Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme.
Autor: Habicht, Walter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16900

Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme

Von Walter Habicht, Schaffhausen

Einleitung

1. Diese Arbeit hat das Ziel, zwei Sätze, die ihrem Inhalt nach in die Algebra gehören, die jedoch auf topologischem Wege entdeckt worden waren und für die man bisher nur topologische Beweise kannte, mit rein algebraischen Methoden zu beweisen.

Diese Sätze knüpfen an den berühmten Satz von *Poincaré-Brouwer* an, der besagt, daß es, wenn n ungerade ist, auf der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre im n-dimensionalen euklidischen Raum R^n kein stetiges Feld tangentialer Vektoren gibt, die $\neq 0$ sind[1]); er läßt sich, indem man die Koordinaten des R^n mit $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnet, folgendermaßen aussprechen:

n sei ungerade; $f_1, \ldots, f_n$ seien reelle Funktionen der reellen Variablen $x_1, \ldots, x_n$, erklärt und stetig für $\sum_{i=1}^{n} x^2 = 1$; es gelte die Relation

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n = 0 . \tag{1}$$

Dann besitzen die f_i eine gemeinsame Nullstelle $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (mit $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1$).

Neuerdings hat *B. Eckmann*, ebenfalls mit topologischen Methoden, bewiesen, daß der analoge Satz auch gilt, wenn man unter den x_i komplexe Variable und unter den f_i komplexe Funktionen der x_i versteht, die für $\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = 1$ erklärt und stetig sind[2]).

Betrachtet man speziell *Polynome* f_i, so erhält man zwei Sätze, welche algebraischen Charakter haben, und es entsteht die Aufgabe, diese Sätze auch mit algebraischen Methoden zu beweisen, oder genauer: die Aufgabe, zu untersuchen, ob diese Sätze überhaupt „rein algebraisch" in dem Sinne sind, daß sie sich folgendermaßen formulieren lassen:

---

[1]) *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), 481.

[2]) *B. Eckmann*, Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen, Comment. Math. Helvet. 15 (1942), 1–26, Satz IV.

„Der *Poincaré-Brouwer*sche Satz und der *Eckmann*sche Satz für Polynome bleiben gültig, wenn man an Stelle des Körpers der reellen Zahlen einen beliebigen reell-abgeschlossenen Körper (im Sinne von *Artin-Schreier*[3])) bzw. an Stelle des Körpers der komplexen Zahlen einen algebraisch abgeschlossenen Körper zugrunde legt (und dabei die Behauptung dahin abschwächt, daß eine von $(0, 0, \ldots, 0)$ verschiedene Nullstelle der f_i existiert)."

Man kann die Untersuchung der Gültigkeit dieser Sätze auch axiomatisch auffassen: es soll untersucht werden, ob die Sätze von *Poincaré-Brouwer* und von *Eckmann* bei Beschränkung auf Polynome unabhängig sind von Stetigkeitsaxiomen, insbesondere vom Archimedischen Axiom.

2. Es ist mir bisher nicht gelungen, die hiermit aufgeworfenen Fragen in der genannten Allgemeinheit zu klären; ich hoffe aber, in einer späteren Arbeit darauf eingehen zu können. In der gegenwärtigen Arbeit beschränke ich mich auf den Fall, in dem die Polynome f_i homogene *Formen* der x_i sind; für diesen Fall werden die gewünschten Sätze bewiesen werden, und zwar noch mit gewissen Verschärfungen, nämlich:

Satz I. *K sei ein algebraisch abgeschlossener Körper; $f_1, \ldots, f_n$ seien Formen aus dem Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$; zwischen ihnen bestehe die Relation* (1); *es seien nicht gleichzeitig n gerade und die Grade sämtlicher f_i gleich* 1. *Dann besitzen die f_i eine von* $(0, 0, \ldots, 0)$ *verschiedene gemeinsame Nullstelle in K.*

Satz II. *K sei ein reell-abgeschlossener Körper; $f_1, \ldots, f_n$ seien Formen aus dem Ring $K[x_1, \ldots, x_n]$; zwischen ihnen bestehe die Relation* (1); *es seien nicht gleichzeitig sämtliche Anzahlen von Formen gleichen Grades gerade und die Grade sämtlicher f_i ungerade. Dann besitzen die f_i eine von* $(0, 0, \ldots, 0)$ *verschiedene gemeinsame Nullstelle in K.*

Die Voraussetzungen von Satz II sind insbesondere immer erfüllt, wenn n ungerade ist.

Zu dem Satz I wird noch der Zusatz gemacht werden: falls sämtliche Formen f_i vom Grade h sind, so ist die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen „im Allgemeinen" gleich

$$h^{n-1} - h^{n-2} + - \cdots + (-1)^{n-1},$$

also gleich einer Zahl, die nur im genannten Ausnahmefall — n gerade, $h = 1$ — den Wert 0 hat; allerdings muß hierfür der Begriff „im All-

[3]) Vgl. hierzu: *Artin-Schreier*, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Hamb. Abh. 5 (1927), 85—99.

gemeinen" erst gehörig geklärt werden (cf. § 2, 2., Sätze 7 und 7a, p. 168).

Auf den ersten Blick scheint der Fall, daß alle Formen vom gleichen Grad sind, sehr speziell zu sein. In Wirklichkeit wird sich später (cf. § 2, 4., p. 173) herausstellen, daß der allgemeine Fall sich ohne weiteres auf den Fall gleicher Grade zurückführen läßt, und es bedeutet deshalb eine ganz unwesentliche Einschränkung, wenn wir in der folgenden einleitenden Betrachtung alle Formen vom gleichen Grad annehmen.

3. Die in den Sätzen genannten Ausnahmefälle — nämlich bei Beschränkung auf Formen vom gleichen Grad h: n gerade, $h = 1$ bzw. n gerade, h ungerade — treten wirklich auf: bei geradem n erfüllen die Linearformen

$$f_{2r-1} = -x_{2r}, \qquad f_{2r} = x_{2r-1} \qquad \text{für} \qquad r = 1, \ldots, \frac{n}{2}$$

die Relation (1), besitzen aber außer $(0, 0, \ldots, 0)$ keine gemeinsame Nullstelle; im reellen Falle kann man dann diese f_i noch mit irgendeiner definiten Form multiplizieren.

Die Existenz dieser Ausnahmen zeigt, daß unsere Sätze nicht trivial sind, wie man vielleicht beim ersten Blick vermuten könnte; man ist nämlich versucht, etwa im Falle von Satz I folgendermaßen zu schließen: die $n - 1$ Formen $f_1, \ldots, f_{n-1}$ besitzen nach dem Bézoutschen Theorem eine gemeinsame Nullstelle $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, und diese ist auf Grund von (1) auch Nullstelle von f_n; dieser Schluß ist aber darum falsch, weil $\xi_n = 0$ sein kann. Daß hier eine wirkliche Schwierigkeit vorliegt, wird durch die Ausnahmen bestätigt.

Die Betrachtung der Ausnahmen führt auch dazu, unsere Sätze mit einem bekannten elementaren Satz in Zusammenhang zu bringen: beschränkt man sich nämlich zum vornherein auf Linearformen $f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$, so ist die vorausgesetzte Relation (1) gleichbedeutend damit, daß die Matrix (a_{ik}) schiefsymmetrisch, die behauptete Existenz einer nichttrivialen Nullstelle gleichbedeutend damit, daß die Matrix singulär ist. Unsere Sätze stellen also, bei Beschränkung auf die in ihnen genannten Klassen der zugrunde gelegten Körper, Verallgemeinerungen des Satzes dar, daß eine schiefsymmetrische Matrix ungeraden Grades immer singulär ist.

4. Die Sätze I und II lassen sich im Rahmen der projektiven Geometrie folgendermaßen interpretieren. P sei der projektive m-dimensionale Raum (in bezug auf den Koordinatenkörper K); jedem Punkt x von P sei eine $(m - 1)$-dimensionale Ebene F_x von P derart zugeordnet, daß erstens ihre Ebenenkoordinaten $f_0, \ldots, f_m$ rational-homogen von den Punktkoordinaten $x_0, \ldots, x_m$ des Punktes x abhängen — d. h. daß die f_i Formen eines gewissen Grades h in den x sind —, und daß zweitens x immer auf F_x liegt, d. h. daß die Relation (1) besteht. Dann besagt der Satz I: im klassischen Fall des komplexen projektiven Raumes — und allgemeiner, wenn K ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper ist —, ist dies nur möglich, wenn die Dimension m ungerade ist und die f_i linear sind, d. h. wenn ein lineares Nullsystem vorliegt; und ein ähnlicher Satz gilt nach Satz II für die reellen projektiven Räume.

Dieser Satz von der Einzigkeit der bekannten linearen Nullsysteme scheint bisher auch für die gewöhnlichen komplexen projektiven Räume nicht formuliert zu sein. Überhaupt dürften die Sätze I und II auch bei Zugrundelegung komplexer bzw. reeller Zahlenkoeffizienten neu sein; allerdings lassen sie sich dann ziemlich leicht aus bekannten topologischen Sätzen ableiten [4].

5. Unsere Beweise der Sätze I und II operieren, wie es wohl dem Charakter der Sätze entspricht, mit den Methoden der Eliminationstheorie [5]. Zur geometrischen Deutung der algebraischen Begriffsbildungen werden wir uns oft der Sprache der algebraischen Geometrie bedienen.

Während bei den anfangs erwähnten topologischen Beweisen Satz II sich wesentlich leichter ergibt als Satz I, wird sich bei der algebraischen Herleitung umgekehrt Satz II als Folge einer Verschärfung von Satz I (cf. § 2, **4.**, Satz Ib, p. 173) herausstellen. Dementsprechend gliedert sich die Arbeit folgendermaßen:

In den ersten beiden Paragraphen wird Satz I bewiesen werden.

---

[4]) Topologischer Beweis (nach Angabe von Herrn *H. Hopf*): P sei der $(n - 1)$-dimensionale komplexe bzw. reelle projektive Raum; in ihm seien $x_1, \ldots, x_n$ projektive Koordinaten. $f_1, \ldots, f_n$ seien Formen h-ten Grades in den x_n ohne gemeinsame nichttriviale Nullstelle; dann wird im komplexen Fall durch $x_i' = \overline{f_i(x_1, \ldots, x_n)}$, im reellen Fall durch $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ eine stetige Abbildung f von P in sich erklärt. Wenn nun (1) gilt, so kann f keinen Fixpunkt besitzen. Daraus folgt im komplexen Fall (nach *H. Hopf*, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Crelles Journal 163 (1930), 71—88, § 5), daß $n - 1$ ungerade und $h = 1$ ist; und im reellen Fall folgt aus der Fixpunktfreiheit (cf. *Alexandroff-Hopf*, l. c., 532—533), daß $n - 1$ ungerade und der Abbildungsgrad von f gleich 1 sein muß; letzteres ist aber, wie man leicht sieht, nur möglich, wenn h ungerade ist.

[5]) Vgl. dazu: *B. L. v. d. Waerden*, Moderne Algebra (Berlin 1941), Teil 2, Kapitel 11.

Der dritte Paragraph ist von den beiden ersten weitgehend unabhängig. Sein Inhalt kann etwa so zusammengefaßt werden: Wenn von einem reellen System von Formen f_i bekannt ist, daß es „im Allgemeinen" („allgemein" in dem noch zu präzisierenden Sinne; cf. § 2, 2., p. 168) eine ungerade Anzahl wesentlich verschiedener Lösungen[6]) besitzt, so wird bewiesen werden, daß dann das System „im Speziellen" immer eine reelle Lösung besitzt. Der Beweis ist einer von *B. L. v. d. Waerden* angegebenen Methode nachgebildet, welche erstmals von *F. Behrend*[7]) angewandt wurde. Es wird dabei die *Artin-Schreier*sche Theorie der reell-abgeschlossenen Körper benützt (vgl. a. a. O.[3])).

§ 1. Zusammenstellung einiger Begriffe und Sätze der Eliminationstheorie

Die folgenden Ausführungen schließen sich eng an die Entwicklungen in *v. d. Waerden*, Moderne Algebra, Teil 2 an (vgl. a. a. O.[5])). Was die geometrische Deutung der algebraischen Begriffsbildungen betrifft, so sei vor allem verwiesen auf *v. d. Waerden*, Einführung in die algebraische Geometrie[8]).

Sei K ein beliebiger kommutativer Körper der Charakteristik 0. Wir fassen ein n-tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ beliebiger Elemente eines festen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörpers von K auf als Koordinaten eines Punktes in einem n-dimensionalen affinen Raum R^n. Die Nullstellen eines Systems von Polynomen $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ in n Variablen mit Koeffizienten aus K bilden dann einen Unterraum dieses R^n, die *Nullstellenmannigfaltigkeit* des Systems[9]).

1. Wie schon erwähnt, werden wir uns bei den folgenden Untersuchungen auf Formen, d. h. homogene Polynome, beschränken. In diesem Fall enthält die Nullstellenmannigfaltigkeit mit einem Punkt $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq (0, \ldots, 0)$ auch den ganzen Strahl durch diesen Punkt und den Ursprung; algebraisch ausgedrückt: mit $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist auch $(\lambda \cdot \xi_1, \ldots, \lambda \cdot \xi_n)$ (λ ein beliebiges Element aus dem Koordinatenkörper)

---

[6]) D. h. solche, deren Variablenreihen sich nur um konstante Faktoren unterscheiden.

[7]) *F. Behrend*, Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen, Comp. Math. 7., 1, § 2, 6—10.

[8]) *B. L. v. d. Waerden*, Einführung in die algebraische Geometrie (Springer, Berlin 1939), insbesondere Kap. IV—VI, p. 105 ff.

[9]) Zur Präzisierung dieses Begriffes („Algebraische Mannigfaltigkeit") vgl. 8), Kap. IV, 7, (1939), 1—19.

eine Nullstelle. Die Nullstellenmannigfaltigkeit besteht also jetzt, falls sie nicht leer ist (der Punkt $(0, \ldots 0)$ wird dabei nicht gezählt; er ist immer „triviale Nullstelle") aus einem Kegel von *Nullstrahlen*, resp. aus endlich vielen Strahlen $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. (Wir lassen im folgenden den unbestimmt bleibenden Proportionalitätsfaktor in der Schreibweise weg.) Wir nehmen irgendeinen Strahl, etwa $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, heraus. Ist etwa ξ_k die erste nichtverschwindende unter den Zahlen ξ_i, so liegt insbesondere der Punkt

$$(0, \ldots, 0, 1, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n)\,, \qquad \zeta_i = \frac{\xi_i}{\xi_k}\,, \qquad i = 0, \ldots, n$$

auf dem Strahl. Die Größen ζ_i bestimmen den Strahl vollständig. Wir wollen sie kurz als die Richtungskoeffizienten des vorliegenden Strahls bezeichnen.

Besitzt ein Formensystem endlich viele Nullstrahlen, so sind die Richtungskoeffizienten sämtlicher dieser Strahlen algebraisch über dem Grundkörper (cf. **3.**, Satz 5, p. 163).

Das algebraische Problem, die Lösungen eines vorgelegten Gleichungssystems (in dem zugrunde gelegten Koordinatenkörper) zu bestimmen, läuft geometrisch darauf hinaus, in dem zugehörigen R^n die Schnittmannigfaltigkeit gewisser vorgelegter Nullstellenmannigfaltigkeiten zu bestimmen. — Um nun bei der Bestimmung von Schnitten von Mannigfaltigkeiten den Ausartungsfall des Zusammenfallens einzelner Teile des Schnittgebildes zunächst auszuschließen, ist es, geometrisch gesprochen, zweckmäßig, die zu untersuchenden Gebilde zunächst in „allgemeiner Lage" anzunehmen. Dem entspricht folgender algebraischer Prozeß: man adjungiert zum Grundkörper K eine Reihe von *Unbestimmten* $a_1, \ldots, a_q$; den so entstehenden Körper $K(a_1, \ldots, a_q)$ betrachtet man als neuen Grundkörper und ersetzt dementsprechend auch den Koordinatenkörper durch einen umfassenderen Körper. Sodann ersetzt man in dem zu untersuchenden System die Koeffizienten der Formen f_i bei Festhaltung ihrer Gradzahlen h_i durch die a. Man erhält so ein System von *allgemeinen* Formen von vorgeschriebenen Gradzahlen. Das Verhalten dieser allgemeinen Formen ist in mancher Hinsicht einfacher und übersichtlicher als dasjenige von speziellen Formen. Andererseits erhält man jedes spezielle System durch Spezialisierung der Koeffizienten im Grundkörper. Die folgenden grundlegenden Sätze geben einen ersten Aufschluß über die Nullstrahlen eines allgemeinen Systems sowie über das Verhalten bei Spezialisierung[10]).

[10]) Die folgenden Sätze 1, 2 und 3 sind fast wörtlich zitiert nach *v. d. Waerden*; vgl. a. a. O.[5]), Kap. 11, p. 77—83.

2. *Satz 1 (Hilbertscher Nullstellensatz). Ist f ein Polynom in $K[x_1, \ldots, x_n]$, das in allen gemeinsamen Nullstellen der Polynome $f_1, \ldots, f_r$ verschwindet, so gilt eine Kongruenz*

$$f^\varrho \equiv 0 \qquad (\text{mod. } (f_1, \ldots, f_r))$$

für eine natürliche Zahl ϱ (und umgekehrt)[11].

Der Satz 1 gilt allgemein, nicht nur für Formen. Er bildet die Grundlage für alle folgenden Untersuchungen.

Satz 2. *r Formen $f_1, \ldots, f_r$ mit unbestimmten Koeffizienten a besitzen ein Resultantensystem, bestehend aus endlich vielen ganzzahligen Formen R_λ in diesen Koeffizienten, so daß für spezielle Werte der Koeffizienten in K das Verschwinden aller Resultanten notwendig und hinreichend ist für die Existenz einer nichttrivialen Lösung der Gleichungen $f_i = 0, i = 1, \ldots, r$.*[12])

Insbesondere folgt aus Satz 2:

Satz 2a. *Hängen in einem System von Formen f_i die Koeffizienten c_ν ganz rational von einer Reihe von Unbestimmten ab und ist das System lösbar (d. h.: besitzt es einen Nullstrahl*[13])*), so gilt dies auch nach einer beliebigen Spezialisierung der Unbestimmten in K.* Denn sei etwa $c_\nu = \varphi_\nu(a_1, \ldots, a_q)$, wo $a_1, \ldots, a_q$ Unbestimmte bedeuten und die φ_ν ganz rational in den a_ϱ sind. Dann bedeutet die Lösbarkeit nach Satz 2, daß

$$R_\lambda(a) = R_\lambda\big(\varphi_1(a), \ldots, \varphi_\omega(a)\big) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, p)$$

identisch in den a gilt. Diese Gleichungen bleiben erhalten bei Spezialisierung der a zu Werten α, woraus nach Satz 2 die Behauptung folgt[14]).

In dieser Tatsache äußert sich der Vorzug der Formensysteme gegenüber den Systemen von Polynomen. Beispielsweise besitzt das System von zwei allgemeinen linearen Polynomen in zwei Variablen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 = 0$$

---

[11]) D. h.: es gibt in $K[x_1, \ldots, x_n]$ n Formen $q_1, \ldots, q_n$, so daß

$$f^\varrho = q_1 f_1 + \cdots + q_n f_n ;$$

cf. [5]), § 79, p. 6.

[12]) Vgl. [5]), § 80, p. 9.

[13]) In dem entsprechend erweiterten R^n; cf. § 1, 1., p. 7; vgl. dazu a. a. O.[8]), p. 105 ff.

[14]) Vgl. a. a. O. [12]), Aufg. 3.

eine gemeinsame Nullstelle; diese Tatsache bleibt aber nicht bei jeder Spezialisierung der a, b erhalten, sondern nur dann, wenn auch nach der Spezialisierung die beiden Matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

gleichen Rang haben. Zwei Linearformen in 3 Variablen hingegen besitzen nicht nur im allgemeinen, sondern auch bei jeder Spezialisierung der Koeffizienten einen gemeinsamen Nullstrahl.

Satz 3. *Ist $r < n$, so existiert keine von 0 verschiedene Resultante. r allgemeine Formen in n Variablen besitzen also in diesem Fall immer gemeinsame nichttriviale Nullstrahlen.*

Ist $r \geqq n$, so existiert ein von 0 verschiedenes Resultantensystem. Ist insbesondere $r = n$, so wird das Resultantensystem durch eine einzige Form R in den Koeffizienten repräsentiert. Sie ist homogen in den Koeffizienten von f_1 vom Grade $H_1 = h_2 \cdot \ldots \cdot h_r$ ($h_i =$ Grad von f_i), etc. zyklisch für H_i mit $i = 1, \ldots, r$. — r allgemeine Formen besitzen also in diesen Fällen keine gemeinsamen Nullstellen.

Satz I (cf. p. 155) besagt also: Während n allgemeine Formen in n Variablen keine gemeinsame nichttriviale Nullstelle haben, ist dies der Fall, sobald die Koeffizienten irgendwie so spezialisiert werden, daß zwischen den Formen die identische Relation (1) besteht.

3. Die folgenden Sätze 4 und 5 sind für uns im nächsten Paragraphen wichtig.

Satz 4. *Besitzt das Gleichungssystem*

$$f_1 = 0, \ldots, f_r = 0 \tag{2}$$

höchstens endlich viele Nullstrahlen, so besitzt es mit einer allgemeinen Linearform

$$L = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n \tag{3}$$

(u_i Unbestimmte, die dem Grundkörper adjungiert werden, cf. p. 159) keine gemeinsamen Nullstrahlen, und umgekehrt.

Beweis. a) Da der Grundkörper von der Charakteristik 0 vorausgesetzt ist, lassen sich in ihm n Elemente c_i so finden, daß die Linearform $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ auf keinem der endlich vielen Nullstrahlen verschwindet:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i \neq 0 \qquad \text{für sämtliche Nullstrahlen}^{15)}\ .$$

Daraus folgt a fortiori für die Unbestimmten u_i:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \xi_i \neq 0 \qquad \text{für sämtliche Nullstrahlen.}$$

Das bedeutet geometrisch: Sind im R^n endlich viele Strahlen fest vorgegeben, so geht eine Hyperebene „in allgemeiner Lage" durch keinen von diesen Strahlen hindurch.

b) Das System $f_1, \ldots, f_r, L$ besitze keine gemeinsamen Nullstrahlen. $R_\lambda(u)$ sei eine der nichtverschwindenden Resultanten des Resultantensystems von $f_1, \ldots, f_r, L$, aufgefaßt als Form in den u. $R_\lambda(u)$ verschwindet für spezielle u jedenfalls dann, wenn auf einem Nullstrahl $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ von $f_1, \ldots, f_r$ zugleich auch L verschwindet, d. h. wenn für diese u und diesen Strahl gilt:

$$L^* = u_1 \xi_1 + \cdots + u_n \xi_n = 0\ . \tag{3'}$$

Fassen wir (3′) als Gleichung einer Hyperebene H des u-Raums auf, so können wir dies kurz so ausdrücken: $R_\lambda(u)$ verschwindet auf der Hyperebene H. Daraus folgt aber nach Satz 1:

$$R_\lambda(u)^\varrho \equiv 0 \qquad \left(\text{mod. } (u_1 \xi_1 + \cdots + u_n \xi_n)\right) \tag{4}$$

oder in Worten: $R_\lambda(u)$ spaltet im Ring $K[u]$ den Linearfaktor $u_1 \xi_1 + \cdots + u_n \xi_n$ ab. Da dies für einen ganz beliebigen Nullstrahl von $f_1, \ldots, f_r$ gilt, $R_\lambda(u)$ aber eine Form endlichen Grades in den u ist, so kann es nur endlich viele Nullstrahlen von (2) geben, q. e. d.

Zusatz zu Satz 4. Besitzt das System (2) *nur endlich viele Nullstrahlen, so besitzt es mit einer allgemeinen Form von beliebigem Grad h keine gemeinsame Nullstrahlen.*

Beweis: Man spezialisiere die allgemeine Form zu einem Produkt von h allgemeinen Linearformen; dann folgt die Behauptung aus Satz 4, a) und aus Satz 2a (cf. p. 160).

---

[15]) Beweis leicht.

Wir setzen jetzt voraus, daß das Gleichungssystem (2) genau endlich viele Lösungsstrahlen besitzt, etwa $(\xi_1^{(\alpha)}, \ldots, \xi_n^{(\alpha)})$ $(\alpha = 1, \ldots, q)$, und wollen diese Strahlen bestimmen[16]).

Wir nehmen zu dem System eine allgemeine Linearform (3) hinzu und bilden das Resultantensystem $R_1(u), \ldots, R_p(u)$ der Formen $f_1, \ldots, f_r, L$. Dieses verschwindet für spezielle u dann und nur dann, wenn es einen Nullstrahl $(\xi_1^{(\alpha)}, \ldots, \xi_n^{(\alpha)})$ von (2) gibt, auf dem auch L verschwindet, d. h. wenn für diese u und dieses α gilt

$$L_\alpha = u_1 \xi_1^{(\alpha)} + \cdots + u_n \xi_n^{(\alpha)} = 0 \,.$$

Das bedeutet: Die gemeinsamen Nullstrahlen der Formen $R_1(u)$, $\ldots, R_p(u)$ (aufgefaßt als Formen in den u) sind genau die 0-Strahlen des Produkts $\prod\limits_{\alpha=1}^{q} L_\alpha$. Daraus folgt: bezeichnet $D(u)$ den größten gemeinsamen Teiler der $R_\lambda(u)$ im Ring $K[u]$, so ist nach Satz 1 für eine natürliche Zahl ϱ:

$$\prod_\alpha L_\alpha^\varrho \equiv 0 \quad \bigl(\mathrm{mod.}\ D(u)\bigr) \;; \tag{5}$$

es gibt aber auch eine natürliche Zahl σ, so daß für jedes λ:

$$R_\lambda^\sigma \equiv 0 \quad \bigl(\mathrm{mod.} \prod_\alpha L_\alpha\bigr) \;. \tag{4'}$$

Aus (5) und (4′) folgt: $\prod\limits_\alpha L_\alpha$ und $D(u)$ enthalten genau dieselben Linearfaktoren; d. h. es gibt eine Reihe natürlicher Zahlen ϱ_α, so daß

$$D(u) = \prod_\alpha L_\alpha^{\varrho_\alpha} \,. \tag{6}$$

In Worten:

Satz 5. *Die Linearformen L_α, welche die Lösungsstrahlen von (2) bestimmen, werden durch Faktorzerlegung der Form $D(u)$, g. g. T. des Resultantensystems $R_\lambda(u)$, gefunden.*

Insbesondere ergibt sich im Fall $r = n - 1$, da dann $D(u) = R(u)$ vom Grade $H = h_1 \cdot \ldots \cdot h_{n-1}$ in den u ist (cf. Satz 3, p. 161, mit $f_n = L$):

$$h_1 \cdot \ldots \cdot h_{n-1} = \varrho_1 + \cdots + \varrho_q \,. \tag{7}$$

---

[16]) Das Folgende bis inkl. Satz 5 fast wörtlich zitiert nach *v. d. Waerden*; vgl. [5]), § 83, p. 16.

Man nennt die $\varrho_\varkappa$ die *Vielfachheiten* oder Multiplizitäten der Nullstrahlen. Die rechte Seite von (7) stellt dann die Gesamtzahl der Lösungen des vorgelegten Gleichungssystems, mit Vielfachheiten gerechnet, dar. Wir geben im folgenden Abschnitt noch eine andere Charakterisierung der Vielfachheit eines Strahls $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, welche es erlaubt, die Vielfachheit bei gegebenem $D(u)$ zu bestimmen, ohne $D(u)$ in Linearfaktoren zu zerfällen.

Zusatz zu Satz 5.

In einem System (2) mit genau endlich vielen Nullstrahlen mögen die Koeffizienten von unbestimmten Parametern ganz rational abhängen. Seine u-Resultante $D(u)$ hängt dann ebenfalls ganz rational von diesen unbestimmten Parametern ab.

Bei einer Spezialisierung der Parameter im Grundkörper besitze das spezialisierte System immer noch genau endlich viele Nullstrahlen. $D(u)$ gehe bei der Spezialisierung über in $D^*(u)$. Dann gilt für die u-Resultante $E(u)$ des spezialisierten Systems:

$$E(u) \equiv 0 \qquad \bigl(\text{mod. } D^*(u)\bigr) .$$

Denn die Teilbarkeit im Ring $K[u]$ bleibt bei der Spezialisierung bestehen; deshalb ist $D^*(u)$ ein Teiler sämtlicher spezialisierter Resultanten $R_\lambda^*(u)$, also auch ein Teiler ihres g. g. T. $E(u)$, q. e. d.

4. *Charakterisierung der Multiplizität ϱ eines Strahls $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.*

Der vorliegende Strahl bestimmt im u-Raum[17]) eine Hyperebene

$$L^* = u_1 \xi_1 + \cdots + u_n \xi_n = 0 ,$$

welche kurz mit H bezeichnet sei. Dann gilt:

Ist die Multiplizität eines Strahles gleich ϱ, so verschwinden auf H sämtliche folgenden Formen in den u:

$$D(u)\,, \quad \frac{\partial D(u)}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial D(u)}{\partial u_n}, \quad \frac{\partial^2 D(u)}{\partial u_1^2}, \quad \frac{\partial^2 D(u)}{\partial u_1\, \partial u_2}, \ldots, \frac{\partial^{\varrho-1} D(u)}{\partial u_n^{\varrho-1}}\,; \tag{8}$$

es verschwinden aber nicht sämtliche der Formen

$$\frac{\partial^\varrho D(u)}{\partial u_1^\varrho}, \ldots, \frac{\partial^\varrho D(u)}{\partial u_n^\varrho}\,; \tag{8'}$$

und umgekehrt.

[17]) D. h. wir fassen die u als Unbestimmte auf; vgl. Beweis von Satz 4, b), p. 162.

Beweis.

a) Ist die Multiplizität des Strahls gleich ϱ, so verschwinden in H sämtliche Ausdrücke (8).

Dies ergibt sich durch partielle Differentiation der Identität (6) (cf. p. 163); alle partiellen Ableitungen bis zur $(\varrho - 1)$-ten spalten offenbar den Faktor $u_1 \xi_1 + \cdots + u_n \xi_n$ ab.

b) Unter derselben Voraussetzung verschwinden in H nicht alle der Formen (8'). Denn sei etwa $\xi_1 \neq 0$. Würde $\dfrac{\partial^\varrho D}{\partial u_1^\varrho}$ auf H verschwinden, so würde (wieder nach (6)) auch

$$D'(u) = \mathop{\Pi'}_{\alpha} L_\alpha^{\varrho_\alpha}$$

auf H verschwinden (der Strich am Produktzeichen bedeutet, daß der zum vorliegenden Strahl gehörige Index α bei der Produktbildung wegzulassen ist). Dann müßte aber nach Satz 1 $D'(u)$ den Faktor $u_1 \xi_1 + \cdots + u_n \xi_n$ abspalten, was nicht der Fall ist.

c) Verschwinden auf H sämtliche der Formen (8), aber nicht alle der Formen (8'), so ist die Multiplizität des Strahls gleich ϱ. Daß sie mindestens gleich ϱ ist, folgt aus b), daß sie höchstens gleich ϱ ist, aus a).

Folgerungen.

Die Tatsache, daß die sämtlichen Nullstrahlen eines Systems (2) die Vielfachheit 1 besitzen, oder, wie wir sagen wollen, *getrennt liegen*, läßt sich so charakterisieren, daß auf keiner der Hyperebenen, in welche die Nullstellenmannigfaltigkeit von $D(u)$ im u-Raum zerfällt, sämtliche ersten partiellen Ableitungen von $D(u)$ verschwinden. Wir erhalten also:

Kriterium für die Vielfachheit 1.

Notwendig und hinreichend dafür, daß sämtliche Nullstrahlen eines Systems (2) getrennt liegen, ist, daß die zugeordneten Formen

$$D(u), D_1(u), \ldots, D_n(u) \qquad D_i(u) = \frac{\partial D}{\partial u_i}$$

im u-Raum keinen gemeinsamen Nullstrahl haben.

In dieser Formulierung könnte übrigens $D(u)$ weggelassen werden, da ja $h \cdot D(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i D_i(u)$ ist (h = Grad von $D(u)$), und die Existenz eines gemeinsamen Nullstrahls der $D_i(u)$ kann nach Satz 3 (cf. p. 161) durch das Verschwinden einer einzigen Form Δ in den Koeffizienten der $D_i(u)$, also auch in den Koeffizienten der $f_i(x)$, charakterisiert werden. Δ heißt die *Diskriminante* des Systems (2).

Aus diesem Kriterium und Satz 2 a (cf. p. 160) folgt:

Satz 6. *Hängen in einem System (2) die Koeffizienten der f_i (also auch diejenigen der D_i) ganz rational von unbestimmten Parametern ab und liegen bei einer Spezialisierung dieser Parameter die Nullstrahlen getrennt, so ist dies auch vor der Spezialisierung der Fall.*

Wir werden diesen Satz im nächsten Paragraphen (cf. § 2, **3.**, p. 169) anwenden.

§ 2. Beweis von Satz I

Wir wollen Satz I in zwei Schritten beweisen. Der erste Schritt besteht darin, daß wir die allgemeinsten Formen von vorgeschriebenen Gradzahlen, welche der Relation (1) genügen, explizite angeben[18]). Der zweite Schritt besteht im Beweis eines Satzes über diese allgemeinsten Formen (cf. **4.**, Satz I b, p. 173), welcher eine Verschärfung von Satz I darstellt.

1. Als Vorbereitung beweisen wir folgenden

Hilfssatz 1. Gegeben r Formen $f_1, \ldots, f_r$ vom selben Grad h in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$, welche die identische Relation

$$\sum_{i=1}^{r} x_i f_i = 0 \tag{1a}$$

erfüllen. Dann lassen sich die Formen f_i darstellen in der Gestalt

$$\begin{array}{lcl} f_1 = & & x_2 g_{12} + \cdots + x_r\, g_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_r = & x_1 g_{r1} + \cdots + x_{r-1}\, g_{r,r-1} & \end{array} \quad . \tag{9}$$

Dabei ist

$$g_{ij} = -g_{ji}\,,$$
$$g_{ii} = 0 \quad ;$$

ferner ist g_{ij} $(i < j)$ eine Form vom Grade $h - 1$, welche außer von x_1, $\ldots$, x_j nur von den Variablen $x_{r+1}, \ldots, x_n$ abhängt.

---

[18]) Die Präzisierung dieser Aussage folgt im nächsten Abschnitt (cf. 2., Sätze 7 und 7a, p. 168).

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach der Anzahl der in (1a) auftretenden Formen f_i. Der Satz sei also schon bewiesen für die Anzahl $\varrho - 1$. D. h.: wenn $\varrho - 1$ Formen in den Variablen $x_1, \ldots, x_{\varrho-1}; x_{r+1}, \ldots, x_n$ die Relation $\sum_{i=1}^{\varrho-1} x_i f_i = 0$ erfüllen, so lassen sie sich in der Form (9) darstellen (wobei man in (9) r durch $\varrho - 1$ zu ersetzen hat); dabei hängt g_{ij} $(i < j)$ nur ab von $x_1, \ldots, x_j; x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Nun seien ϱ Formen in den Variablen $x_1, \ldots, x_\varrho; x_{r+1}, \ldots, x_n$ vorgelegt, welche die Relation $\sum_{i=1}^{\varrho} x_i f_i = 0$ erfüllen. Betrachten wir diese Formen in der Hyperebene $x_\varrho = 0$, so gehen sie über in Formen der Variablen $x_1, \ldots, x_{\varrho-1}; x_{r+1}, \ldots, x_n$. Die ersten $\varrho - 1$ unter ihnen erfüllen die Induktionsvoraussetzung. Es gilt deshalb

$$\begin{array}{lcl} f_1 & = & \qquad\quad x_2 g_{12} + \cdots + x_{\varrho-1} g_{1,\varrho-1} + x_\varrho g_{1\varrho} \\ \vdots & & \qquad\qquad\ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_{\varrho-1} & = & x_1 g_{\varrho-1,1} + \cdots + x_{\varrho-2} g_{\varrho-1,\varrho-2} \qquad + x_\varrho g_{\varrho-1,\varrho}\,. \end{array} \tag{10}$$

Hierin sind die $g_{i\varrho}$ gewisse Formen $h - 1^{\text{ten}}$ Grades in den Variablen $x_1, \ldots, x_\varrho; x_{r+1}, \ldots, x_n$. Multipliziert man diese $\varrho - 1$ Identitäten resp. mit $x_1, \ldots, x_{\varrho-1}$ und addiert, so folgt

$$\sum_{i=1}^{\varrho-1} x_i f_i = x_\varrho \sum_{i=1}^{\varrho-1} x_i g_{i\varrho}\,, \tag{11}$$

also wegen $\sum_{i=1}^{\varrho} x_i f_i = 0$:

$$f_\varrho = -\sum_{i=1}^{\varrho-1} x_i g_{i\varrho}\,.$$

Setzt man nun

$$g_{\varrho i} = -g_{i\varrho} \qquad (i = 1,, \ldots, \varrho - 1)\,,$$
$$g_{\varrho\varrho} = 0\,,$$

so wird

$$f_\varrho = \sum_{i=1}^{\varrho-1} x_i g_{\varrho i}\,. \tag{12}$$

(10) und (12) ergeben zusammen genau die behauptete Darstellung der

Formen $f_1, \ldots, f_\varrho$. Da der Satz richtig ist für $\varrho = 2$, so folgt er für beliebiges r. [19])

2. Aus dem Hilfssatz 1 ergibt sich jetzt die behauptete explizite Darstellung in folgendem präzisen Sinne:

Satz 7. *Gegeben* r_1 *Formen vom Grade* h_1, r_2 *Formen vom Grade* h_2, *etc....,* r_t *Formen vom Grade* h_t $(h_\tau \geqq 1,\ \tau = 1, \ldots, t)$ *in* n *Unbestimmten* $x_1, \ldots, x_n$; *es sei* $\sum_{\tau=1}^{t} r_\tau = n$.

Diese n *Formen mögen der Relation* (1) *genügen. Dann gehen sie (nach geeigneter Umnumerierung der Formen und Unbestimmten) aus folgenden Formen durch Spezialisierung der unbestimmten Koeffizienten hervor:*

$$\begin{array}{llll}
f_i = \sum x_j g_{ij} & & & (i, j = 1, \ldots, r_1) \\
f_i = & \sum x_j g_{ij} & & (i, j = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2) \\
f_i = & & \sum x_j g_{ij} & (i, j = r_1 + \cdots + r_{t-1} + 1, \ldots, n); \\
g_{ji} = -g_{ij};\ g_{ii} = 0; & & &
\end{array} \tag{13}$$

die Matrix (g_{ij}), *durch die die Formen* (13) *definiert sind, ist also schiefsymmetrisch und zerfällt in Kästchen; ferner ist* g_{ij} $(i < j)$, *falls sie etwa im* τ*-ten Kästchen steht, eine* *a l l g e m e i n e* *Form* $(h_\tau - 1)$*-ten Grades in* $x_1, \ldots, x_n$.

Die Formen (13) erfüllen offenbar selbst die Relation (1); wir nennen sie die *allgemeinsten Formen von vorgeschriebenen Gradzahlen* $h_1, \ldots, h_t$, welche (1) erfüllen, und können dann Satz 7 kurz so zusammenfassen:

Satz 7a. *Bei vorgeschriebenen Gradzahlen erhält man jedes Formensystem, das die Relation* (1) *erfüllt, durch Spezialisierung der Koeffizienten der allgemeinsten Formen, welche* (1) *erfüllen.*

Beweis. Seien irgendwelche Formen f_i $(i = 1, \ldots, n)$ in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben. Wir denken uns das Polynom $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ formal hingeschrieben und nach homogenen Bestandteilen geordnet. Falls nun die Relation (1) besteht, müssen diese Bestandteile einzeln verschwinden. Das bedeutet aber: wenn man die Formen f_i und entsprechend die Variablen so numeriert, daß sie etwa nach aufsteigenden Graden geordnet erscheinen, so bestehen die t Relationen

[19]) Eine ähnliche Schlußweise findet sich bei *A. Hurwitz*; vgl. dazu: *A. Hurwitz*, Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls, Annali di Matematica pura e applicata 20 (1913).

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum x_i f_i = 0 && (i = 1, \ldots, r_1) \\ &\textstyle\sum x_i f_i = 0 && (i = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2) \\ &\textstyle\sum x_i f_i = 0 && (i = r_1 + \cdots + r_{t-1} + 1, \ldots, n)\,. \end{aligned} \tag{1b}$$

Das bedeutet aber: faßt man die gegebenen Formen nach verschiedenen Graden in Gruppen zusammen, so erfüllen die Formen einer Gruppe jeweils die Voraussetzung von Hilfssatz 1 (nach geeigneter Umbenennung der Variablen). Nach Hilfssatz 1[20]) ergibt sich jetzt die behauptete Darstellung ohne weiteres.

Es sei noch speziell auf den Fall hingewiesen, wo sämtliche Formen f_i vom gleichen Grade h sind. (13) reduziert sich dann auf

$$\begin{array}{lllll} f_1 = & & x_2 g_{12} + & \cdots & + x_n g_{1n} \\ f_2 = x_1 g_{21} & & + & \cdots & + x_n g_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ f_n = x_1 g_{n,1} + & \cdots & + x_{n-1} g_{n,n-1} & & \end{array} \quad . \tag{14}$$

Der Sinn von Satz 7 ist folgender. Wenn man von dem System (13) von Formen vorgeschriebener Gradzahlen zeigen kann, daß es Nullstrahlen besitzt, so besitzt nach Satz 7a und Satz 2a (cf. p. 160) *jedes* System von Formen mit denselben Gradzahlen, das (1) erfüllt, ebenfalls mindestens einen Nullstrahl. *Satz I wird deshalb bewiesen sein, sobald er für das System* (13) *bewiesen ist.*

3. Wir betrachten nun zuerst nicht das System (13), sondern das etwas speziellere System (14), und wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß dieses System mindestens einen Nullstrahl besitzt, falls nicht der Grad der in (14) auftretenden Formen gleich 1 und außerdem die Anzahl n der Variablen gerade ist. In diesen Ausnahmefällen besitzt das System (14) keinen Nullstrahl.

Satz Ia. *Das System* (14) *besitzt*

$$z_n^{(h)} = h^{n-1} - h^{n-2} + - \cdots + (-1)^{n-1} = \frac{h^n - (-1)^n}{h+1}$$

Nullstrahlen, und diese liegen getrennt.

---

[20]) cf. p. 165. Hilfssatz 1 liefert sogar noch eine etwas schärfere Aussage (bezüglich der Abhängigkeit der g_{ij} von den x_i). Diese Verschärfung ist jedoch für uns unwesentlich.

Die Zahl $z_n^{(h)}$ ist offenbar dann und nur dann 0, wenn h gleich 1 und n gerade ist. In Satz Ia sind also auch die Ausnahmefälle enthalten.

Dem Beweis von Satz Ia schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 2. Die ersten $n-1$ Formen $f_1, \ldots, f_{n-1}$ in (14) *besitzen nur endlich viele Nullstrahlen, und diese liegen getrennt.*

Wir führen den Beweis durch Induktion nach n unter Benützung von Satz 6 (cf. § 1, 4., p. 165). Der Satz sei schon bewiesen für $n-1$.

Die Induktionsvoraussetzung bedeutet: das Formensystem in $n-1$ Variablen

$$\begin{array}{lcl} f_1 & = & \quad x_2 g_{12} + \cdots + x_{n-2} g_{1,n-2} + x_{n-1} g_{1,n-1} \\ \vdots & & \qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_{n-2} & = & x_1 g_{n-2,1} + \cdots + x_{n-3} g_{n-2,n-3} \qquad + x_{n-1} g_{n-2,n-1} \end{array} \tag{15}$$

mit $g_{ji} = -g_{ij}$ $(i<j)$, $g_{ii} = 0$, wobei g_{ij} eine allgemeine Form $h-1^{\text{ten}}$ Grades in $n-1$ Variablen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ist, besitzt endlich viele getrennte Nullstrahlen.

Wir gehen jetzt über zu n und betrachten folgendes Formensystem in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{lcl} f_1 & = & \quad x_2 g_{12} + \cdots + x_{n-2} g_{1,n-2} + x_{n-1} g_{1,n-1} \\ \vdots & & \qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_{n-2} & = & x_1 g_{n-2,1} + \cdots + x_{n-3} g_{n-2,n-3} \qquad + x_{n-1} g_{n-2,n-1} \\ f_{n-1} & = & x_1 g_{n-1,1} + \cdots \qquad + x_{n-2} g_{n-1,n-2} \qquad\qquad + x_n g_{n-1,n}\,. \end{array} \tag{15'}$$

Dabei sollen die ersten $n-2$ Formen genau die Formen (15) sein; sie enthalten also die Variable x_n nicht. Ferner soll $g_{n-1,i} = -g_{i,n-1}$ sein $(i = 1, \ldots, n-2)$, und $g_{n-1,n}$ endlich soll eine *allgemeine* Form in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sein.

Wir bemerken zunächst, daß man die Formen (15′) aus den ersten $n-1$ Formen (14) (cf. p. 169) erhält durch Spezialisierung gewisser unbestimmter Koeffizienten zu 0 (nämlich sämtlicher Koeffizienten von $g_{i,n}$, $i = 1, \ldots, n-2$, und außerdem aller Koeffizienten der von x_n abhängigen Glieder in g_{ij}, $i<j \leq n-1$). Um Hilfssatz 2 zu beweisen,

genügt es also nach Satz 2 (cf. p. 8) und Satz 6 (cf. p. 14), zu zeigen, daß das System (15') nur endlich viele, getrennte Nullstrahlen besitzt.

Nun kann man aber die Nullstrahlen von (15') explizit aus den Nullstrahlen von (15) berechnen, da die Variable x_n nur in der letzten Form f_{n-1} auftritt. Damit zunächst die ersten $n-2$ Gleichungen $f_i = 0$ erfüllt sind, müssen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ auf einem Nullstrahl von (15) liegen. Man wähle nun irgendeinen dieser Nullstrahlen, etwa $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, aus und setze seine Richtungskoeffizienten an Stelle der x_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ in der letzten Gleichung $f_{n-1} = 0$ ein. Diejenigen Zahlen ξ_n, die den gegebenen Nullstrahl zu einem Nullstrahl von (15') ergänzen, sind dann aus der Gleichung

$$x_n \cdot g(x_n; \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) + C = 0 \tag{16}$$

zu bestimmen, wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$g_{n-1,n} = g\ ; \quad \sum_{i=1}^{n-2} \xi_i\, g_{n-1,i}\,(\xi_1 \ldots, \xi_{n-1}) = C\ .$$

Wir zeigen jetzt, daß die Gleichung (16) nur endlich viele, und zwar getrennte Lösungen besitzt.

Sei etwa $\xi_1 \neq 0$. Dann spezialisieren wir die unbestimmten Koeffizienten von g so, daß nur das Glied x_n^{h-1} mit dem Koeffizienten 1 und das Glied $u \cdot \xi_1^{h-1}$ mit unbestimmt bleibendem Koeffizienten u übrigbleibt. Gleichung (16) wird dadurch zu

$$x_n \cdot (u \cdot \xi_1^{h-1} + x_n^{h-1}) + C = 0.\ . \tag{16'}$$

Die Gleichung (16') besitzt aber endlich viele getrennte Lösungen, da u eine (dem Grundkörper adjungierte) Unbestimmte ist (man sieht nämlich unmittelbar, daß das Polynom auf der linken Seite von (16') mit seiner Ableitung keinen gemeinsamen Teiler besitzt).

(16') entstand aber aus (16) durch Spezialisierung; also gilt dasselbe für die Gleichung (16)[21].

Die so gefundenen h verschiedenen Lösungen von (16) ergänzen nun den betrachteten Nullstrahl von (15) zu h getrennten Nullstrahlen von (15'). Macht man dasselbe für sämtliche Nullstrahlen von (15), so erhält man alle Nullstrahlen von (15'), und da die Nullstrahlen von (15) getrennt liegen nach Induktionsvoraussetzung, so folgt dasselbe für die Nullstrahlen von (15'), q. e. d.

[21]) Denn die Diskriminante des Polynoms auf der linken Seite von (16') geht aus derjenigen des Polynoms auf der linken Seite von (16) durch Spezialisierung hervor.

Da der Hilfssatz richtig ist für $n = 2$ (dann reduziert sich nämlich f_1 auf $x_2 g_{12}$ und besitzt endlich viele getrennte Nullstrahlen), so gilt er allgemein.

Hilfssatz 3. Auf einem Nullstrahl der Formen $f_1, \ldots, f_{n-1}$ *in* (14), *der in der Hyperebene* $x_n = 0$ *liegt, kann* f_n *nicht verschwinden.*

Das bedeutet: die Formen $f_1, \ldots, f_n$ besitzen in der Hyperebene $x_n = 0$ keine gemeinsame Nullstelle.

Wir beweisen sogar: die Formen $f_1, \ldots, f_{n-1}$ besitzen in der Hyperebene $x_1 = 0$ keine gemeinsame Nullstelle. Dann folgt durch Vertauschung der Indizes 1 und n in den Formen und Variablen, daß sogar die Formen $f_2, \ldots, f_n$ in $x_n = 0$ keine gemeinsame Nullstelle haben. — Zum Beweis setzen wir in $f_2, \ldots, f_{n-1}$ die Variable x_1 gleich 0. Dann sind $[f_2]_{x_1=0}, \ldots, [f_{n-1}]_{x_1=0}$ $n - 2$ Formen in $n - 1$ Variablen von genau der Beschaffenheit, wie wir sie in Hilfssatz 2 betrachtet haben (man hat nur in dem Schema (14) (cf. p. 169) die letzte Zeile, ferner die erste Zeile und erste Spalte und in den g_{ij} alle Glieder mit x_1 wegzulassen). Sie besitzen also nach Hilfssatz 2 endlich viele (übrigens getrennte) Nullstrahlen. Die Form f_1 wird aber für $x_1 = 0$ eine *allgemeine Form* der Variablen $x_2, \ldots, x_n$, deren Koeffizienten von denen der Formen $[f_2]_{x_1=0}, \ldots, [f_{n-1}]_{x_1=0}$ algebraisch unabhängig sind (man betrachte wieder das Schema (14)). Nach dem Zusatz zu Satz 4 (cf. p. 162) besitzen also $[f_1]_{x_1=0}, [f_2]_{x_1=0}, \ldots, [f_{n-1}]_{x_1=0}$ keinen gemeinsamen Nullstrahl, q. e. d.

Jetzt können wir Satz Ia beweisen. Wir betrachten von den n Formen (14) nur die ersten $n - 1$. Sie besitzen endlich viele getrennte Nullstrahlen. Diese teilen wir in zwei Kategorien: solche in der Hyperebene $x_n = 0$ und solche außerhalb. Auf einem Nullstrahl in der Hyperebene verschwindet f_n nach HS. 3 nicht, auf einem solchen außerhalb verschwindet aber f_n trivialerweise; denn die Relation (1) liefert dann

$$\xi_n f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 ;$$

also verschwindet links wegen $\xi_n \neq 0$ notwendigerweise $f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Die Nullstrahlen der n Formen (14) liegen also getrennt und ihre Anzahl $z_n^{(h)}$ ist gleich der Anzahl der Nullstrahlen der Formen $f_1, \ldots, f_{n-1}$ außerhalb der Hyperebene $x_n = 0$, d. h. gleich der Differenz aus der Gesamtzahl ihrer Nullstrahlen und der Zahl ihrer Nullstrahlen in der Hyperebene $x_n = 0$.

Die Gesamtzahl ist nach Formel (7) (cf. p. 163) gleich h^{n-1}; die letztere Zahl aber ist $z_{n-1}^{(h)}$; denn setzt man in $f_1, \ldots, f_{n-1}$ überall $x_n = 0$, so entsteht wieder genau ein System von der Gestalt (14), wobei man n durch $n - 1$ zu ersetzen hat. Es gilt also für $z_n^{(h)}$ die Rekursionsformel

$$z_n^{(h)} = h^{n-1} - z_n^{(h-1)} . \tag{17}$$

Aus ihr und aus $z_2^{(h)} = h - 1$ ergibt sich Satz Ia.

4. Wir wollen jetzt zeigen, daß das allgemeinere Formensystem (13) (cf. p. 168) immer einen Nullstrahl besitzt, ausgenommen wenn sämtliche f_i Linearformen sind und n gerade ist. Damit wird dann auch Satz I bewiesen sein (cf. 2., p. 169).

Durch die Gleichungen

$$x_i = 0 \qquad (i = r_1 + 1, \ldots, n) \tag{18}$$

wird ein r_1-dimensionaler Teilraum A^{r_1} des R^n definiert. Wegen des Zerfallens von (13) in Kästchen gilt in diesem Teilraum identisch in $x_1, \ldots, x_{r_1}$:

$$f_i = 0 \qquad (i = r_1 + 1, \ldots, n) . \tag{19}$$

Die übrigbleibenden Formen bilden in A^{r_1}, aufgefaßt als Funktionen in den übrigbleibenden Variablen, ein System (14).

Was wir hier für das erste Kästchen ausgeführt haben, läßt sich genau gleich für die andern Kästchen durchführen. In analoger Bezeichnung folgt deshalb aus Satz Ia:

Satz Ib. *Das Formensystem* (13) *besitzt für jedes* $\tau \, (1 \leqq \tau \leqq t)$ *in einem gewissen Teilraum* A^{r_τ} *des* R^n *genau* $z_{r_\tau}^{(h_\tau)}$ *Nullstrahlen, und diese liegen getrennt.*

Da $z_r^{(h)}$ nur 0 ist für $h = 1$ und gerades r, so haben wir damit die Existenz eines Nullstrahls von (13) gezeigt.

5. Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch erwähnt, daß man durch Verallgemeinerung des in Abschnitt **3.** angewandten Beweisverfahrens die Anzahl der Nullstrahlen des Systems (13) genau bestimmen kann, in folgendem Sinne:

Satz Ic. *Sei t die Anzahl der Kästchen in* (13). *Dann besitzt das System* (13) *mit $t - 1$ allgemeinen Linearformen genau*

$$z_{r_1, \ldots, r_t}^{(h_1, \ldots, h_t)} = \frac{h_1^{r_1} - (-1)^{r_1}}{h_t + 1} \cdots \frac{h_t^{r_t} - (-1)^{r_t}}{h_t + 1}$$

gemeinsame Nullstrahlen. Diese Zahl ist 0 *dann und nur dann, wenn* $h_1 = 1$ *und* r_1 *gerade ist. In letzterem Fall besitzt* (13) *mit* $t-2$ *allgemeinen Linearformen* $z_{r_2,\ldots,r_t}^{(h_2,\ldots,h_t)}$ *Nullstrahlen.*

§ 3. Beweis von Satz II

1. In diesem Paragraphen wollen wir den zugrunde liegenden Koeffizientenkörper K reell-abgeschlossen voraussetzen (vgl. a. a. O.[3])).

Ein Formensystem $f_1, \ldots, f_n$ in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus K erfülle die Relation (1). Ferner sei die Voraussetzung von Satz II erfüllt; d. h. es seien nicht sämtliche Formen f_i von ungeradem Grade und zugleich sämtliche Anzahlen von Formen gleichen Grades gerade. Diese Voraussetzung ist insbesondere erfüllt, wenn n ungerade ist.

Dann lautet die Behauptung von Satz II: das System besitzt in K einen Nullstrahl.

Ein solches System geht nach Satz 7 (cf. § 2, **2.**, p. 168) aus einem System (13) durch Spezialisierung der unbestimmten Koeffizienten hervor, wobei (nach geeigneter Umnumerierung der Formen und Variablen) etwa für das erste Kästchen gilt:

Es ist nicht zugleich die Ordnung k des Kästchens gerade und der Grad h der Formen $f_1, \ldots, f_k$ ungerade.

Nun besitzt das System (13) nach Satz Ib (cf. § 2, **4.**, p. 173) im Teilraum A^k, welcher durch die Gleichungen

$$x_i = 0 \qquad (i = k+1, \ldots, n)$$

definiert wird, genau $z_k^{(h)}$ getrennte Nullstrahlen.

Betrachten wir nun das System (13) im Teilraum A^k. Es stellt hier ein Formensystem in nur k Variablen dar. Bildet man nun von diesem System die u-Resultante, so besagt Satz Ib, daß diese in den u genau vom Grade $z_k^{(h)}$ ist; ihre Strahlen $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ sind genau die Nullstrahlen des Systems (13) im Teilraum A^k. Nun ist aber (cf. § 2, **3.**, p. 169, Satz Ia) $z_k^{(h)}$ dann und nur dann gerade, wenn k gerade und h ungerade ist.

Im vorliegenden Fall ist also $D(u)$ *ungeraden Grades in den* u.

2. Wir beweisen jetzt

Satz 8. *Ein System* $f_1^*, \ldots, f_r^*$ *gehe aus einem System* $f_1, \ldots, f_r$ *mit Koeffizienten aus* $K[a_1, \ldots, a_q]$ *durch Spezialisierung der unbestimmten* a *im reell-abgeschlossenen Grundkörper* K *hervor. Besitzt dann das System* $f_1, \ldots, f_r$ *endlich viele Nullstrahlen und ist seine* u*-Resultante* $D(u)$ *ungeraden Grades in den* u, *so besitzen die Formen* $f_1^*, \ldots, f_r^*$ *in* K *einen Nullstrahl.*

Wie schon in der Einleitung erwähnt, ergibt sich der Beweis in ganz ähnlicher Weise wie bei *F. Behrend* (vgl. a. a. O. [7])).

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ q beliebige Elemente aus K. Um nun die a_ϱ zu den α_ϱ zu spezialisieren, führen wir durch die Substitution

$$a_\varrho = \alpha_\varrho + t_\varrho \qquad (\varrho = 1, \ldots, q)$$

eine Reihe neuer Unbestimmter $t_\varrho\, (\varrho = 1, \ldots, q)$ ein.

Das System f_i geht dadurch über in ein System $f_i(t, x)$ mit Koeffizienten aus $K(t_1, \ldots, t_q)$, welches eine ungerade Anzahl von Nullstrahlen besitzt (eventuelle Multiplizitäten mitgezählt). Diese liegen in dem Raum $A^n_{(t)}$, welcher zu einem algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper von $K(t_1, \ldots, t_q)$ gehört. Ein solcher ist der Körper Ω aller Puiseuxschen Reihen nach aufsteigenden gebrochenen Potenzen der Größen t_ϱ mit Koeffizienten aus $K(i)$ [22]).

Der Unterkörper P der reellen Puiseuxschen Reihen (d. h. der Reihen mit Koeffizienten aus K) ist formal-reell und wird durch Adjunktion von i algebraisch abgeschlossen ($P(i) = \Omega$) ; also ist er reell-abgeschlossen [23]).

Da nun das System $f_i(t, x)$ Koeffizienten aus P hat und außerdem in $P(i) = \Omega$ eine ungerade Anzahl von Lösungen besitzt, so folgt (da zu jedem Lösungsstrahl der konjugiert komplexe Strahl auch Lösungsstrahl, und zwar von der gleichen Multiplizität, ist), daß eine reelle Lösung, d. h. eine solche mit Koordinaten aus P existieren muß. Die Koordinaten dieses Lösungsstrahls sind also reelle Puiseuxsche Reihen. Da sie nur bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt sind, kann man sie durch Multiplikation mit einem geeigneten Potenzprodukt der t_ϱ so normieren, daß keine negativen Potenzen der t_ϱ vorkommen und daß mindestens ein ξ_i ein von 0 verschiedenes konstantes Glied besitzt. Setzt man nun alle $t_\varrho = 0$, so erhält man offenbar eine nicht-triviale Lösung des Systems f_i mit Koordinaten aus K; damit ist Satz 8 bewiesen.

Erfüllen nun n Formen $f_1^*, \ldots, f_n^*$ die Voraussetzungen von Satz II, so erfüllen sie im Teilraum A^k die Voraussetzungen von Satz 8, womit Satz II bewiesen ist.

(Eingegangen den 20. August 1945.)

---

[22]) Vgl. dazu: *B. L. v. d. Waerden*, Einführung in die algebraische Geometrie, Kap. II, § 14, 52—54, und die von *Ostrowski* Math. Zeitschrift 37 (1933), 98—133, § 1 gegebene Herleitung der Puiseuxschen Reihenentwicklung. Diese Entwicklung liefert unsere Behauptung zunächst nur für algebraische Funktionen einer einzigen Veränderlichen t. Sie überträgt sich aber ohne weiteres durch Induktion auf eine beliebige Anzahl q von Veränderlichen $t_\varrho\, (\varrho = 1, \ldots, q)$.

[23]) Vgl. [3]).