

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 18 (1945-1946)

**Artikel:** Über einen neuen Aufbau der projektiven Flächentheorie.  
**Autor:** Bol, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16899>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über einen neuen Aufbau der projektiven Flächentheorie

Von G. BOL, Heuweiler (Baden) <sup>1)</sup>

Um zu einem Aufbau der Differentialgeometrie der Flächen im projektiven dreidimensionalen Raum zu gelangen, ist es zweckmäßig, sich zu vergegenwärtigen, wie man bei vorgegebener Gruppe eine Flächentheorie aufzubauen pflegt.

Das Verfahren ist hierbei durchweg folgendes. Zunächst sucht man sich eine quadratische Grundform, die bei den Transformationen der Gruppe invariant ist. Mit Hilfe dieser Grundform wird ein kovarianter Differenziationsprozeß eingeführt. Wenn nicht — wie bei der Euklidischen oder Nichteuklidischen Geometrie — eine „Normale“ von vornherein geometrisch festgelegt ist, so bestimmt man sich eine mit Hilfe der Grundform, etwa indem man auf den Flächenpunkt den Laplaceschen Operator in bezug auf die Grundform anwendet. Dann ist das „mitbewegende Koordinatensystem“ festgelegt, es werden die Ableitungsgleichungen für die Basisvektoren in diesem Koordinatensystem angegeben, die Integrierbarkeitsbedingungen aufgestellt. Eine „Oberfläche“ wird in der üblichen Weise mit Hilfe der Grundform definiert. Die weiteren Untersuchungen fügen sich diesem Rahmen mehr oder weniger gut ein.

Fragen wir uns, wie man entsprechend in der projektiven Geometrie vorgehen kann! Die Asymptotenlinien einer Fläche sind ihrer Definition zufolge projektiv-invariant, es wird also zweckmäßig sein, die Grundform auf sie als Nulllinien zu beziehen. Die Torsen müssen also von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben. Wir wollen weiter Haupttangentialparameter einführen und uns in dieser Darstellung auf hyperbolisch gekrümmte Flächen beschränken <sup>2)</sup>.

$$\mathfrak{x}(u, v) \tag{1}$$

sei die Darstellung der Fläche,  $\mathfrak{x}$  stellt in der üblichen Weise den Vierervektor des Flächenpunktes dar.

Daß  $u, v$  Asymptotenparameter sind, drückt sich aus durch das Bestehen von Abhängigkeiten

<sup>1)</sup> Auszug aus Vorträgen, gehalten im Mathematischen Reichsinstitut in Oberwolfach (Baden) im Februar 1945.

<sup>2)</sup> Bei elliptisch gekrümmten Flächen kann man  $u$  und  $v$  konjugiert komplex wählen.

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_{uu} &= \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v + \pi_1 \mathfrak{x} , \\ \mathfrak{x}_{vv} &= \gamma \mathfrak{x}_u + \delta \mathfrak{x}_v + \pi_2 \mathfrak{x}\end{aligned}\tag{2}$$

zwischen den Ableitungen von  $\mathfrak{x}$ .  $\beta = 0$  oder  $\gamma = 0$  kennzeichnet offenbar die Regelflächen.

Die Koeffizienten im rechten Glied sind keineswegs invariant, wir müssen berücksichtigen, daß wir unsere Darstellung noch ändern können, und zwar durch die beiden folgenden Prozesse.

1. Umnormierung von  $\mathfrak{x}$ ;

$$\mathring{\mathfrak{x}}(u, v) = \varrho(u, v) \mathfrak{x}(u, v) \tag{3}$$

2. Änderung der Haupttangentenparameter durch die Substitution

$$u = f(u^*) , \quad v = g(v^*) \tag{4}$$

Wie man leicht nachrechnet, sind  $\beta$  und  $\gamma$  bei (3) invariant, bei (4) ändern sie sich gemäß

$$\beta^* = \beta f'^2 g'^{-1} , \quad \gamma^* = \gamma f'^{-1} g'^2 . \tag{5}$$

Wir nennen deshalb  $\beta$  und  $\gamma$  Halbinvarianten,  $\beta$  hat das „Gewicht“  $(2, -1)$ ,  $\gamma$  das Gewicht  $(-1, 2)$ .

Aus (5) folgt

$$\beta^* \gamma^* = \beta \gamma f' g' , \tag{6}$$

und da

$$du^* = f'^{-1} du , \quad dv^* = g'^{-1} dv , \tag{7}$$

folgt

$$\beta^* \gamma^* du^* dv^* = \beta \gamma du dv . \tag{8}$$

Damit haben wir eine invariante Grundform gefunden. Demgemäß können wir die Projektivoberfläche einer Fläche durch

$$O = \iint \beta \gamma du dv \tag{9}$$

erklären. Sie verschwindet offenbar identisch für Regelflächen und nur für sie.

Um nun bei der Differentiation von  $\mathfrak{x}$  mit Hilfe unserer Grundform (8) invariante Bildungen zu erhalten, müssen wir diesen Vektor nach (3)

irgendwie invariant normieren. Wie man leicht nachrechnet, ist bei (3), wenn die Klammer eine Determinante bedeutet:

$$(\overset{\circ}{\mathfrak{x}}, \overset{\circ}{\mathfrak{x}}_u, \overset{\circ}{\mathfrak{x}}_v, \overset{\circ}{\mathfrak{x}}_{uv}) = \varrho^4 (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}) . \quad (10)$$

Daraus ergibt sich, daß wir den Vektor  $\mathfrak{x}(u, v)$  stets so einrichten können, daß für ihn

$$(\mathfrak{x} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv}) = 1 \quad (11)$$

gilt<sup>3)</sup>.

Die Normierung (11) hängt jetzt aber offenbar von der Wahl der Asymptotenparameter  $u$  und  $v$  ab, bei einer Substitution (4) haben wir wie leicht ersichtlich

$$(\mathfrak{x} \mathfrak{x}_{u^*} \mathfrak{x}_{v^*} \mathfrak{x}_{u^* v^*}) = f'^2 g'^2 (\mathfrak{x} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv}) = f'^2 g'^2 ,$$

während für die zu diesen Parametern gehörige Normierung  $\mathfrak{x}^*$

$$(\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}_{u^*}^* \mathfrak{x}_{v^*}^* \mathfrak{x}_{u^* v^*}^*) = 1$$

gelten soll.

Nach (10) ist also offenbar

$$\mathfrak{x}^* = f'^{-\frac{1}{2}} g'^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{x} ; \quad (12)$$

durch die Normierung (11) wird der Vektor  $\mathfrak{x}$  halbinvariant vom Gewicht  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

Jetzt können wir aber leicht die gesuchte invariante Normierung von  $\mathfrak{x}$  erhalten, indem wir

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} \sqrt{\beta \gamma} \quad (13)$$

setzen. Denn das Produkt rechts hat das Gewicht  $(0, 0)$ , ändert sich also nicht bei den Substitutionen (4).

$\bar{\mathfrak{x}}$  sind die „normalen Koordinaten“ von Fubini. Setzt man jetzt

$$\mathfrak{y} = g^{ik} \bar{\mathfrak{x}}_{ik} = \frac{1}{\sqrt{\beta \gamma}} \bar{\mathfrak{x}}_{uv} \quad (14)$$

so ist auch  $\mathfrak{y}$  invariant festgelegt. Wir können dann die Gerade  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$  die Projektivnormale der Fläche nennen.

<sup>3)</sup> Dabei sind also „Flachpunkte“, bei denen die Determinante verschwindet, von der Betrachtung ausgeschlossen. Eventuell wurde auf Realität verzichtet; diese läßt sich aber durch eine kleine Änderung des Ansatzes in jedem Fall erhalten.

Das Netz der zur Normalenkongruenz gehörigen „Krümmungslinien“ ist dann zu den Asymptotenlinien konjugiert wie in der Euklidischen Geometrie; man sagt auch, die Kongruenz ist zur Fläche konjugiert.

Damit wäre das Hauptgerüst fertig, in dem der weitere Aufbau der Theorie erfolgen könnte.

Es ist nun aber überraschend, daß dieser Aufbau, so zwangsläufig erscheint, nicht derjenige ist, der den geometrischen Tatsachen am besten angepaßt ist. Vielmehr soll hier gezeigt werden, daß die projektive Flächentheorie, abweichend von derjenigen im Euklidischen und affinen Raum und der Kugelgeometrie, besser unter Verzicht auf eine zugrunde gelegte quadratische Grundform behandelt wird.

Ein Hinweis darauf ist schon in den Arbeiten von Fubini enthalten, in denen der obige Ansatz, allerdings in anderer Gestalt, zuerst durchgeführt wird. Fubini geht nämlich aus von einer beliebig angenommenen invarianten Form

$$F \, du \, dv ;$$

$F$  muß hier also eine Halbinvariante vom Gewicht  $(1, 1)$  sein. Mit Hilfe dieser Form kann man dann genau so vorgehen wie oben skizziert, für die „Normalen“ in bezug auf diese Form kann man durch geeignete Wahl von  $F$  eine beliebige zur Fläche konjugierte Kongruenz erhalten.

Setzt man nun  $F = \beta \gamma$ , so erhält man die normalen Koordinaten und eine mit der Fläche invariant verknüpfte Kongruenz, sonst treten aber kaum Vereinfachungen ein, wie es sein müßte, wenn dieser Ansatz der geometrisch richtige wäre.

Um nun den richtigen Weg zu finden, überlegen wir uns einmal, zu welchem Zweck denn statt der gewöhnlichen Differentiation diejenige mit Hilfe einer invarianten Form verwendet wird. Bekanntlich wird sie eingeführt, weil bei ihr die Ableitung eines Vektors ein Tensor ist. Bei unseren Transformationen (4) sind nun die Komponenten eines Vektors oder Tensors offenbar Halbinvarianten.

*Wir suchen also ein Differentiationsverfahren, bei dem die Ableitungen einer Halbinvarianten wieder halbinvariant sind.*

Gelingt es ein solches zu finden, so brauchen wir auch nicht mehr  $\mathfrak{x}$  invariant zu normieren, wir können dann diesen Prozeß gleich auf die durch (11) gegebene Normierung anwenden, bei der  $\mathfrak{x}$  halbinvariant vom Gewicht  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  ist. Besonders dadurch werden die Formeln sehr vereinfacht.

In Abschnitt I soll nun ein Differentiationsverfahren der gesuchten

Art beschrieben und mit dessen Hilfe der Aufbau der Theorie durchgeführt werden. In Abschnitt II wird dann der Differentiationsprozeß so spezialisiert, daß er in möglichst einfacher Weise invariant mit der Fläche verknüpft ist.

## ABSCHNITT I

### Allgemeine Flächentheorie

#### § 1. Das Differentiationsverfahren

Statt einer quadratischen Grundform denken wir uns zwei nicht verschwindende Halbinvarianten

$$\begin{array}{ll} \lambda & \text{vom Gewicht } (-1, c) \\ \mu & \text{vom Gewicht } (d, -1) \end{array} \quad (15)$$

vorgegeben<sup>4)</sup>.

Ist nun  $m$  eine weitere Halbinvariante vom Gewicht  $(a, b)$ , so ist auch  $m \lambda^a$  halbinvariant und hat das Gewicht  $(0, b + a c)$ .

Also ist

$$(m \lambda^a)_u = \lambda^a m_u + a \lambda^{a-1} \lambda_u m$$

halbinvariant vom Gewicht  $(1, b + a c)$  und ebenso nach Division durch  $\lambda^a$

$$m_1 = m_u + a \frac{\lambda_u}{\lambda} m \quad (16 \text{ a})$$

halbinvariant vom Gewicht  $(a + 1, b)$ .

Ebenso ist

$$m_2 = m_v + b \frac{\mu_v}{\mu} m \quad (16 \text{ b})$$

halbinvariant vom Gewicht  $(a, b + 1)$ .

*Die durch (16) erklärten Größen nennen wir die kovarianten Ableitungen von  $m$  mit Hilfe der Basisinvarianten  $\lambda, \mu$ .*

Diese Differentiation wird weiter durch angehängte Indizes angegeben.

Für unser Differentiationsverfahren gelten die üblichen Regeln, eine Summe kann man allerdings nur differenzieren, wenn beide Glieder daselbe Gewicht haben. Auch sind Differentiationen nicht mehr vertauschbar; es gilt

---

<sup>4)</sup>  $a, b, c, d$  dürfen beliebige reelle Werte haben.

$$m_{12} - m_{21} = (2a\sigma - 2b\tau)m, \quad (17)$$

wo

$$\sigma = \frac{1}{2}(\log \lambda)_{uv}, \quad \tau = \frac{1}{2}(\log \mu)_{uv} \quad ^5) \quad (18)$$

gesetzt ist.

Ist  $m$  absolut invariant, so ist  $m_1 = m_u$ ,  $m_2 = m_v$ .  $m_1 = 0$  bedeutet, daß  $m \lambda^a = \varphi(v)$ . Dann ist

$$\frac{\lambda_u}{\lambda} = -\frac{1}{a} \frac{m_u}{m} = \frac{(m^{-\frac{1}{a}})_u}{m^{-\frac{1}{a}}};$$

$m_1 = 0$  bedeutet, daß bei der Erklärung des Differentiationsverfahrens  $\lambda$  durch  $m^{-\frac{1}{a}}$  ersetzt werden darf, ohne daß sich diese ändert.

Offenbar ist

$$\lambda_1 = \mu_2 = 0. \quad (19)$$

$\sigma - \tau = 0$  bedeutet, daß  $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\psi(v)}{\varphi(u)}$ ; setzen wir

$$\frac{\lambda}{\psi(v)} = \frac{\mu}{\varphi(u)} = \omega, \quad (20)$$

so wird

$$\frac{\lambda_u}{\lambda} = \frac{\omega_u}{\omega}, \quad \frac{\mu_v}{\mu} = \frac{\omega_v}{\omega},$$

so daß sich unser Ableitungsverfahren auch mit Hilfe einer einzigen Grundinvarianten  $\omega = \frac{1}{F}$  vom Gewicht  $(-1, -1)$  erklären läßt. In diesem Falle ist unser Ableitungsverfahren für Tensoren identisch mit der kovarianten Differentiation mit Hilfe der Form (14).

## § 2. Ableitungsgleichungen

Wird die Normierung (11) vorausgesetzt, so rechnet man leicht nach, daß  $\alpha$  und  $\delta$  verschwinden. Ersetzt man nun in (2) die gewöhnliche Ableitung durch die kovariante mit Hilfe zweier beliebiger fest gewählter Grundinvarianten, so erhalten diese Ableitungsgleichungen die Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{11} &= \beta \mathfrak{x}_2 + l \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{22} &= \gamma \mathfrak{x}_1 + m \mathfrak{x}, \end{aligned} \quad (21)$$

wo

---

<sup>5)</sup> Der Faktor  $\frac{1}{2}$  ist für die flächentheoretische Anwendung zweckmäßig.

$$l = \pi_1 + \frac{1}{2} \frac{\mu_v}{\mu} \beta - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_u}{\lambda} \right)_u - \frac{1}{4} \left( \frac{\lambda_u}{\lambda} \right)^2, \quad (22)$$

$$m = \pi_2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda_u}{\lambda} \gamma - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_v}{\mu} \right)_v - \frac{1}{4} \left( \frac{\mu_v}{\mu} \right)^2$$

gesetzt ist. Nach (17) ist

$$\mathfrak{x}_{12} - \mathfrak{x}_{21} = (\tau - \sigma) \mathfrak{x},$$

die drei Punkte  $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{21}$  liegen also auf einer Geraden. Ist  $\mathfrak{y}$  ein beliebiger von  $\mathfrak{x}$  verschiedener Punkt dieser Geraden, so können wir unsere Gleichungen zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{11} &= \beta \mathfrak{x}_2 + l \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{12} &= \mathfrak{y} + p \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{21} &= \mathfrak{y} + q \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{22} &= \gamma \mathfrak{x}_1 + m \mathfrak{x} \end{aligned} \quad (23)$$

mit

$$q - p = \sigma - \tau \quad (24)$$

ergänzen. Die Gerade  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$  nennen wir die „erste Relativnormale“ der Fläche in bezug auf die Halbinvarianten  $\lambda$  und  $\mu$ .

Nach (11) ist

$$(\mathfrak{x} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_{12}) = (\mathfrak{x} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}) = 1. \quad (25)$$

### § 3. Ebenenkoordinaten

Der Vektor

$$\xi = (\mathfrak{x} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = (\mathfrak{x} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2), \quad (26)$$

dessen Komponenten die dreizeiligen algebraischen Minoren der rechtsstehenden Matrix sein sollen, stellt die Tangentenebene unserer Fläche dar, es ist

$$\xi \mathfrak{x} = \xi \mathfrak{x}_1 = \xi \mathfrak{x}_2 = 0. \quad (27)$$

$\xi$  ist offenbar halbinvariant vom Gewicht  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , es ist

$$(\xi \xi_1 \xi_2 \xi_{12}) = 1. \quad (28)$$

Man erhält in der üblichen Weise durch Berücksichtigung der durch fortgesetzte Differentiation aus (27) hervorgehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \xi_{11} &= -\beta \xi_2 + \tilde{l} \xi, \\
 \xi_{12} &= \eta + \tilde{p} \xi, \\
 \xi_{21} &= \eta + \tilde{q} \xi, \\
 \xi_{22} &= -\gamma \xi_1 + \tilde{m} \xi;
 \end{aligned} \tag{29}$$

wobei  $\eta$  eine beliebige Ebene der von  $\xi$ ,  $\xi_{12}$ ,  $\xi_{21}$  bestimmten Geraden ist und

$$\begin{aligned}
 \tilde{l} &= l + \beta_2, \\
 \tilde{m} &= m + \gamma_1,
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\tilde{q} - \tilde{p} = \sigma - \tau. \tag{31}$$

Hierbei ist

$$\eta \mathfrak{x}_1 = \eta \mathfrak{x}_2 = 0, \quad \xi_1 \eta = \xi_2 \eta = 0 \tag{32}$$

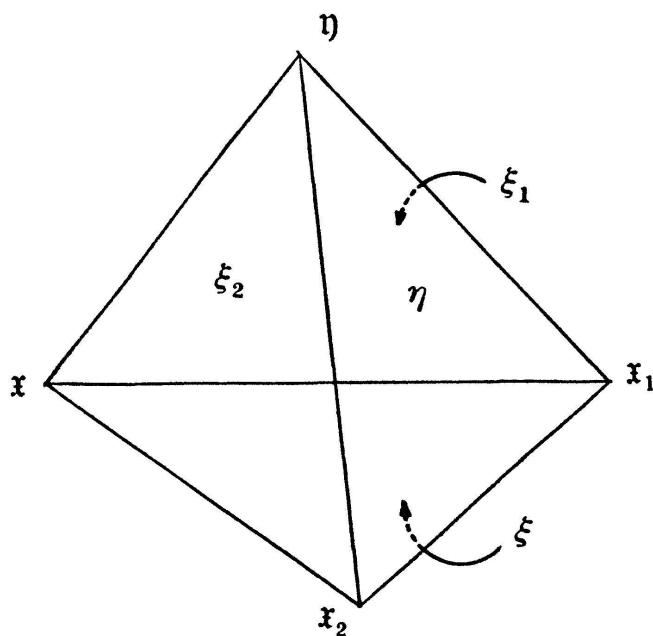
Die Schnittgerade  $(\xi, \eta)$  nennen wir die „zweite Relativnormale“ unserer Fläche.

#### § 4. Begleittetraeder

Die Forderung, daß der Punkt  $\eta$  in der Ebene  $\eta$  liegen soll, so daß  $\eta \eta = 0$  gilt, führt auf die Bedingung

$$p + \tilde{q} = q + \tilde{p} = -2C = -\beta\gamma + \sigma + \tau. \tag{33}$$

Ist sie erfüllt, so bilden  $\mathfrak{x}$ ,  $\mathfrak{x}_1$ ,  $\mathfrak{x}_2$ ,  $\eta$  die Ecken;  $\xi$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\eta$  die Seitenflächen eines Tetraeders; wir nennen es das Begleittetraeder der Fläche. Es gilt die Multiplikationstabelle



	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{x}_1$	$\mathfrak{x}_2$	$\eta$
$\xi$	0	0	0	1
$\xi_1$	0	0	-1	0
$\xi_2$	0	-1	0	0
$\eta$	1	0	0	0

wo an jeder Stelle das Produkt der links und oberhalb verzeichneten Vektoren abzulesen ist.

## § 5. Integrierbarkeitsbedingungen

Mit Hilfe der Vertauschungsregel (17) erhält man aus (23), (29) die Ableitungsgleichungen für  $\eta$  und  $\eta$ , nämlich

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \tilde{q} \mathfrak{x}_1 + \tilde{l} \mathfrak{x}_2 + s \mathfrak{x} & \eta_1 &= q \xi_1 + l \xi_2 - s \xi \\ \eta_2 &= \tilde{m} \mathfrak{x}_1 + \tilde{p} \mathfrak{x}_2 + t \mathfrak{x} & \eta_2 &= m \xi_1 + p \xi_2 - t \xi\end{aligned}\quad (34)$$

mit

$$\begin{aligned}s &= \beta m + l_2 - p_1 = \beta \tilde{m} - \tilde{l}_2 + \tilde{p}_1, \\ t &= \gamma l + m_1 - q_2 = \gamma \tilde{l} - \tilde{m}_1 + \tilde{q}_2.\end{aligned}\quad (35)$$

Aus (34) ergibt sich die weitere Integrierbarkeitsbedingung

$$t_1 - s_2 + \tilde{m} l - \tilde{l} m + \tilde{p} q - \tilde{q} p = 0. \quad (36)$$

## § 6. Die Lie- $F_2$

Zieht man in jedem Punkte einer Asymptotenlinie  $v = v_0$  die Tangente an die andere hindurchgehende Asymptotenlinie, so entsteht eine Regelfläche  $R_{v_0}$ . Drei für  $u = u_0$  „aufeinanderfolgende“ Geraden dieser Regelfläche bestimmen eine Quadrik, die man die Lie- $F_2$  der Fläche im Punkte  $(u_0 v_0)$  nennt. Geht man statt von  $R_{v_0}$  von der der Kurve  $u = u_0$  anbeschriebenen Regelfläche  $R_{u_0}$  aus, so entsteht dieselbe Quadrik.

Es ergibt sich, daß der Punkt  $\eta$  auf der Lie- $F_2$  liegt, wenn

$$p = \tilde{p}, \quad q = \tilde{q}, \quad (37)$$

und daher wegen (33)

$$p = \frac{1}{2} \beta \gamma - \sigma, \quad q = \frac{1}{2} \beta \gamma - \tau. \quad (38)$$

$\eta$  ist dann die Tangentenebene der Lie- $F_2$  im Punkte  $\eta$ . Die Lie- $F_2$  selbst hat dann die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{Z}(z, w) = \eta + w \mathfrak{x}_1 + z \mathfrak{x}_2 + 2 w \mathfrak{x}. \quad (39)$$

Die beiden Normalen  $(\mathfrak{x} \eta)$  und  $(\xi, \eta) = (\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2)$  sind polar in bezug auf die Lie- $F_2$ .

## § 7. Basiskongruenz

Wir haben in § 2 zu jedem Paar von Grundinvarianten eindeutig eine Kongruenz von Geraden  $(\mathfrak{x}, \eta)$  gefunden. Man kann leicht sehen, daß auch zu jeder Kongruenz, deren Geraden nicht in der Tangentenebene liegen, eindeutig ein kovarianter Differenziationsprozeß gehört.

Dazu bestimmen wir in jedem Punkt die zu der vorgegebenen in bezug auf die Lie-F<sub>2</sub> polare Gerade der Tangentenebenen; schneidet diese die Haupttangenten in den Punkten

$$\mathfrak{x}_u + A\mathfrak{x} , \quad \mathfrak{x}_v + B\mathfrak{x} ,$$

wobei wir  $\mathfrak{x}$  nach (11) normiert denken, so muß

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_u + A\mathfrak{x} , \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_v + B\mathfrak{x} \quad (39)$$

sein und daher

$$-\frac{1}{2} \frac{\lambda_u}{\lambda} = A , \quad -\frac{1}{2} \frac{\mu_v}{\mu} = B \quad (40)$$

gesetzt werden.

Dadurch ist aber der Differentiationsprozeß eindeutig festgelegt; denn bei diesem werden nur  $\frac{\lambda_u}{\lambda}$  und  $\frac{\mu_v}{\mu}$  verwendet.

Durch Integration finden wir  $\lambda$  und  $\mu$ , die Halbinvarianz läßt sich leicht erreichen.

Wir können daher auch von Differentiation in bezug auf eine beliebig vorgegebene Kongruenz sprechen; deren Geraden dürfen nur nicht in den Tangentenebenen liegen.

## § 8. Relativkrümmungslinien

Die Normalen  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$  längs einer Kurve  $u(t), v(t)$  der Fläche berühren eine Raumkurve

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{y} + g(t) \mathfrak{x} , \quad (41)$$

wenn

$$d\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_u du + \mathfrak{z}_v dv \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}} ,$$

also

$$\mathfrak{z}_1 du + \mathfrak{z}_2 dv \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}} . \quad (42)$$

Nach (34) gibt dies

$$\{(\tilde{q} + g)\mathfrak{x}_1 + \tilde{l}\mathfrak{x}_2\} du + \{\tilde{m}\mathfrak{x}_1 + (\tilde{p} + g)\mathfrak{x}_2\} dv = 0 ,$$

oder

$$\begin{aligned} (\tilde{q} + g) du + \tilde{m} dv &= 0 , \\ \tilde{l} du + (\tilde{p} + g) dv &= 0 . \end{aligned} \quad (43)$$

Elimination von  $g$  gibt die Gleichung

$$\tilde{l} du^2 + (\tilde{p} - \tilde{q}) du dv - \tilde{m} dv^2 = 0 \quad (44)$$

der „Krümmungslinien erster Art“.

Für die „Krümmungslinien zweiter Art“ der Kongruenz  $(\xi, \eta)$  findet man entsprechend

$$l du^2 + (p - q) du dv - m dv^2 = 0. \quad (45)$$

Die Kongruenz  $(x, y)$  ist also dann und nur dann in bezug auf die Fläche *konjugiert*, wenn

$$\tilde{p} - \tilde{q} = \tau - \sigma = 0 ,$$

also nach § 1 *wenn die Differentiation auch mit Hilfe einer quadratischen Grundform (14) erklärt werden kann*<sup>6)</sup>. Wegen (24) ist dann auch die zweite Kongruenz  $(\xi, \eta)$  konjugiert und umgekehrt.

In diesem Sinne ergibt sich die Fubinische Theorie als Spezialfall der vorliegenden; um die Fubinischen Formeln für normale Koordinaten zu erhalten, muß man  $\lambda = \mu = \beta \gamma$  setzen. Unsere Relativnormale wird dann Fubinis Projektivnormale.

Die beiden Krümmungsliniennetze können bei nicht konjugierten Kongruenzen offenbar nur dann zusammenfallen, wenn  $\tilde{l} = l$ ,  $\tilde{m} = m$  oder nach (30), wenn  $\beta_2 = \gamma_1 = 0$ . Nach § 1 bedeutet das aber, daß

$$\lambda = \gamma , \quad \mu = \beta \quad (46)$$

gesetzt werden kann.

Durch die Wahl (46) wird der Differentiationsprozeß in einfachster Weise invariant mit der Fläche verknüpft. Wir werden im nächsten Abschnitt diese Wahl zugrunde legen und feststellen, daß sie für die meisten geometrischen Fragen allen anderen vorzuziehen ist.

Wann bei konjugierten Kongruenzen beide Netze zusammenfallen, soll hier nicht untersucht werden, da sich hier keine neuen Gesichtspunkte ergeben.

Durch Elimination der Differentiale erhält man aus (43) die Gleichung

$$g^2 + (\tilde{q} + \tilde{p}) g + \tilde{q} \tilde{p} - \tilde{l} \tilde{m} = 0 \quad (47)$$

---

<sup>6)</sup> Hierin ist wohl der wichtigste Grund zu sehen, weshalb die früheren Theorien fast ausschließlich konjugierte Kongruenzen betrachteten.

der Brennpunkte des Strahles, für die also, wenn  $\eta$  auf der Lie- $F_2$  liegt, also (37) gilt, nach (33)

$$g^{(1)} + g^{(2)} = -(\tilde{q} + p) = 2C \quad g^{(1)} g^{(2)} = q p - l m \quad (48)$$

gesetzt werden kann.

Der vierte harmonische Punkt zu  $\mathfrak{x}$  in bezug auf die Brennpunkte liegt daher in  $\eta + C\mathfrak{x}$ , wir wollen ihn den Krümmungsmittelpunkt nennen.

Dual erklärt man die Krümmungsmittellebene  $\eta + C\xi$  der zweiten Kongruenz.

Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsmittellebene liegen polar in bezug auf die Lie- $F_2$ .

## § 9. Affine Flächentheorie

Die zweiten Normalen unserer Fläche liegen alle in einer festen Ebene, wenn  $\eta$  fest ist, also nach (34), (24)

$$p = q = l = m = \sigma - \tau = 0 \quad (49)$$

gilt. Wir haben dann die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{11} &= \beta \mathfrak{x}_2, & \xi_{11} &= -\beta \xi_2 + \beta_2 \xi, \\ \mathfrak{x}_{12} &= \mathfrak{x}_{21} = \eta, & \xi_{12} &= \xi_{21} = \eta - 2C\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{22} &= \gamma \mathfrak{x}_1, & \xi_{22} &= -\gamma \xi_1 + \gamma_1 \xi, \\ \eta_1 &= -2C\mathfrak{x}_1 + \beta_2 \mathfrak{x}_2, & \eta_1 &= \eta_2 = 0. \\ \eta_2 &= \gamma_1 \mathfrak{x}_1 - 2C\mathfrak{x}_2, & & \end{aligned} \quad (50)$$

Wegen (49) kann man diesen Ableitungsprozeß mit einer einzigen Grundinvarianten  $\omega$  vom Gewicht  $(-1, -1)$  erklären, deren Ableitungen wegen (19) verschwinden.

Setzt man dann

$$\bar{\mathfrak{x}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \mathfrak{x}, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \xi, \quad \bar{\eta} = \sqrt{\omega} \eta, \quad \bar{\eta} = \sqrt{\omega} \eta, \quad (51)$$

so sind die quergestrichenen Vektoren absolut invariant, und es gelten die Ableitungsformeln

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{x}}_{11} &= \beta \bar{\mathfrak{x}}_2, & \bar{\xi}_{11} &= -\beta \bar{\xi}_1 + \beta_2 \bar{\xi}, \\
\bar{\mathfrak{x}}_{12} = \bar{\mathfrak{x}}_{21} &= \frac{1}{\omega} \bar{\mathfrak{y}}, & \bar{\xi}_{12} = \bar{\xi}_{21} &= \frac{1}{\omega} \bar{\eta} - 2C \bar{\xi}, \\
\bar{\mathfrak{x}}_{22} &= \gamma \bar{\mathfrak{x}}_1, & \bar{\xi}_{22} &= -\gamma \bar{\xi}_1 + \gamma_1 \bar{\xi}, \quad (52) \\
\bar{\mathfrak{y}}_1 &= -2C \omega \bar{\mathfrak{x}}_1 + \beta_2 \omega \bar{\mathfrak{x}}_2, & \bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2 &= 0. \\
\bar{\mathfrak{y}}_2 &= \gamma_1 \omega \bar{\mathfrak{x}}_1 - 2C \omega \bar{\mathfrak{x}}_2,
\end{aligned}$$

Wählt man die feste Ebene  $\bar{\eta}$  als uneigentliche Ebene eines affinen Koordinatensystems:

$$\bar{\eta} = (0, 0, 0, 1),$$

so erhalten wegen  $\eta \mathfrak{x} = \bar{\eta} \bar{\mathfrak{x}} = 1$  die vierten Koordinaten des Punktes  $\bar{\mathfrak{x}}$  den Wert 1, die drei ersten sind also die affinen Koordinaten dieses Punktes. (52) stellt dann also die Formeln der affinen Flächentheorie dar.

Ein Vergleich mit den üblichen Formeln, etwa in W. Blaschkes Differentialgeometrie II, p. 132, zeigt daß

$$\beta = \frac{A}{F}, \quad \gamma = \frac{D}{F}, \quad F = \frac{1}{\omega}, \quad H = 2C\omega = \frac{2C}{F} \quad (53)$$

gesetzt werden muß.

Dabei ist zu bedenken, daß die ersten Ableitungen von  $\bar{\mathfrak{x}}$ ,  $\bar{\mathfrak{y}}$  und  $\bar{\xi}$  wegen der absoluten Invarianz dieser Vektoren gewöhnliche Ableitungen sind.

Unsere erste Relativnormale fällt mit der Affinnormale zusammen, sie ist die Polare in bezug auf die Lie- $F_2$  von der unendlich fernen Geraden der Tangentenebene.

Bei den Affinsphären gehen außerdem die ersten Normalen durch einen festen Punkt, hier muß also auch

$$\tilde{l} = \tilde{m} = 0$$

gelten. Wegen (30) gilt dann  $\beta_2 = \gamma_1 = 0$ , man kann wie in § 8

$$\lambda = \gamma, \quad \mu = \beta$$

setzen. Ist auch  $C = 0$ , so liegt der feste Punkt in  $\eta$ , die Affinsphäre ist dann uneigentlich.

$H = 0$ , also wegen (53), (49), (33) :

$$C = p = q = 0,$$

stellt bekanntlich die Affinminimalflächen dar. Da hier (37) gilt, ist  $\eta$  Tangentenebene der Lie- $F_2$ .

Die Lie- $F_2$  der Affinminimalflächen sind also sämtlich Paraboloide. Deshalb hat man diese Flächen früher auch paraboloidisch genannt (P. Franck).

## § 10. Kanonisches Büschel

Wählt man bei festem  $x, y$

$$\lambda = \beta^{x-1} \gamma^{2x-1}, \quad \mu = \beta^{2y-1} \gamma^{y-1}, \quad (54)$$

so erhält man eine mit der Fläche invariant verknüpfte Kongruenz. Besonders wichtig ist der Fall  $x = y$ . Die bei dieser Wahl entstehenden  $\infty^1$ -Normalen liegen in einer festen Ebene. Sie bilden das „Kanonische Büschel“, dessen Geraden bei verschiedenen Fragen eine wichtige Rolle spielen.

Wir wollen das an einem bekannten Beispiel illustrieren. Die Gleichung

$$\beta du^3 - \gamma dv^3 = 0 \quad (55)$$

stellt auf der Fläche drei Kurvenscharen dar, deren Kurven bekanntlich die Segrekurven genannt werden.

Wählt man eine dieser Scharen aus, so ist

$$t = x_1 + A x_2$$

ein Punkt der Tangente, wenn

$$\frac{dv}{du} = A = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}. \quad (56)$$

$A$  ist halbinvariant vom Gewicht  $(1, -1)$ . Wir setzen daher

$$\lambda = A^{-1}, \quad \mu = A$$

Dem entsprechen in (54) die Werte  $x = \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ . Nun ist

$$t_1 + A t_2 = 2 A y + A^2 \gamma x_1 + \beta x_2 + (l + A p + A q + A^2 m) x$$

ein Punkt der Schmiegebene unserer Kurve, wegen (56) ist aber

$$t_1 + A t_2 \equiv 2 A y \pmod{x, t},$$

so daß diese Schmiegebene die zu unseren Grundinvarianten gehörige Normale enthält. Das gilt für jede der drei Scharen. Also

*Die Schmiegebene der drei Segrekurven haben eine Gerade gemeinsam, nämlich den zu  $x = y = \frac{2}{3}$  gehörigen Strahl des kanonischen Büschels.*

Diesen Strahl nennt man auch die Segresche Normale oder „Achse“ der Fläche.

Für  $x = y = 1$  erhält man die Wilczynska Normale oder „Direktrix“, für die  $\lambda = \gamma$ ,  $\mu = \beta$  gilt, also wegen (19)  $\beta_2 = \gamma_1 = 0$  kennzeichnend ist.

$x = y = 0$  gibt die Fubinische Normale, die oft auch als Projektivnormale schlechthin eingeführt wird. Geometrisch scheint mir das allerdings nicht gerechtfertigt.

Der Wert  $x = y = \frac{1}{2}$  gehört schließlich zur Greenschen Normale. Für sie ist  $\beta_1 = \gamma_2 = 0$  kennzeichnend. Sie spielt für viele Fragen eine wichtige Rolle, die mit den algebraischen Schmiegmannigfaltigkeiten der Fläche oder ihrer Asymptotenlinien in einem festen Punkte zu tun haben.

## ABSCHNITT II

### Flächentheorie im natürlichen Koordinatensystem

#### § 11. Die Grundformeln

Wir wollen uns in diesem Abschnitt auf die Wahl

$$\lambda = \gamma, \quad \mu = \beta \quad (57)$$

der Grundinvarianten festlegen<sup>7)</sup>. Dann ist nach (19), (30)

$$\tilde{l} = l, \quad \tilde{m} = m. \quad (58)$$

Aus (35) folgt jetzt  $s = \beta m$ ,  $t = \gamma l$ . Wir setzen noch  $p = \tilde{p}$ ,  $q = \tilde{q}$  und haben dann die Ableitungsgleichungen

---

<sup>7)</sup> Das ist nur möglich, wenn die Fläche keine Regelfläche ist. Ist aber etwa  $\beta = 0$ , so bleiben die Formeln sogar richtig, wenn man die Halbinvariante  $\mu$  beliebig wählt. Hier soll darauf nicht eingegangen werden.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{11} &= \beta \mathfrak{x}_2 + l \mathfrak{z} , & \xi_{11} &= -\beta \xi_2 + l \xi , \\
\mathfrak{x}_{12} &= \mathfrak{y} + p \mathfrak{x} , & \xi_{12} &= \eta + p \xi , \\
\mathfrak{x}_{21} &= \mathfrak{y} + q \mathfrak{x} , & \xi_{21} &= \eta + q \xi , \\
\mathfrak{x}_{22} &= \gamma \mathfrak{x}_1 + m \mathfrak{x} , & \xi_{22} &= -\gamma \xi_1 + m \xi ;
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{y}_1 &= q \mathfrak{x}_1 + l \mathfrak{x}_2 + \beta m \mathfrak{x} , & \eta_1 &= q \xi_1 + l \xi_2 - \beta m \xi , \\
\mathfrak{y}_2 &= m \mathfrak{x}_1 + p \mathfrak{x}_2 + \gamma l \mathfrak{x} , & \eta_2 &= m \xi_1 + p \xi_2 - \gamma l \xi .
\end{aligned} \tag{60}$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2} \beta \gamma - \sigma , & \sigma &= \frac{1}{2} (\log \gamma)_{uv} , \\
q &= \frac{1}{2} \beta \gamma - \tau , & \tau &= \frac{1}{2} (\log \beta)_{uv} .
\end{aligned} \tag{61}$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen nehmen die einfache Gestalt an

$$\begin{aligned}
l_2 - p_1 &= 0 , \\
m_1 - q_2 &= 0 ;
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\gamma l_1 - \beta m_2 = 0 . \tag{63}$$

Wenn von der Projektivnormalen gesprochen wird, meinen wir von jetzt an die zu diesem System gehörige Normale (von Wilczynski). Auch die Invarianten sollen sich immer auf das obige System beziehen.

## § 12. Diskussion der Integrierbarkeitsbedingungen

Für verschiedene Untersuchungen ist es zweckmäßig, das Gleichungssystem (62), (63) vollständig zu machen. Das geschieht etwa indem man zunächst an die Stelle von (63) unter Einführung einer neuen Funktion  $n$  die Gleichungen

$$l_1 = n \beta \quad m_2 = n \gamma$$

setzt. Durch dreimaliges Aufstellen von Integrierbarkeitsbedingungen erhält man das vollständige System

$$\begin{aligned}
l_1 &= n \beta , & m_1 &= q_2 , \\
l_2 &= p_1 , & m_2 &= n \gamma , \\
n_1 &= 4 \frac{\tau}{\gamma} m + \frac{q_{22}}{\gamma} , \\
n_2 &= 4 \frac{\sigma}{\beta} l + \frac{p_{11}}{\beta} ,
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\left( \frac{p_{11}}{\beta} \right)_1 - \left( \frac{q_{22}}{\gamma} \right)_2 = 6(\sigma - \tau) n - 4 \left( \frac{\sigma}{\beta} \right)_1 l + 4 \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)_2 m .$$

Der Vorzug des Systems (66) ist, daß es auch noch vollständig bleibt, wenn man zwischen  $\beta$  und  $\gamma$  eine Beziehung voraussetzt.

Etwa bei den isotherm-asymptotischen Flächen ist  $\beta = \gamma$  nach geeigneter Transformation (4). Da nach (61)  $p$  das Hauptglied  $\gamma_{uv}$ ,  $q$  das Hauptglied  $\beta_{uv}$  enthält, ist

$$p_{111} \sim \gamma_{uuuuv}, \quad q_{222} \sim \beta_{vvvvv}.$$

Die isotherm-asymptotischen Flächen hängen daher ab von fünf beliebigen Funktionen einer Veränderlichen<sup>8)</sup>.

Dieses altbekannte Ergebnis läßt sich hier besonders einfach begründen.

### § 13. Projektive Abwickelbarkeit

Auch hier bringen wir keine neuen Ergebnisse, zeigen nur wie man die bekannten mit Hilfe unserer Formeln einfach begründen kann.

Zwei Flächen heißen aufeinander projektiv abwickelbar, wenn sie sich unter Entsprüchen der Asymptotenlinien so eindeutig aufeinander beziehen lassen, daß an entsprechenden Stellen

$$\overset{\circ}{\beta} = \beta, \quad \overset{\circ}{\gamma} = \gamma$$

gilt.

Um festzustellen, ob eine Fläche projektiv abwickelbar ist, muß man untersuchen, ob das Gleichungssystem (62), (63) bei fest gehaltenem  $\beta, \gamma$  also  $p, q$  außer der zur Fläche gehörigen noch andere Lösungen  $l', m'$  hat.

Für  $L = l' - l$ ,  $M = m' - m$  führt das auf die Gleichungen

$$L_2 = 0, \quad M_1 = 0, \quad L_1 \gamma - M_2 \beta = 0. \quad (67)$$

Verschwindet  $L$  nicht, so bedeutet die erste Gleichung, da  $L$  das Gewicht  $(2, 0)$  hat, daß  $L$  nicht von  $v$  abhängt; man kann dann  $u$  so wählen, daß  $L = 1$  wird. Ist  $M \neq 0$ , so kann man ebenso  $M = 1$  erreichen. Aus (19) liest man dann ab, daß

$$\gamma_u = \beta_v \quad (68)$$

sein muß.

---

<sup>8)</sup> Das folgt durch die übliche Abzählung der an fester Stelle noch frei wählbaren Ableitungen; von der fünften an sind das in jeder Differentiationsordnung fünf Ableitungen von  $\beta = \gamma$ , während die von  $l, m, n$  durch (66) festgelegt sind.

(66) lehrt, daß die  $R$ -Flächen, für die das gilt, von sechs beliebigen Funktionen einer Veränderlichen abhängen (Cartan).

Ist dagegen  $L \neq 0$ ,  $M = 0$  so wird man auf die Bedingung

$$\gamma_u = 0 \quad (69)$$

geführt und kann dann  $v$  so einrichten, daß  $\gamma = 1$  wird.

Diese  $R_0$ -Flächen hängen ab von fünf beliebigen Funktionen einer Veränderlichen.

Es ergibt sich daher im Gegensatz zur gewöhnlichen Differentialgeometrie, daß die abwickelbaren Flächen nur eine verhältnismäßig kleine Klasse ausmachen.

Da die Lösungen von (67) nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, ist jede projektiv abwickelbare Fläche auf unendlich viele Arten projektiv abwickelbar.

Nach (66) hängen bei vorgegebener Fläche die Lösungen für  $L$ ,  $M$ ,  $N$  von höchstens drei Parametern ab, letzteres nur wenn

$$\sigma - \tau = 0, \quad \left( \frac{\sigma}{\beta} \right)_1 = 0, \quad \left( \frac{\tau}{\gamma} \right)_2 = 0. \quad (70)$$

(70) kennzeichnet die isothermasymptotischen Flächen, bei denen die Gaußsche Krümmung  $k$  der Form  $\beta \gamma du dv$  konstant ist.

## § 14. Das Demoulinische Viereck. Geometrische Deutung der Invarianten

Wie man leicht nachprüft, haben die Lie- $F_2$  einer Fläche im allgemeinen noch vier weitere Hüllflächen, die diese in den Punkten

$$p = \eta + h \mathfrak{x}_1 + k \mathfrak{x}_2 + h k \mathfrak{x} \quad (71)$$

berühren, für die

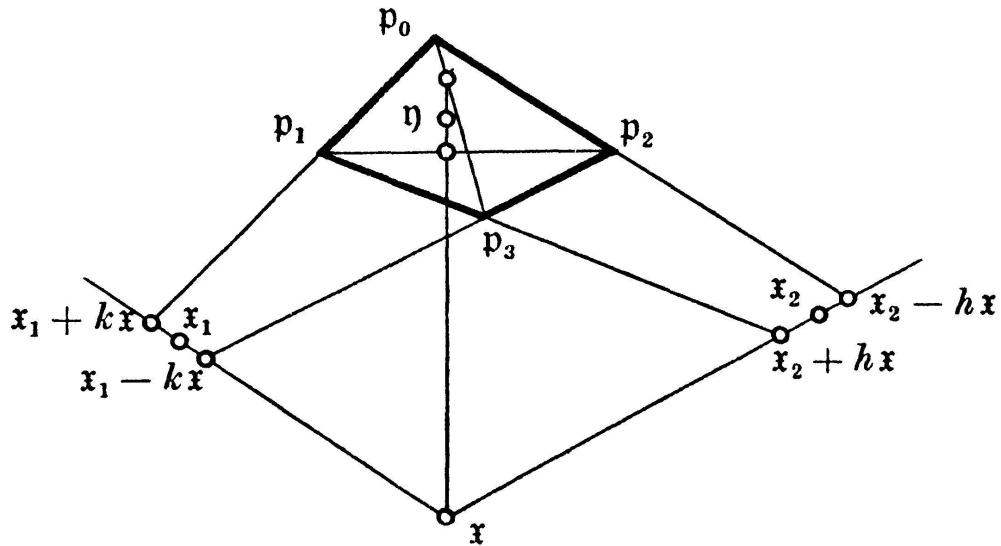
$$h^2 = m, \quad k^2 = l \quad (72)$$

gilt.

Offenbar bilden sie ein Viereck, das ganz auf der Lie- $F_2$  liegt, das „Viereck von Demoulin“.

Gehört  $P_0$  zu den Werten  $h$  und  $k$ , so entstehen die beiden „benachbarten“ Ecken  $P_1$  und  $P_2$  des Vierecks durch Vorzeichenwechsel von  $h$  oder  $k$ , die „gegenüberliegende“ Ecke  $P_3$  durch Vorzeichenwechsel von  $h$  und  $k$ .

Die beiden übrigen Kanten  $P_0 P_3$  und  $P_1 P_2$  des „Tetraeders von Demoulin“ schneiden die Normale in den Punkten  $\eta \pm h k \mathfrak{x}$ . Darin ist die geometrische Definition der Normale, sowie das Verschwinden der Invarianten  $l$  und  $m$  enthalten.



Die Normale ist die Transversale der Diagonalen des Demoulinschen Vierecks durch den Flächenpunkt.

Ebenso ist die zweite Normale die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Diagonalen mit der Tangentenebene.

Jede der Kanten des Demoulinschen Vierecks erzeugt eine der „Demoulinschen Kongruenzen“.

Außer diesen werden wir auch die Kongruenzen zu betrachten haben, die von der Verbindungsgeraden des Flächenpunktes mit einem der Berührungs punkte der Hüllflächen bestimmt werden, die „Hüllpunktskongruenzen“.

Zwischen diesen verschiedenen Gebilden bestehen nun eine Reihe von geometrischen Beziehungen, von denen die wichtigsten hier zusammengestellt werden sollen, die aber wohl erst zum kleinsten Teil aufgedeckt sind.

Da nur die Verwendung des hier verwendeten Wilczynskischen Koordinatensystems die Symmetrien dieser Wechselbeziehungen zutage treten lässt, scheint es wohl berechtigt, es das natürliche zu nennen, im Gegensatz zu dem bis jetzt mehr verwendeten Fubinischen.

In den folgenden Paragraphen sollen die wichtigsten Flächenklassen hauptsächlich auf Grund der bei ihnen vorhandenen Besonderheiten der Demoulinschen Figur definiert werden, eine Zusammenstellung der wichtigsten Sätze und Kriterien geben wir dann in einer Tabelle, aus der sich am leichtesten die Zusammenhänge entnehmen lassen.

Flächenklasse	Kennzeichnende Bedingungen	A	Normalenkongruenz	Ihre Krümmungslinien	Kongruenz von Demoulin	Ihre Krümmungslinien
Isotherm-asymptotische Flächen	$\sigma = T$ $\downarrow$ $\uparrow$ $p = q$	5		<i>konjugiert</i> <sup>1)</sup>		
Projektiv-Minimalflächen	$l_1 = 0^1)$ $m_1 = 0$	6			$W_A$ <sup>2)</sup>	<i>konjugiert</i>
	$q + h_1 = 0^1)$	4			$P_0 P_1$ erzeugt eine Regelfläche	
Flächen mit entartetem Viereck von Demoulin	$m = 0^1)$	5		<i>Eine Schar fällt mit den Asymptotenlinien <math>u = \text{konst.}</math> zusammen.</i>	$W_A$	<i>konjugiert</i>
Q-Flächen	$q + h_1 = 0^1)$ $p + k_1 = 0$ $k^a \gamma h_1 = h^a \beta k_1$	2			$P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ erzeugen Regelscharen derselben Quadrik Q.	
Komplex-Flächen <sup>1)</sup>	$q = 0^1)$	3			$P_0 P_1$ und $P_2 P_3$ sind in Regelflächen entartet. $P_0 P_1$ und $P_2 P_3$ erzeugen W-Strahlsysteme. <sup>3)</sup>	$P_0 P_1$ und $P_2 P_3$ konjugiert.
Komplex-Flächen <sup>1)</sup> mit entartetem Demoulin-Viereck	$q = 0^2)$ $m = 0$	2		<i>Eine Schar fällt mit den Asymptotenlinien <math>u = \text{konst.}</math> zusammen.</i>	<i>Wie oben, die beiden Regelflächen fallen zusammen, deshalb auch die Brennflächen der W-Systeme.</i>	$P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ $du^a = 0$
Projektive Abbwicklungen der Affinsphären	$p = q$ $p_1 = p_2 = 0$	2 <sup>1)</sup>	$W_A$	<i>konjugiert</i>		
Flächen von Tzitzieica-Wilczynski	$p = q = 0$	2	$W_A$ <i>Brennpunkte sind die Schnittpunkte mit den Diagonalen vom Demoulin-Viereck. <sup>1)</sup></i>	<i>konjugiert</i>	<i>Paarweise entartet in die beiden Regelscharen einer Quadrik Q.</i>	
Flächen von Demoulin	$l = m = 0$	4	<i><math>x_1</math> und <math>x_2</math> sind Brennpunkte der ersten, <math>p_1</math> und <math>p_2</math> sind Brennebenen der 2. Normalenkongruenz <sup>1)</sup></i>	<i>Fallen mit den Asymptotenlinien zusammen.</i>	$W_A$ <sup>1)</sup>	<i>konjugiert</i>
Projektivsphären	$p = q = 0$ $l = m = 0$	2	<i>Die erste Art durch festen Punkt, die 2. Art in fester Ebene durch diesen Punkt.</i>	unbestimmt	Ebene Geradenbüschel	

*A* = Anzahl der beliebigen Funktionen einer Veränderlichen, von der die Klasse abhängt.  
*Kursiv*: die Eigenschaft ist kennzeichnend, wenn sie für alle Gebilde der Art erfüllt ist.

Hüllflächen der Lie- $F_1$	Hüllpunkts-Kongruenz	Ihre Krümmungslien	Sonstiges
		Die gleichartigen zu Gegenecken gehörigen fallen zusammen <sup>3)</sup>	1) Die Ebenen durch Mittelpunkt und Diagonalen berühren die Krümmungslien. 2) Kennzeichnend, sofern es wirklich zwei verschiedene Kongruenzen einer Art gibt.
Die Asymptotenlinien entsprechen denen der Fläche <sup>3)</sup>		Zur selben Ecke gehörige Krümmungslienrichtungen gehen durch Drehung um $90^\circ$ in einander über, wenn als Nulllinien die Asymptotenlinien gewählt werden <sup>4)</sup>	1) Aus einer der beiden Gleichungen folgt die andere. 2) Zur Kennzeichnung genügt es, wenn zwei benachbarte Kongruenzen $W$ sind oder eine $W_A$ ist. 3) Ist das für zwei Hüllflächen der Fall, so für alle. Dann ist die Fläche entweder eine Projektivminimalfläche oder eine Fläche von Tzitzéica-Wilczynski. 4) Schon bei einem Paar kennzeichnend.
$P_0$ und $P_2$ beschreiben Teile derselben Regelfläche.			1) Allgemein eine der vier Gleichungen $q \pm h_1 = 0$ $p \pm k_1 = 0$
$P_0$ fällt mit $P_2$ , $P_1$ mit $P_3$ zusammen. Die Asymptotenlinien entsprechen denen der Fläche.		Eine Schar fällt mit den Kurven $u = \text{konst.}$ zusammen	1) oder $l = 0$ .
$P_0$ beschreibt eine Quadrik $Q$ , deren Geraden den Asymptotenlinien entsprechen.			1) oder Vorzeichenwechsel bei $h, k$ .
$P_0$ und $P_2$ erzeugen dieselbe Regelfläche, $P_1$ und $P_3$ ebenfalls.			1) Die Tangenten jeder Asymptotenlinie einer Schar gehören einem linearen Komplex an. 2) wenn die obige Eigenschaft für die Kurven $u = \text{konst.}$ gilt, sonst $p = 0$ . 3) kennzeichnend, wenn nicht $W_A$ .
$P_0$ und $P_2$ , $P_1$ und $P_3$ fallen zusammen		Eine Schar fällt mit den Kurven $u = \text{konst.}$ zusammen	1) oder $p = l = 0$ , wenn die Schar $u = \text{konst.}$ die Eigenschaft hat.
		konjugiert	1) Die projektiv-abwickelbaren <i>eigentlichen</i> Affinsphären hängen wohl nur von Konstanten ab. 2) Auch diese erzeugen $W$ -Kongruenzen mit denselben Brennflächen. 3) Auch die Punkte $y + Hx_1 + Kx_2 + HKx$ $H = xh$ , $K = yk$ , $x, y$ konst. erzeugen zur Fläche konjugierte Kongruenzen. Die Ebenen durch Mittelpunkt und Diagonalen berühren die Krümmungslien der Normalenkongruenz. Die Flächen dieser Klasse sind die $P$ -Abwicklungen der Projektivsphären. Sie sind den Flächen von Bianchi der Nichteuklidischen Geometrie projektiv gleichwertig.
Die vier Hüllflächen sind Teile derselben Quadrik, deren Asymptotenlinien denen der Fläche entsprechen.		Konjugiert	1) Die Asymptotenlinien jeder Brennfläche bilden konjugierte Netze.
$P_0, P_1, P_2, P_3$ fallen zusammen, es gibt nur eine Hüllfläche, ebenfalls eine Fläche von Desmoulin mit derselben Lie- $F_2$ , denselben Normalen, entsprechende Asymptotenlinien und denselben Projektiv-Oberflächen	Fallen mit der Normalenkongruenz zusammen		
Die Lie- $F_2$ berühren eine feste Ebene in einem festen Punkt	Fallen mit der Normalenkongruenz zusammen.	unbestimmt	Jede Projektivsphäre lässt sich auf $\infty^3$ Arten projektiv abwickeln, die Abwicklungen sind Flächen von Tzitzéica-Wilczynski.

$W = W$ -Strahlensysteme.

$W_A = W$ -Strahlensystem; die Asymptotenlinien der Brennflächen entsprechen denen der Fläche selbst.

## § 15. Kennzeichnung der wichtigsten Flächenklassen mit Hilfe von Eigenschaften der Demoulinschen Kongruenzen

Wie man leicht feststellt, gibt es keine Flächen, bei denen eine Kante des Demoulinschen Vierecks auf der ganzen Fläche festbleibt. Dagegen kann es z. B. sein, daß etwa längs jeder Asymptotenlinie  $v = \text{konst.}$  die Kante  $P_0 P_1$  des Vierecks stationär ist, so daß die zugehörige Kongruenz von Demoulin in ein einparametriges Geradensystem ausartet, das offenbar eine Regelfläche bildet. Die von  $P_0$  und  $P_1$  beschriebenen Flächen sind dann Teile dieser Regelflächen. Für diese Flächen gilt die Beziehung  $q + h_1 = 0$ . Ist die Regelfläche eine Torsse, so beschreibt einer der Punkte die Kehlkurve dieser Torsse.

Interessanter ist der Fall, daß zwei der Kanten dieselbe Eigenschaft haben. Liegen diese einander gegenüber, so genügt die Fläche der Bedingung  $q = 0$ , die Flächen dieser Klasse sind dadurch bekannt geworden, daß bei ihnen die Tangenten jeder Asymptotenlinie  $v = \text{konst.}$  einem linearen Komplex angehören. Wegen der hier auftretenden Schar von Komplexen nennen wir sie auch *Komplexflächen*.

Entartet dagegen zwei benachbarte Kongruenzen von Demoulin zu Regelscharen, so liegen diese beide auf der von  $P_0$  beschriebenen Fläche, die daher im allgemeinen eine Quadrik ist. In diesem Fall nennen wir die Fläche eine *Q-Fläche*. Die Annahme, daß  $P$  eine Ebene beschreibt, führt nicht auf einen Sonderfall hiervon. Wir erhalten hier eine Flächenklasse, bei der die Lie- $F_2$  eine feste Ebene berühren, das sind die Projektivtransformierten der *Affinminimalflächen*, für die das Integral  $\iint F \, du \, dv$  extrem wird.

Eine dritte Möglichkeit ist, daß  $P$  festbleibt. Die Affinminimalflächen, die gleichzeitig *Q-Flächen* sind, sind denjenigen projektiv gleichwertig, bei denen die Lie- $F_2$  Drehflächen sind, — eine Flächenklasse, die scheinbar kaum beachtet worden ist.

Natürlich kann man auch die Frage stellen, ob mehrere der Hüllflächen gleichzeitig eine der obigen Eigenschaften haben können. Wie sich herausstellt, gibt es Flächen, bei denen eine Hüllfläche eine Ebene, eine benachbarte ein Punkt ist. Das gibt also Affinminimalflächen, die durch Korrelationen in Affinminimalflächen übergeführt werden können. Alle anderen Kombinationen führen aber stets auf die Bedingungen  $p = q = 0$ .

Die Flächen, die durch diese Bedingungen gekennzeichnet werden — wir nennen sie „*Flächen von Tzitzéica-Wilczynski*“ — sind geometrisch dadurch ausgezeichnet, daß bei ihnen die vier Kongruenzen von De-

moulin paarweise in die beiden Regelscharen einer festen Quadrik  $Q$  ausarten, so daß die vier Hüllflächen Teile dieser Quadrik sind<sup>9)</sup>. Die Demoulinschen Vierecke liegen alle auf dieser Quadrik.

Andererseits sind, wie aus den Bedingungen  $p = q = 0$  hervorgeht, bei den Flächen von Tzitzéica-Wilczynski die Tangenten jeder Asymptotenlinie in einem linearen Komplex enthalten.

Schon lange bekannt sind die Flächen, bei denen die vier Ecken des Demoulinschen Tetraeders zusammenfallen. Wir wollen sie „*Flächen von Demoulin*“ nennen. Sie sind durch die Bedingungen  $l = m = 0$  gekennzeichnet. Bei ihnen hat die Lie- $F_2$  nur eine weitere Hüllfläche, und es ist bemerkenswert, daß, wie schon Demoulin 1908 bemerkt hat, diese wieder eine Fläche derselben Klasse ist, die auch dieselben Lie- $F_2$  hat wie die erste. Beide Flächen haben außerdem dieselben Normalen, entsprechende Asymptotenlinien und, falls die Hüllfläche nicht entartet, auch dieselbe Projektivoberfläche.

In allen erwähnten Klassen, auch in den noch folgenden, sind die Flächen enthalten, für die  $p = q = l = m = 0$ . Sie sind den uneigentlichen Affinsphären projektiv gleichwertig. Der Kürze der Bezeichnung halber — und weil sie in der Theorie eine zentrale Stellung einnehmen, wollen wir sie auch Projektivsphären nennen. Es ist bekanntlich leicht, für sie eine Parameterdarstellung anzugeben.

Die Flächen, für die die erste Variation der Projektivoberfläche verschwindet, wollen wir *Projektivminimalflächen* nennen. Sie werden durch  $l_1 = m_2 = 0$  gekennzeichnet, wobei eine dieser Bedingungen wegen (63) aus der anderen folgt. Es ist bemerkenswert, daß man auch leicht für das Verschwinden der ersten Variation notwendige Randbedingungen angeben kann; es genügt, wenn der Rand festbleibt und die Haupttangenten durch jeden Randpunkt bei der Variation Flächen beschreiben, die von der Flächennormalen berührt werden. Natürlich kann man auch die dualen Bedingungen wählen. Zu den Projektivminimalflächen gehören offenbar alle Flächen, bei denen das Demoulinsche Viereck entartet, insbesondere die Komplexflächen und die Flächen von Demoulin und auch die Affinsphären. Letzteres hat schon H. Behnke 1921 bemerkt. Die Projektivminimalflächen wurden zuerst von G. Thomsen eingehend untersucht.

Schließlich erwähnen wir noch die isotherm-asymptotischen Flächen. Sie hängen mit der Demoulinschen Figur insofern zusammen, daß die

---

<sup>9)</sup> In einem wichtigen Sonderfall sind zwei gegenüberliegende Hüllflächen Punkte, die beiden anderen sind Ebenen durch ihre Verbindungsgeraden. Die Punkte sind Ecken jedes Demoulinschen Vierecks, die Kanten liegen in den beiden Ebenen.

Ebenen durch den Flächenpunkt und die Diagonalen des Vierecks nur bei ihnen die Krümmungslinien berühren. Einfacher kann man sie aber dadurch erklären, daß bei ihnen die Normalenkongruenz zur Fläche konjugiert ist.

## § 16. *W*-Kongruenzen

Bekanntlich ist wohl die wichtigste ausgezeichnete projektive Eigenschaft, die eine Geradenkongruenz besitzen kann, die, daß sich auf ihren Brennflächen die Asymptotenlinien entsprechen. Analytisch drückt sich das dadurch aus, daß bezogen auf die Asymptotenlinien *einer* Brennfläche als Parameterlinien, die Plückerschen Koordinaten der Geraden einer Laplaceschen Differentialgleichung genügen. Für unsere Zwecke ist es besser, alle diejenigen Kongruenzen zu den *W*-Kongruenzen zu zählen, bei denen die Umgebung zweiter Ordnung jedes Strahles einem linearen Komplex angehört. Diese Definition kommt, wenn die Brennflächen verschieden und nicht entartet sind, auf die vorige hinaus, enthält aber auch wichtige Sonderfälle, die sonst besonders hervorgehoben werden müßten, insbesondere die Kongruenzen, die aus den Tangenten einer Schar von Asymptotenlinien einer Fläche bestehen.

Sehen wir uns die bei unseren Flächen vorkommenden Kongruenzen darauf hin an, wann sie *W*-Kongruenzen sind. Bei der Normalenkongruenz ist das dann und nur dann der Fall, wenn die Fläche auf eine Affinsphäre projektiv abwickelbar ist. Bei den Flächen von Tzitzéica-Wilczynski lassen sich auch die Brennpunkte leicht angeben, es sind die Schnittpunkte mit den Diagonalen. Diese selbst beschreiben ebenfalls *W*-Kongruenzen mit denselben Brennflächen. Auch die Hüllpunktkongruenzen sind nur bei den Flächen von Tzitzéica-Wilczynski sämtlich *W*-Kongruenzen.

In allen diesen Fällen entsprechen die Asymptotenlinien der Brennflächen denen der Fläche selbst.

Behalten wir diese Bedingung bei und fragen, ob auch die Demoulinischen Kongruenzen sämtlich *W*-Kongruenzen sein können, so stellt sich heraus, daß das nur bei den Projektivminimalflächen der Fall ist (Thomsen). Dabei sind allerdings die Flächen von Tzitzéica-Wilczynski ausgeschlossen, bei denen diese Kongruenzen in Regelscharen entarten.

Auch bei den Komplexflächen sind die nicht entarteten Demoulinischen Kongruenzen *W*-Systeme, bei ihnen entsprechen aber die Asymptotenlinien der Brennflächen nicht denen der Fläche selbst.

## § 17. Krümmungslinien

Außer den Asymptotenlinien der Brennflächen kann man auch die Krümmungslinien einer Kongruenz betrachten, die bekanntlich stets zu ihnen konjugiert sind. Ist also eines unserer Strahlensysteme eine  $W$ -Kongruenz und entsprechen die Asymptotenlinien denen der Fläche selbst, so bilden also die Krümmungslinien dieser Kongruenzen stets ein konjugiertes Netz.

Bemerkenswert ist, daß das in vielen Fällen auch ausreicht. So werden die Projektivminimalflächen dadurch gekennzeichnet, daß die Krümmungslinien der Demoulinschen Kongruenzen konjugierte Netze bilden (Thomsen). Die Hüllpunkt-kongruenzen bilden allerdings nicht nur bei den Flächen von Tzitzetza-Wilczynski sondern auch bei den Projektiv-Abwicklungen der eigentlichen Affinsphären konjugierte Netze.

Interessant ist die Figur der acht Krümmungsliniennetze der vier Hüllpunkt-kongruenzen und ihrer polarreziproken. Fassen wir hier einmal die Asymptotenlinien als Nulllinien auf, so haben von diesen acht Netzen je vier zu Gegenecken gehörigen dieselben Winkelhalbierenden; die Richtungen dieser beiden Paare von Winkelhalbierenden schließen einen Winkel von  $90^\circ$  ein.

Bei den isotherm-asymptotischen Flächen und nur bei ihnen<sup>10)</sup> fallen von solchen vier Netzen noch je zwei gleichartige zusammen.

Die Projektivminimalflächen sind dadurch gekennzeichnet, daß bei ihnen je zwei zu derselben Ecke gehörigen Netze in jedem Punkt durch Drehung um  $90^\circ$  auseinander hervorgehen.

Es war hier nur möglich, die allerwichtigsten Beziehungen zwischen den einzelnen Teilen der Demoulinschen Figur hervorzuheben, für viele weitere Sätze sowie für einige andere Flächenklassen, die hier nicht erwähnt werden konnten, sei auf eine ausführlichere Darstellung verwiesen.

(Eingegangen den 20. Juli 1945.)

---

<sup>10)</sup> Abgesehen von den Flächen von Demoulin, wo die Hüllpunkt-kongruenzen mit den Normalenkongruenzen zusammenfallen.