varphi) = \Re q(\varphi) = - \int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho \theta \cdot dN(\varphi + \theta) \quad (6.2)$$

die Stützfunktion einer geschlossenen konvexen Kurve. Wegen (2.10) und (5.13) liegt ihr Krümmungsschwerpunkt im Nullpunkt. Wir nennen diese Kurve das zur Maßfunktion $N(\varphi)$ gehörige Indikatordiagramm in Normallage und bezeichnen es mit \mathfrak{J}_0 .

Gehen wir nun über zur Diskussion der drei Fälle in Nr. 3.

1. Fall: Es seien erfüllt die Bedingungen M und K ; dann ist $C = 0$ und auch Bedingung G erfüllt. Wir setzen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S(r) = S_0 = p + iq, \quad p \text{ und } q \text{ reell.}$$

Dann ist nach Satz 1

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{\log |G(re^{i\varphi})|}{r^\varrho} = h(\varphi) + p \cos \varrho \varphi + q \sin \varrho \varphi = H(\varphi) .$$

Die ganze Funktion $G(z)$ ist also von regulärem asymptotischen Verhalten und S_0 nach (2.10) Krümmungsschwerpunkt des Indikatordiagramms. In Verbindung mit (2.9) folgt schließlich

Satz 2. Eine ganze Funktion vom Mitteltypus der ganzen Ordnung ϱ ist dann und nur dann von regulärem asymptotischen Verhalten, wenn die Nullstellenverteilung meßbar ist bezüglich r^ϱ und $\lim_{r \rightarrow \infty} S(r)$ existiert¹²⁾.

2. Fall: Es seien erfüllt die Bedingungen M und G . Wir setzen $S(r) = S_1(r) + i S_2(r)$, S_1 und S_2 reell. Dann ist

$$\frac{\log |G(re^{i\varphi})|}{r^\varrho} = h(r, \varphi) + \Re \varepsilon(r, \varphi) \quad (6.3)$$

mit

$$h(r, \varphi) = h(\varphi) + S_1(r) \cos \varrho \varphi + S_2(r) \sin \varrho \varphi.$$

Bei festem r ist $h(r, \varphi)$ die Stützfunktion einer konvexen Kurve mit dem Krümmungsschwerpunkt $S(r)$. Wir nennen sie das „bewegliche Indikatordiagramm“ und bezeichnen es mit \mathfrak{J}_r ; denn es geht aus dem Indikatordiagramm in Normallage, aus \mathfrak{J}_0 , durch Parallelverschiebung um $S(r)$ hervor. Während also die Form von \mathfrak{J}_r allein durch $h(\varphi)$ bzw. $N(\varphi)$ schon bestimmt und daher unabhängig von r ist, wird seine Lage, sein Krümmungsschwerpunkt durch die Funktion $S(r)$ festgelegt. Nach Maßgabe von $S(r)$ bewegt sich also \mathfrak{J}_r bei wachsendem r in der Ebene hin und her und charakterisiert im Sinne der Gleichung (6.3) für jedes r durch seine Lage und seine Form das Verhalten von $G(z)$ ¹³⁾.

Bei beschränktem $S(r)$ ist die Funktion $G(z)$ offenbar vom Mitteltypus der Ordnung ϱ und

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |G(re^{i\varphi})|}{r^\varrho} = h(\varphi) + \limsup_{r \rightarrow \infty} (S_1(r) \cos \varrho \varphi + S_2(r) \sin \varrho \varphi)$$

ihr Strahltypus, die Stützfunktion einer geschlossenen konvexen Kurve, die wir jetzt, im Gegensatz zu oben, „festes Indikatordiagramm“ nennen wollen. Wie das feste Indikatordiagramm durch das bewegliche erzeugt wird, sieht man am besten im Falle $\varrho = 1$. Dann ist nämlich das Diagramm eine einfache geschlossene Kurve und somit der Rand

¹²⁾ In einer früheren Arbeit „Über Interpolation ganzer Funktionen“, Comm. Math. Helv., vol. 14 (1941/42) p. 316—349, wurde eine Bedingung aufgestellt, die wohl hinreichend, aber nicht notwendig ist für reguläres asymptotisches Verhalten. Die dortigen etwas komplizierten Betrachtungen werden nun überflüssig, da jene etwas verschärfte Meßbarkeitsbedingung (p. 319) auch die Konvergenz von $S(r)$ zur Folge hat.

¹³⁾ In einer früheren Arbeit „Über gewisse ganze Funktionen vom Exponentialtypus“, Comm. Math. Helv., vol. 16 (1943/44), p. 1—18, wurde für $\varrho = 1$ und nur für den Fall, daß die Nullstellen hinreichend genau in Richtung der reellen Achse liegen, dasselbe Resultat mit andern Methoden erhalten.

eines konvexen Bereiches. Das feste Indikatordiagramm können wir dann auffassen als den Rand des kleinsten konvexen Bereiches, aus dessen Umgebung das bewegliche Diagramm für alle hinreichend großen r nicht mehr herauskommt.

Die Bedeutung des beweglichen Indikatordiagramms wird noch besser aus der folgenden Betrachtung ersichtlich ($\varrho = 1$). Nach (3.4), (2.2), (2.3) und (4.2) in Verbindung mit unserer Voraussetzung $C = 0$ ist

$$\frac{\log G(re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} = \overline{z(\varphi)} + \overline{S(r)} + \overline{\varepsilon(r, \varphi)} \cdot e^{-i\varrho\varphi},$$

d. h. der Wert der linken Seite liegt meistens in der Umgebung des an der reellen Achse gespiegelten „beweglichen Indikatordiagramms“.

3. Fall: Nur die Bedingung M ist erfüllt, nicht aber G und daher auch nicht K . Nach Satz 1 ist

$$\log G(re^{i\varphi}) = e^{i\varrho\varphi} \cdot \overline{S(r)} \cdot r^\varrho + \left(q(\varphi) + \overline{C} \left(\pi i - \frac{1}{\varrho} \right) e^{i\varrho\varphi} \right) r^\varrho + \varepsilon(r, \varphi) r^\varrho.$$

Nach (6.1) ist das erste Glied von der Größenordnung $r^\varrho \lg r$, das zweite Glied vom Mitteltypus der Ordnung ϱ . Es ist aber $h(\varphi) = \Re q(\varphi)$ nicht mehr Stützfunktion einer konvexen Kurve, was man leicht mit (3.1) und (4.2) bestätigen kann.

Prüfen wir noch kurz unsere Resultate an den beiden bekannten Beispielen $\sin \pi z$ und $\frac{1}{\Gamma(z)}$ nach.

1. $\sin \pi z$. Es ist $\varrho = 1$, $C = 0$, $S(r) \equiv 0$,

$$dN(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varphi = 0 \text{ und } \pi \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$q(\varphi) = \begin{cases} -\pi i e^{i\varphi}, & 0 < \varphi < \pi \\ +\pi i e^{i\varphi}, & 0 > \varphi > -\pi, \end{cases}$$

also

$$\log \sin \pi z \sim \begin{cases} -\pi i z, & Jz > 0 \\ +\pi i z, & Jz < 0 \end{cases}.$$

2. $\frac{1}{\Gamma(z)}$. Hier ist $\varrho = 1$, $C = -1$,

$$dN(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varphi = \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$S(r) = \gamma - \sum_{\nu \leq r} \frac{1}{\nu} = -\log r + o(1) \quad (\gamma \text{ ist die Euler'sche Konstante})$$

$$q(\varphi) = i(\pi - \varphi) e^{i\varphi}$$

und daher

$$\log \frac{1}{\Gamma(z)} = z \lg r - i\varphi z + z + o(z)$$

oder

$$\log \Gamma(z) = z \log z - z + o(z) \quad \text{für } |\varphi| < \pi .$$

7. Im Vorangehenden behandelten wir nur jene Nullstellenverteilungen, die bezüglich r^ϱ meßbar sind. Um auch andere meßbare Verteilungen definieren zu können, die ebenfalls zu ganzen Funktionen ganzer Ordnung führen, benützen wir die präzise Wachstumsordnung $\varrho(r)$, eine Funktion, die im Intervall $(0, \infty)$ stetig ist, deren Rechts- und Linksableitungen existieren und stückweise übereinstimmen. Sie genügt den Bedingungen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varrho(r) = \varrho \quad (7.1)$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varrho'(r) r \log r = 0 , \quad (7.2)$$

wenn für $\varrho'(r)$ die Rechts- oder Linksableitung eingesetzt wird. Ist für eine ganze Funktion $G(z)$ $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\varrho(r)} \log M(r)$ positiv und endlich

so ist $G(z)$ von der *Ordnung* ϱ und der *präzisen Ordnung* $\varrho(r)$.

Nun brauchen wir nur in (1.1) und (2.1) die Vergleichsfunktion r^ϱ durch die allgemeinere $r^{\varrho(r)}$ zu ersetzen, um sofort die entsprechenden Begriffe „meßbare Nullstellenverteilung“ bezüglich $r^{\varrho(r)}$ “ und „Strahltypus der Funktion $F(z)$ bezüglich $r^{\varrho(r)}$ “ zu erhalten. Die in Nr. 2 bis und mit (2.8) ausgesprochenen Resultate bleiben erhalten. Auch die analytische Funktion z^ϱ , die der reellwertigen Funktion r^ϱ entspricht, hat ihr Analogon: Es existiert nämlich zu jeder präzisen Ordnung $\varrho(r)$ mit $\varrho > 0$ eine Funktion $V(z)$, die auf der positiven reellen Achse reellwertig, monoton wachsend und von dort ausgehend im Winkelraum $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$ der Riemann'schen Fläche von $\log z$ eindeutig und analytisch ist und die den Bedingungen

$$V(r) \sim r^{\varrho(r)}$$

und

$$V(z) \sim e^{i\varrho\varphi} \cdot V(r) , \quad z = r e^{i\varphi} , \quad (7.3)$$

genügt, letzteres gleichmäßig in $|\arg z| \leq \frac{3}{2}\pi - \eta$, $\eta > 0$ ¹⁴⁾. Aus (7.1) und (7.2) in Verbindung mit (7.3) folgt für festes $k > 1$ und $k^{-1}r \leq t \leq kr$

$$t^{\varrho(t)} = (1 + \varepsilon(r, k)) \cdot t^{\varrho(r)} \quad (7.4)$$

mit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r, k) = 0. \quad (7.5)$$

Wir können uns nun die allgemeine Aufgabe stellen, zu jeder meßbaren Nullstellenverteilung bezüglich einer präzisen Ordnung $\varrho(r)$ mit $\varrho > 0$ das asymptotische Verhalten des zugehörigen kanonischen Produktes zu bestimmen. Für nichtganzes ϱ wurde diese Aufgabe in einer früheren Arbeit ¹⁵⁾ erledigt, deren Resultat in Satz B ausgesprochen ist. Es verbleibt also, analog zu Nummer 3, die Aufgabe für ganzzahliges $\varrho > 0$ zu lösen. ϱ sei im folgenden wieder ganz. Die Verallgemeinerung des Satz 1 lautet dann

Satz 3. *$\pi(z)$ sei das kanonische Produkt einer meßbaren Nullstellenverteilung bezüglich $r^{\varrho(r)}$ und von ganzer Ordnung $\varrho > 0$. $S(r)$, C und $q(\varphi)$ seien wie in (1.4) ¹⁶⁾, (3.2) und (3.1) definiert. Dann ist*

$$\frac{\log \pi(re^{i\varphi})}{V(r)} = q(\varphi) + \overline{C} \left(\pi i - \frac{1}{\varrho} \right) e^{i\varrho\varphi} + \frac{r^\varrho}{V(r)} \overline{S(r)} e^{i\varrho\varphi} + \varepsilon(r, \varphi), \quad (7.6)$$

falls das Geschlecht ϱ und

$$\frac{\log \pi(re^{i\varphi})}{V(r)} = q(\varphi) + \overline{C} \left(\pi i - \frac{1}{\varrho} \right) e^{i\varrho\varphi} + \frac{r^\varrho}{V(r)} e^{i\varrho\varphi} (\overline{S(r)} - \overline{S(\infty)}) + \varepsilon(r, \varphi), \quad (7.7)$$

falls das Geschlecht $\varrho - 1$ ist. $\varepsilon(r, \varphi)$ erfüllt dieselben Bedingungen wie in Satz 1.

8. Der Beweis von Satz 2 verläuft ganz analog wie bei Satz 1. Die Hilfssätze 2 und 3 erfahren überhaupt keine Änderung. Während aber Hilfssatz 4 für beliebige kanonische Produkte vom Geschlecht ϱ gültig bleibt, bedarf er für Produkte vom Geschlecht $\varrho - 1$ einer Modifikation. In diesem Falle hat nämlich $\pi'(z)/\pi(z)$ bei $z = 0$ eine Nullstelle von der Ordnung $\varrho - 1$. Es ist also (4.4) zu ersetzen durch

$$T_\pm = \left\{ \frac{0}{2n} \right\} \left\{ \pm \frac{a_\varrho}{\varrho} \pm \overline{S(r)} - \frac{1}{\varrho} \sum_{|z_\nu| \leq r} \frac{z_\nu^\varrho}{r^{2\varrho}} \right\}.$$

¹⁴⁾ Vgl. P₁ Nr. 5. Dort wurde der Satz allerdings nur für den Winkelraum $|\arg z| < \pi/\varrho$ ausgesprochen, doch lässt sich dieser Winkelraum durch freiere Wahl der Zahl p leicht vergrößern.

¹⁵⁾ Vgl. Anm. 2.

¹⁶⁾ Es ist jetzt $c_\varrho = 0$ zu setzen.

Dabei ist a_ϱ der Koeffizient von $z^{\varrho-1}$ in der Potenzreihenentwicklung von $\pi'(z)/\pi(z)$ um $z = 0$. a_ϱ lässt sich aber leicht berechnen; denn es ist in der Umgebung des Nullpunktes

$$\log E \left(\frac{z}{z_\nu}, \varrho - 1 \right) = - \frac{1}{\varrho} \left(\frac{z}{z_\nu} \right)^\varrho - \dots$$

und daher

$$a_\varrho = - \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu^{-\varrho} = - \varrho \cdot \overline{S(\infty)} .$$

Es folgt also

$$T_\pm = \left\{ \frac{0}{2n} \right\} \pm (\overline{S(r)} - \overline{S(\infty)}) - \frac{1}{\varrho} \sum_{|z_\nu| \leq r} \frac{z_\nu^\varrho}{r^{2\varrho}}$$

und daraus

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\log |\pi(re^{i\varphi})|}{r^\varrho} e^{i\varrho\varphi} d\varphi = S(r) - S(\infty) - \frac{1}{\varrho} \sum_{|z_\nu| \leq r} \frac{z_\nu^\varrho}{r^{2\varrho}} \quad (8.1)$$

im Falle des Geschlechtes $\varrho = 1$.

An Stelle von Hilfssatz 5 gilt etwas allgemeiner

$$\sum_{|z_\nu| \leq r} \frac{z_\nu^\varrho}{r^{2\varrho}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{i\varrho\theta} \cdot dN(\theta) \cdot \frac{V(r)}{r^\varrho} + o\left(\frac{V(r)}{r^\varrho}\right) , \quad (8.2)$$

wenn die Nullstellen bezüglich $V(r)$ meßbar sind.

Zum Beweis wählen wir auf der positiven reellen Achse eine Punktfolge $\{r_\nu\}$, deren Anzahlfunktion der Bedingung $n(r) = d \cdot V(r) + o(V(r))$ genügt. Dann ist

$$\sum_{r_\nu \leq r} r_\nu^\varrho = \int_0^r t^\varrho dn(t) = r^\varrho V(r) d - \varrho d \int_0^r t^{\varrho-1} V(t) dt + o(r^\varrho V(r)) .$$

Für ein $k < 1$ gilt

$$\int_0^{kr} t^{\varrho-1} \cdot V(t) dt \leq k^2 \cdot r^\varrho V(r)$$

und wegen (7.4)

$$\begin{aligned} \int_{kr}^r t^{\varrho-1} V(t) dt &= (1 + \varepsilon(r, k)) \int_{kr}^r t^{\varrho-1 + \varrho(r)} dt = \\ &= \frac{1 + \varepsilon(r, k)}{\varrho(r) + \varrho} (1 - k^{\varrho(r) + \varrho}) r^\varrho V(r) . \end{aligned}$$

Es ist also

$$\sum_{r_\nu \leq r} r_\nu^\varrho = dr^\varrho V(r) \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho + \varrho(r)} (1 + \varepsilon(r, k)) (1 - k^{\varrho + \varrho(r)}) - \varrho k^2 \varrho \right).$$

Wir berücksichtigen nun (7.5) und (7.1) und lassen mit r auch k^{-1} geeignet gegen ∞ streben. Dann strebt die Klammer gegen $\frac{1}{2}$ und wir haben

$$\sum_{r_\nu \leq r} r_\nu^\varrho \sim \frac{d}{2} r^\varrho \cdot V(r).$$

Der Rest ergibt sich analog wie in Hilfssatz 5.

An der in Nummer 5 dargestellten Methode ist nun nichts Wesentliches mehr zu ändern. In (5.1) haben wir r^ϱ durch $V(r)$ zu ersetzen. (5.2) lautet

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\log F(re^{i(\varphi+2\pi)})}{V(re^{i(\varphi+2\pi)})} - \frac{\log F(re^{i\varphi})}{V(re^{i\varphi})} \right) = -2\pi i \bar{C},$$

entsprechend zu (5.5) ist $f(z) = \frac{\log \Phi(z)}{V(z)}$ regulär für alle z im Winkelraum Σ mit $|z| > R_0$, woraus wir wieder nach Hilfssatz 2 schließlich erhalten

$$\frac{\log \pi(re^{i\varphi})}{V(r)} = q(\varphi) + P(r) e^{i\varrho\varphi} + \varepsilon(r, \varphi).$$

Ebenso ergibt sich analog

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\log |\pi(re^{i\varphi})|}{V(r)} e^{i\varrho\varphi} d\varphi = \overline{P(r)} + C \left(\pi i + \frac{1}{2\varrho} \right) + o(1).$$

Bei der Auswertung des Integrals ist nun zu unterscheiden, ob es sich um kanonische Produkte vom Geschlecht ϱ oder $\varrho - 1$ handelt. In Berücksichtigung von (8.2) ergibt sich im Falle des Geschlechtes ϱ

$$\overline{P(r)} + C \left(\pi i + \frac{1}{2\varrho} \right) = \frac{r^\varrho}{V(r)} S(r) - \frac{1}{2\varrho} C + o(1),$$

im Fall des Geschlechtes $\varrho - 1$ aus (8.1)

$$\overline{P(r)} + C \left(\pi i + \frac{1}{2\varrho} \right) = \frac{r^\varrho}{V(r)} (S(r) - S(\infty)) - \frac{1}{2\varrho} C + o(1)$$

und daraus die Behauptung des Satz 2.

9. Auch die Diskussion des Satz 3, vor allem Fall 1 und 2 bringen gegenüber dem in Nr. 6 schon Gesagten nichts wesentlich Neues. Nur der Fall 3, wo die Meßbarkeit, nicht aber die Bedingung (2.8) erfüllt, also $C \neq 0$ ist, soll hier etwas eingehender besprochen werden.

Die von null verschiedenen, nach wachsenden Beträgen geordneten Nullstellen bezeichnen wir wieder mit z_1, z_2, \dots , ihre Anzahlfunktion mit $n(r)$. Wir setzen $|z_\nu| = r_\nu$ und $N(2\pi) - N(0) = D$. Dann ist $n(r) = D \cdot V(r) + o(V(r))$. Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} r_\nu^{-\varrho}$ und das Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt \quad (9.1)$$

sind gleichzeitig konvergent oder divergent, das zu den Nullstellen $\{z_\nu\}$ gehörige kanonische Produkt also vom Geschlecht ϱ oder $\varrho - 1$, je nachdem (9.1) divergiert oder konvergiert. Denn es ist

$$\begin{aligned} \sum_{r_\nu \leq r} r_\nu^{-\varrho} &= n(r) \cdot r^{-\varrho} + \varrho \int_{\frac{1}{2}r_1}^r \frac{n(t)}{t^{\varrho+1}} dt = \\ &= (D + o(1)) \frac{V(r)}{r^\varrho} + (\varrho D + o(1)) \int_{\frac{1}{2}r_1}^r \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt \end{aligned} \quad (9.2)$$

und überdies wenn das Integral (9.1) konvergiert, $V(r) = o(r^\varrho)$. Wir zeigen weiter, daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^\varrho}{V(r)} \int_1^r \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt = \infty, \quad \text{falls das Geschlecht } \varrho \quad (9.3)$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^\varrho}{V(r)} \int_r^{\infty} \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt = \infty \quad \text{falls das Geschlecht } \varrho - 1 \quad (9.4)$$

ist. Ich beweise (9.3); für (9.4) geht der Beweis analog. Da es sich um den Maximal- oder Minimaltypus der Ordnung ϱ handelt, so hat $\varrho(r) - \varrho$ von einem gewissen r ab keinen Vorzeichenwechsel mehr. Aus (7.4) folgt dann zunächst für ein festes $k < 1$

$$\begin{aligned} \frac{r^\varrho}{V(r)} \int_{k r}^r \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt &= \frac{r^\varrho}{V(r)} (1 + \varepsilon(r, k)) \int_{k r}^r t^{\varrho(r) - \varrho - 1} dt = \\ &= (1 + \varepsilon(r, k)) \frac{1 - k^{\varrho(r) - \varrho}}{\varrho(r) - \varrho} . \end{aligned}$$

Wegen (7.1) und (7.5) strebt dann der letzte Ausdruck gegen unendlich, wenn wir mit r auch k^{-1} hinreichend langsam gegen unendlich streben lassen.

Weiter folgt aus (9.2) in Verbindung mit (9.3) und (9.4)

$$\sum_{r_\nu \leq r} r_\nu^{-\varrho} = (\varrho D + o(1)) \int_1^r \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt \text{ für das Geschlecht } \varrho$$

und

$$\sum_{r_\nu > r} r_\nu^{-\varrho} = (\varrho D + o(1)) \int_r^\infty \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt \text{ für das Geschlecht } \varrho-1 .$$

Analog wie in Nr. 6 bzw. im Beweis von Hilfssatz 5 ergibt sich daraus

$$S(r) = (C + o(1)) \int_1^r \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt$$

bzw.

$$S(\infty) - S(r) = (C + o(1)) \int_r^\infty \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt$$

und schließlich mit Satz 3, indem wir noch die Glieder niedrigerer Ordnung vernachlässigen,

$$\log \pi(z) = (\bar{C} + \varepsilon(z)) z^\varrho \cdot \int_1^r \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt \quad (9.5)$$

bzw.

$$\log \pi(z) = -(\bar{C} + \varepsilon(z)) z^\varrho \int_r^\infty \frac{V(t)}{t^{\varrho+1}} dt , \quad (9.6)$$

je nachdem das Geschlecht ϱ bzw. $\varrho - 1$ ist.

Speziell, wenn alle Nullstellen auf der negativen reellen Achse liegen, $D = N(2\pi) - N(0)$ und $V(r) = r^\varrho (\lg r)^\alpha$, $r > e$, gesetzt wird, so ist $C = (-1)^\varrho$, für $\alpha \geq -1$ das Geschlecht gleich ϱ , für $\alpha < -1$ das

Geschlecht gleich $\varrho - 1$ und es gilt für das zugehörige kanonische Produkt

$$\log \pi(z) \sim (-D)^\varrho \frac{z^\varrho (\lg r)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} , \quad \alpha \neq -1 , \quad |\arg z| < \pi ,$$

und

$$\log \pi(z) \sim (-D)^\varrho z^\varrho \log \log r , \quad \alpha = -1 , \quad |\arg z| < \pi \text{ } ^{17}) .$$

10. Zum Schlusse erwähne ich eine Anwendung der vorangehenden Resultate auf die Interpolation ganzer Funktionen. In der oben zitierten Arbeit (Anm. 12) wurde die Frage untersucht, unter welchen hinreichenden Bedingungen für die Punktfolge $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ die Interpolationsformel

$$G(z) = P(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G(a_\nu)}{P'(a_\nu) (z - a_\nu)} \quad (10.1)$$

gültig ist. Für den Fall ganzer Ordnung wurde dort eine etwas künstliche „verschärfte Meßbarkeitsbedingung“ eingeführt, die sich nun auf Grund der obigen Resultate durch schwächere und natürlichere Bedingungen ersetzen lässt. Wie sich leicht aus Satz 1 der vorliegenden Arbeit und aus den Nr. 12—21 und dem Nachtrag S. 349 der genannten Arbeit ergibt, lautet für den Mitteltypus einer ganzen Ordnung das Resultat dann folgendermaßen:

Satz 4. *Es sei ϱ eine ganze positive Zahl und es möge die Folge von Stellen $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$, die alle vom Nullpunkt verschieden sind und keinen endlichen Häufungspunkt besitzen, den folgenden Bedingungen genügen:*

1. Es ist

$$n(r; \varphi', \varphi'') = k(\varphi'' - \varphi') r^\varrho + o(r^\varrho) ,$$

wobei $n(r; \varphi', \varphi'')$ die Anzahl der Stellen im Sektor $|z| \leq r, \varphi' \leq \arg z < \varphi''$ bezeichnet.

2. Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{-\varrho}$ konvergiert und ist gleich $a\varrho$.

¹⁷⁾ Für diese und andere Spezialfälle vgl. *E. Lindelöf, Mémoires sur la théorie des fonctions entières de genre fini, Acta Soc. Sci. Fenn.*, vol. 31 (1902). Das allgemeine Resultat, wie es durch die Gleichungen (9.5) und (9.6) ausgedrückt wird, war mir bis jetzt unbekannt.

3. Es existiert ein $d > 0$, so daß die Kreise $|z - a_v| \leq d |a_v|^{1-\varrho/2}$, $v = 1, 2, \dots$ einander nicht überdecken.

Es sei ferner $P(z) = e^{-az^\varrho} \cdot \pi(z)$, wobei $\pi(z)$ das zur Folge $\{a_v\}$ gehörige kanonische Produkt bedeutet und $G(z)$ eine ganze Funktion, deren Maximalbetrag der Bedingung

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\varrho} < \frac{2\pi}{\varrho} k$$

genügt.

Dann gilt die Interpolationsformel (10.1). Die Reihe ist in jedem beschränkten und abgeschlossenen Bereich, der keinen der Punkte a_1, a_2, \dots enthält, absolut und gleichmäßig konvergent.

Gibt es überdies eine Konstante κ , so daß

$$|G(a_v)| \leq \kappa, \quad v = 1, 2, \dots,$$

so ist $G(z)$ notwendig eine Konstante.

(Eingegangen den 14. September 1945.)