Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Über eine Klasse von einparametrigen Differential-Transformationsgruppen.

Autor: Stohler, Gerhard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16897

Über eine Klasse von einparametrigen Differential-Transformationsgruppen

Von Gerhard Stohler, Basel

Einleitung

In seiner Arbeit „Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions"[1]) entwickelt Herr *A. Ostrowski* die Theorie einer neuen Art von Differentialtransformationen. Sind y_1 und y_2 zwei unbestimmte Funktionen von x, p_1 und p_2 ihre ersten, z_1 und z_2 ihre zweiten Ableitungen, so haben diese Differentialtransformationen die Gestalt

$$\xi = \xi(x, y_1, y_2, p_1, p_2),$$

$$\eta_\nu = \eta_\nu(x, y_1, y_2, p_1, p_2), \quad (\nu = 1, 2),$$

$$\frac{d\eta_\nu}{d\xi} \equiv \pi_\nu = \pi_\nu(x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2), \quad (\nu = 1, 2).$$

Hierin fehlen die zweiten Ableitungen z_1 und z_2 *nicht*, wenn man den Fall der bloß erweiterten Punkttransformationen ausschließt. Das obige System kann aber *dennoch* die *Eigenschaft der Umkehrbarkeit* besitzen. Diese Tatsache ist der Ausgangspunkt für die Theorie dieser „transformations réversibles" oder „transformations R".

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun mit *einparametrigen Gruppen* von Transformationen der obigen Gestalt. Die Voraussetzung der identischen Transformation wird uns die Umkehrbarkeit dieser Gruppen sichern, welchen wir deshalb den Namen „*R-Gruppen*" geben dürfen.

Wir entwickeln die Theorie der R-Gruppen von Grund auf aus den Voraussetzungen, indem wir überall versuchen, von der Tatsache vollen Gebrauch zu machen, daß es sich hier um Gruppen und nicht um Einzeltransformationen handelt. Da diese Gruppen aber aus (symmetrischen) R-Transformationen bestehen, ist von vorneherein klar, daß sich die Ergebnisse und Zusammenhänge, soweit sie nicht gruppentheoretischer Natur sind, mit denjenigen von Herrn *Ostrowski* über *symmetrische* R-Transformationen decken müssen.

Dieser Sachverhalt zeigt sich z. B. an folgendem deutlich. Die R-Einzeltransformationen lassen sich aus gewissen Transformationen in nur

---

[1]) *A. Ostrowski* (I), (II). (Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich jeweils auf das Literaturverzeichnis am Ende der vorliegenden Arbeit.)

4 Variabeln herleiten. Für die R-Gruppen ist demnach von vorneherein zu erwarten, daß sie aus einer gewissen *Schar* von Transformationen in nur 4 Variabeln ableitbar sind. Hierzu kommt nun das gruppentheoretische Ergebnis: Diese Schar stellt eine *Liesche Gruppe* in 4 Variabeln dar.

Dieses Ergebnis ist grundlegend. *Denn aus dem Differentialgleichungssystem, dem die Liesche Gruppe genügt, leiten wir ein solches her, dem die R-Gruppe genügen muß, obschon sie keine Liesche Gruppe ist.* Ihre Gleichungszahl stimmt nämlich mit ihrer Variabelnzahl nicht überein.

Wie die Liesche, so ist auch die R-Gruppe durch ihr Differentialgleichungssystem *eindeutig* bestimmt. Die Funktionen dieses Systems sind bei den R-Gruppen indessen nicht beliebig wählbar. Unsere Hauptaufgabe besteht darin, *diejenigen Differentialgleichungssysteme hinreichend zu charakterisieren, welche R-Gruppen definieren.*

Im **I. Teil** der vorliegenden Arbeit beweisen wir zunächst, daß sich jede R-Gruppe mit Hilfe einer *parameterfreien* Funktion $r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ aus einer *Lieschen Gruppe* („*L-Gruppe*") *in den* 4 *Variabeln* x, y_1, y_2, r herleiten läßt (Sätze I und II). Im Satz III geben wir Differentialgleichungen für die R-Gruppe an, deren Integration im Satz VII zusammengefaßt wird, und stellen eine Differentialgleichung für die Funktion r auf.

Aus den Sätzen I—III leiten wir sodann die Aussagen von Herrn *Ostrowski* über die Funktion r erneut her: sie ist linear in p_1 und p_2 und läßt sich eindeutig durch eine Pfaffsche Gleichung in x, y_1, y_2, r von der Form $Ady_1 - Bdy_2 - Cdx = 0$ definieren. Dabei sind *drei Fälle* zu unterscheiden (Satz IV). In jedem Fall ist die Pfaffsche Definitionsgleichung für r bei der zur R-Gruppe gehörigen L-Gruppe invariant (Satz V).

Im Satz VI charakterisieren wir endlich diejenigen L-Gruppen *hinreichend*, aus denen überhaupt R-Gruppen hergeleitet werden können: *Die L-Gruppe muß eine der zulässigen Definitionsgleichungen für r invariant lassen.* Damit ist die Bestimmung aller R-Gruppen auf diejenige der L-Gruppen zurückgeführt.

Diese Aufgabe lösen wir im **II. Teil** in Anlehnung an eine Arbeit von Engel[15]), wobei die sogenannte *charakteristische Funktion* eingeführt wird. *Sie muß in jedem der drei Fälle einer gewissen partiellen Differentialgleichung genügen.* Mit ihrer Hilfe können nun die Differentialgleichungssysteme aller L-Gruppen aufgestellt werden (Sätze VIII (I, II, III)).

Damit sind auch alle R-Gruppen gefunden. Die Gesamtheit aller R-Einzeltransformationen und R-Gruppen bildet ein „*unendliches kontinuierliches Gruppoid*".

Die L-Gruppen lassen sich auffassen als *besondere Berührungstransformationsgruppen des Raumes* („*B-Gruppen*"), nämlich als solche, welche dasjenige „Flächenelementfeld" invariant lassen, das durch die Pfaffsche Gleichung $A dy_1 - B dy_2 - C dx = 0$ definiert wird (Sätze IX (I, II, III)). Dieser Zusammenhang wird im **III. Teil** der Arbeit betrachtet, dessen Hauptergebnis die Sätze X (I, II, III) darstellen: *Jede R-Gruppe kann aus beliebig vielen B-Gruppen hergeleitet werden, deren charakteristische Funktionen sich explizite angeben lassen.*

Im Verlauf der Arbeit wird die Theorie fortgesetzt mit den drei Beispielen des 1. Teiles illustriert.

Herrn Professor *Ostrowski*, der mir selber die Anregung zu dieser Arbeit gegeben hat, bin ich zu großem Dank verpflichtet.

I. TEIL

R-Gruppen und Liesche Gruppen

§ 1. Die Voraussetzungen

Wir betrachten y_1 und y_2 als unbestimmte Funktionen von x und bezeichnen ihre ersten Ableitungen mit p_1 und p_2, ihre zweiten Ableitungen mit z_1 und z_2. Für die transformierten Größen wählen wir die entsprechenden griechischen Buchstaben η_1, η_2; ξ; π_1, π_2; ζ_1, ζ_2.

Unsere einparametrige Transformationenschar hat die folgende Gestalt:

$$\begin{cases} \xi = g(x, y_1, y_2, p_1, p_2, a), \\ \eta_1 = h_1(x, y_1, y_2, p_1, p_2, a), \\ \eta_2 = h_2(x, y_1, y_2, p_1, p_2, a). \end{cases} \tag{1.1}$$

Dazu kommen die Gleichungen für die ersten Ableitungen:

$$\pi_\nu \equiv \frac{d\eta_\nu}{d\xi} = \frac{h'_{\nu x} + p_1 h'_{\nu y_1} + p_2 h'_{\nu y_2} + z_1 h'_{\nu p_1} + z_2 h'_{\nu p_2}}{g'_x + p_1 g'_{y_1} + p_2 g'_{y_2} + z_1 g'_{p_1} + z_2 g'_{p_2}}, \quad (\nu = 1,2).$$

Wir setzen dafür

$$\begin{cases} \pi_1 = j_1(x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2, a), \\ \pi_2 = j_2(x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2, a). \end{cases} \tag{1.2}$$

Über das System (1.1) machen wir drei Voraussetzungen:

(A) Es gibt einen Parameterwert $a = a_0$, für den $g \equiv x$, $h_1 \equiv y_1$, $h_2 \equiv y_2$ wird, d. h. das System (1.1) enthält die *identische Transformation.* Damit wird für $a = a_0$ auch $j_1 \equiv p_1$ und $j_2 \equiv p_2$.

(B) Die Funktionen j_1 und j_2 in (1.2) sollen nicht beide gleichzeitig von z_1 und z_2 frei sein.

(C) Die einparametrige Schar (1.1) soll eine Gruppe in bezug auf den Parameter bilden. Wir bezeichnen sie als „R-Gruppe“ [2]).

Wir besprechen nun die Voraussetzung (B). Angenommen, sie sei nicht erfüllt. Dies kann auf zwei Arten geschehen. Erstens können z_1 und z_2 darum in j_1, j_2 fehlen, weil die Funktionen g, h_1, h_2 die Variabeln p_1 und p_2 überhaupt nicht enthalten, die Koeffizienten von z_1 und z_2 also identisch verschwinden. Deuten wir x, y_1, y_2 als Cartesische Raumkoordinaten, so hängen in diesem Falle die transformierten Punktkoordinaten ξ, η_1, η_2 nur von x, y_1, y_2, a ab, und (1.1), (1.2) stellt bloß eine Liesche Gruppe von „*erweiterten Punkttransformationen*“ dar [3]).

Zweitens aber können z_1 und z_2 aus j_1, j_2 herausfallen, *ohne* daß g, h_1, h_2 frei von p_1 und p_2 sind. Dann lauten die Formeln für π_1, π_2

$$\pi_\nu = \frac{h'_{\nu p_1}}{g'_{p_1}} = \frac{h'_{\nu p_2}}{g'_{p_2}}\ , \quad (\nu = 1,2)\ ,$$

worin für $a \neq a_0$ nicht beide Quotienten unbestimmt sind. Diese Formeln besagen, daß die drei Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(g\ ,\ h_1)}{\partial(p_1\ ,\ p_2)}\ ,\quad \frac{\partial(g\ ,\ h_2)}{\partial(p_1\ ,\ p_2)}\ ,\quad \frac{\partial(h_1\ ,\ h_2)}{\partial(p_1\ ,\ p_2)}$$

identisch verschwinden. Die Funktionen g, h_1, h_2 lassen sich daher durch x, y_1, y_2, a und eine einzige Funktion $p(p_1, p_2, x, y_1, y_2, a)$ ausdrücken. Wir deuten dies durch einen Stern an. Das gleiche gilt wegen

$$\pi_\nu = \frac{h^{*\prime}_{\nu p}}{g^{*\prime}_{p}}\ , \quad (\nu = 1,2)\ ,$$

auch für j_1, j_2. Für jeden Parameterwert a lassen sich demnach die 5 Größen $\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2$ durch die 4 Größen x, y_1, y_2, p darstellen. Da nach der Voraussetzung (A) unsere Gruppe für $a = a_0$ die identische Transformation enthält, gilt dasselbe auch für die 5 Größen $x, y_1, y_2,$

---

[2]) Was die Natur der Funktionen g, h_1, h_2 anbetrifft, so benützen wir im folgenden die einmalige stetige Differentiierbarkeit nach $x, y_1, y_2, p_1, p_2; a$, und die zweimalige für *gemischte* Ableitungen nach *einer Variabeln* und dem *Parameter* a; wir setzen also um a_0 gewisse Wertebereiche von $x, y_1, y_2, p_1, p_2; a$ voraus, in denen unsere Funktionen diese Eigenschaften aufweisen.

[3]) Zur Einführung dieses Begriffes vergleiche etwa *Lie-Engel* (II), pp. 2—3.

p_1, p_2, welche im Widerspruch dazu als Ausgangsvariabeln beliebig wählbar sind.

Die Variabeln z_1 und z_2 können daher nur bei erweiterten Punkttransformationen fehlen, und *der Verzicht auf die Voraussetzung* (B) *würde das Zulassen Liescher Gruppen von erweiterten Punkttransformationen bedeuten. Indem wir* (B) *einführen, schließen wir diesen bekannten Fall aus.*

In der zitierten Arbeit von Herrn *Ostrowski* schließt die Voraussetzung (B) ebenfalls erweiterte Punkttransformationen aus[4]). Wir haben dennoch darauf eingehen müssen, weil wir die Voraussetzung der *Umkehrbarkeit* von (1.1), auf die sich dort der Schluß stützt, nicht aufgenommen haben. An ihre Stelle tritt hier die Tatsache, daß es sich um eine *Schar* von Transformationen handelt, welche nach der Voraussetzung (A) die *identische Transformation* enthält.

Wir kommen nun zur geforderten Gruppeneigenschaft. Ist

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= g(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2, b), \\ \mathfrak{Y}_\nu &= h_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2, b), \quad (\nu = 1,2), \end{aligned}\right.$$

eine weitere Transformation der Schar (1.1), so soll vermöge (1.1), (1.2) gelten:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= g(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2, b) = g(x, y_1, y_2, p_1, p_2, c), \\ \mathfrak{Y}_\nu &= h_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2, b) = h_\nu(x, y_1, y_2, p_1, p_2, c), \ (\nu = 1,2). \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

Hierin soll der „Produktparameter" c nur von a, b abhängen,

$$c = \varphi(a, b). \quad (1.4)$$

Aus den Gleichungen (1.3) folgen die weiteren

$$\mathfrak{P}_\nu = j_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2, \zeta_1, \zeta_2, b) = j_\nu(x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2, c), \quad (1.5)$$
$$(\nu = 1, 2).$$

Die Ableitungsgleichungen weisen also ebenfalls die Invarianzeigenschaft auf.

§ 2. Die Funktion r und die L-Gruppe

Wir untersuchen jetzt die Gestalt der Gruppengleichungen näher. (1.3) lehrt, daß die Funktionen g, h_1, h_2 linker Hand die Eigenschaft haben, von z_1 und z_2 unabhängig zu sein, wenn man darin die griechi-

[4]) *A. Ostrowski* (I), pp. 164—165.

schen Variabeln vermöge (1.1), (1.2) durch die lateinischen ausdrückt. Als Folge von (1.3) haben wir demnach das System (2.1), worin $\bar{g}, \bar{h}_1, \bar{h}_2$ die Funktionen g, h_1, h_2 in den *griechischen* Variabeln bedeuten,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{g}}{\partial \pi_1}\frac{\partial j_1}{\partial z_1}+\frac{\partial \bar{g}}{\partial \pi_2}\frac{\partial j_2}{\partial z_1}=0\,, \quad \frac{\partial \bar{g}}{\partial \pi_1}\frac{\partial j_1}{\partial z_2}+\frac{\partial \bar{g}}{\partial \pi_2}\frac{\partial j_2}{\partial z_2}=0\,, \\ &\frac{\partial \bar{h}_\nu}{\partial \pi_1}\frac{\partial j_1}{\partial z}+\frac{\partial \bar{h}_\nu}{\partial \pi_2}\frac{\partial j_2}{\partial z_1}=0\,, \quad \frac{\partial \bar{h}_\nu}{\partial \pi_1}\frac{\partial j_1}{\partial z_2}+\frac{\partial \bar{h}_\nu}{\partial \pi_2}\frac{\partial j_2}{\partial z_2}=0\,,\ (\nu=1\,,2)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

(2.1) besteht vermöge (1.1), (1.2) und kann aufgefaßt werden als linear homogenes System in den Ableitungen $\frac{\partial j_1}{\partial z_1}, \frac{\partial j_2}{\partial z_1}$ oder $\frac{\partial j_1}{\partial z_2}, \frac{\partial j_2}{\partial z_2}$. Nach der Voraussetzung (B) verschwinden nicht alle vier Ableitungen $\frac{\partial j_\mu}{\partial z_\nu}$ identisch. Daher verschwinden die beiden Funktionaldeterminanten von $\bar{g}$ und $\bar{h}_1$ bzw. $\bar{h}_2$ in bezug auf π_1, π_2,

$$\frac{\partial(\bar{g}\,,\bar{h}_\nu)}{\partial(\pi_1\,,\pi_2)} \equiv \Delta_\nu(\xi\,,\ \eta_1\,,\ \eta_2\,,\ \pi_1\,,\ \pi_2\,,\ b) = 0\ ,\quad (\nu = 1\,,2)\ . \qquad (2.2)$$

Sie verschwinden sogar identisch. Verschwänden nämlich Δ_1, Δ_2 nur vermöge (1.1), (1.2), so würde dies beim Parameterwert $a = a_0$ die unzulässigen Relationen

$$\Delta_\nu(x, y_1, y_2, p_1, p_2, b) = 0, \quad (\nu = 1, 2)\,,$$

nach sich ziehen.

Aus dem identischen Verschwinden der Funktionaldeterminanten (2.2) folgt, daß die Funktionen $\bar{g}, \bar{h}_1, \bar{h}_2$ sich durch ξ, η_1, η_2, b und eine Funktion

$$\varrho(b) \equiv r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2, b)$$

ausdrücken lassen, wo $\varrho(b)$ wegen (2.1) der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \pi_1}\frac{\partial j_1}{\partial z_1}+\frac{\partial \varrho}{\partial \pi_2}\frac{\partial j_2}{\partial z_1}=0 \qquad (2.3)$$

vermöge (1.1), (1.2) genügt. In den lateinischen Variabeln lautet die entsprechende Funktion

$$r(a) \equiv r(p_1, p_2, x, y_1, y_2, a)\,.$$

Bei den Einzeltransformationen der Arbeit von Herrn *Ostrowski* enthalten r und ϱ naturgemäß keinen Parameter[5]). Wir behaupten nun, daß r auch hier parameterfrei gewählt werden kann, obgleich unsere Transformationen von einem Parameter abhängen.

Satz I. *Die Funktionen* g, h_1, h_2 *der R-Gruppe* (1.1) *lassen sich durch* x, y_1, y_2, a *und eine parameterfreie Funktion* $r \equiv r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ *ausdrücken,*

$$\left.\begin{aligned} \xi &= g^*(x,\ y_1,\ y_2,\ r,\ a)\ , \\ \eta_\nu &= h_\nu^*(x,\ y_1,\ y_2,\ r,\ a)\ , \quad (\nu = 1{,}2)\ . \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Zum Beweise kehren wir wieder zu den griechischen Variabeln zurück. Es steht uns frei, in $\bar{g}, \bar{h}_1, \bar{h}_2$ an Stelle von $\varrho(b)$ irgend eine *Funktion von* ϱ einzuführen,

$$\varrho^* = f(\varrho, b;\ \ \xi, \eta_1, \eta_2)\ .$$

Wenn wir ϱ^* so wählen können, daß es frei von b wird, ist unsere Behauptung bewiesen. Die Bedingung dafür ist

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial b}\right) \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial b} = 0\ . \tag{2.5}$$

Wir dürfen $\dfrac{\partial \varrho}{\partial b} \neq 0$ annehmen, da sonst nichts zu beweisen wäre. $\dfrac{\partial \varrho}{\partial b}$ genügt mit ϱ der Differentialgleichung (2.3), kann also die Variabeln π_1, π_2 nur vermöge ϱ selbst enthalten, wenn es überhaupt von ihnen abhängt. Die Differentialgleichung (2.5) läßt sich daher immer durch eine Funktion $f(\varrho, b;\ \xi, \eta_1, \eta_2)$ integrieren, welche ϱ wirklich enthält, von b aber nicht abhängt, wenn man darin die Variable ϱ durch die Funktion $\varrho(b)$ ersetzt. Damit ist der Satz I bewiesen.

Wir kehren zum Gleichungssystem (2.1) zurück. Es läßt sich auch auffassen als linear homogen in $\dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \pi_1}, \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \pi_2}$ oder $\dfrac{\partial \bar{h}_\nu}{\partial \pi_1}, \dfrac{\partial \bar{h}_\nu}{\partial \pi_2}$; $(\nu = 1, 2)$. Daher muß

$$\frac{\partial(j_1, j_2)}{\partial(z_1, z_2)} = 0$$

sein. Diese Aussage enthält aber nichts Neues, denn j_1, j_2 enthalten z_1, z_2 nur vermöge

[5]) *A. Ostrowski* (I), pp. 167—170. (Bei den R-Einzeltransformationen sind r und ϱ im allgemeinen *verschiedene* Funktionen ihrer Variabeln.)

$$\frac{dr}{dx} \equiv z_1 \frac{\partial r}{\partial p_1} + z_2 \frac{\partial r}{\partial p_2},$$

und sind damit in z_1, z_2 abhängig. Wir haben nun die Gleichungen (1.2) in der Form

$$\pi_\nu = j_\nu^*\left(x, y_1, y_2, p_1, p_2, \frac{dr}{dx}, a\right), \quad (\nu = 1,2). \tag{2.6}$$

Mit Hilfe unserer Funktion $r \equiv r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ des Satzes I und der entsprechenden Funktion $\varrho \equiv r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ schreibt sich das System (1.3) in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= g^*(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho, b) = g^*(x, y_1, y_2, r, c), \\ \mathfrak{Y}_\nu &= h_\nu^*(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho, b) = h_\nu^*(x, y_1, y_2, r, c), \quad (\nu = 1,2). \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Betrachten wir z. B. die erste Gleichung aus (2.7) näher: Drücken wir darin linker Hand die griechischen Variabeln ξ, η_1, η_2, $\varrho \equiv r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ mit Hilfe der Formeln (2.4) und (2.6) durch lateinische Variabeln und a aus, und setzen wir rechter Hand für c die Funktion $\varphi(a, b)$ aus (1.4) ein, so erhalten wir eine Identität in $x, y_1, y_2, r, a; b$. Da nun ξ, η_1, η_2 linker Hand nur von x, y_1, y_2, r, a abhängen, folgt, daß auch ϱ, in den lateinischen Variabeln ausgedrückt, p_1 und p_2 nur vermöge r enthält, und von z_1, z_2 überhaupt frei ist:

$$\varrho = k^*(x, y_1, y_2, r, a). \text{ [6]} \tag{2.8}$$

Entsprechend wird dann

$$\mathfrak{R} \equiv r(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2) = k^*(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho, b) = k^*(x, y_1, y_2, r, c).$$

Die Gleichung (2.8) besitzt demnach die *Invarianzeigenschaft* gegenüber unserer Gruppe. Damit haben wir den wichtigen Satz II gewonnen.

Satz II. *Die Gleichungen* (2.4) *und* (2.8)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= g^*(x, y_1, y_2, r, a), \\ \eta_\nu &= h_\nu^*(x, y_1, y_2, r, a), \quad (\nu = 1,2), \\ \varrho &= k^*(x, y_1, y_2, r, a), \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

[6]) Die Gleichung (2.8) gilt — natürlich parameterfrei — auch für die allgemeineren R-Einzeltransformationen; *A. Ostrowski* (I), p. 170.

bilden eine eingliedrige Liesche Gruppe in den vier Variabeln x, y_1, y_2, r. Diese enthält die identische Transformation für $a = a_0$. Aus ihr leitet sich die R-Gruppe durch Einführen der Funktion $r = r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ des Satzes I her, wobei die vierte Gleichung den Wert $\varrho = r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ ergibt. Diese zur R-Gruppe gehörige Liesche Gruppe nennen wir im folgenden kurz die L-Gruppe.

Die L-Gruppe ist sicher nach x, y_1, y_2, r auflösbar, d. h.

$$\frac{\partial(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)}{\partial(x, y_1, y_2, r)} \neq 0 , \tag{2.10}$$

denn für $a = a_0$ nimmt diese Funktionaldeterminante den Wert 1 an. Das nach x, y_1, y_2, r aufgelöste System stellt eine Liesche Gruppe in den Variabeln $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$ dar. Führen wir hier $\varrho = r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ ein, so erhalten wir die *Auflösung der R-Gruppe* (1.1) nach x, y_1, y_2. *Sie ist also umkehrbar, d. h. ihre Transformationen sind „transformations réversibles“ im Sinne der Arbeit von Herrn Ostrowski.* Dort wird die Abkürzung „transformations R“ dafür verwendet, womit wir unsere Namenwahl „R-Gruppe“ begründen.

Da r und ϱ die *gleichen* Funktionen ihrer Variabeln sind, handelt es sich hier immer um einparametrige Gruppen von *symmetrischen* R-Transformationen[7]).

§ 3. Drei Beispiele von R-Gruppen

Wir geben zunächst drei Beispiele von R-Gruppen. Darin tritt die identische Transformation für $a = a_0 = 1$ auf, und der Produktparameter wird immer $c = ab$ lauten. Das erste Beispiel rechnen wir durch. Bei den übrigen fassen wir uns kurz.

Beispiel 1. In den Gleichungen

$$\xi = x + \frac{p_1}{p_2} \lg a , \quad \eta_1 = a y_1 , \quad \eta_2 = a y_2 , \quad (a \neq 0) ,$$

können wir $r \equiv \frac{p_1}{p_2}$ setzen. Die Ableitungen lauten damit

$$\pi_1 = \frac{a p_1}{1 + \frac{dr}{dx} \lg a} , \quad \pi_2 = \frac{a p_2}{1 + \frac{dr}{dx} \lg a} .$$

[7]) *A. Ostrowski* (I), p. 178. Alle symmetrischen R-Einzeltransformationen mit derselben Funktion r bilden ebenfalls eine Gruppe, welche nach Lie zur Unterscheidung von unserer „kontinuierlichen“ R-Gruppe als „diskontinuierliche“ R-Gruppe zu bezeichnen wäre.

Die Invarianzeigenschaft ist für die zweite und dritte Gleichung klar,

$$\mathfrak{Y}_\nu = b\,\eta_\nu = a\,b\,y_\nu\,, \qquad (\nu = 1, 2)\,.$$

Die Funktion $\varrho \equiv \dfrac{\pi_1}{\pi_2}$ wird in lateinischen Variabeln gleich $\dfrac{p_1}{p_2} \equiv r$ und wir haben

$$\mathfrak{X} = \xi + \frac{\pi_1}{\pi_2}\lg b = x + \frac{p_1}{p_2}(\lg a + \lg b) = x + \frac{p_1}{p_2}\lg a\,b\;.$$

Damit ist die R-Gruppeneigenschaft erwiesen. Die zugehörige L-Gruppe lautet

$$\xi = x + r\lg a\,, \quad \eta_1 = a\,y_1\,, \quad \eta_2 = a\,y_2\,, \quad \varrho = r\,.$$

Wir verifizieren noch, daß die Ableitungsgleichungen ebenfalls die Invarianzeigenschaft aufweisen. Mit Hilfe von

$$\frac{d\varrho}{d\xi} = \frac{\dfrac{dr}{dx}}{1 + \dfrac{dr}{dx}\lg a}$$

wird nämlich $\mathfrak{P}_\nu$

$$\mathfrak{P}_\nu = \frac{b\pi_\nu}{1 + \dfrac{d\varrho}{d\xi}\lg b} = \frac{a\,b\,p_\nu}{\left(1 + \dfrac{dr}{dx}\lg a\right)\left(1 + \dfrac{\dfrac{dr}{dx}\lg b}{1 + \dfrac{dr}{dx}\lg a}\right)}\,,$$

$$\mathfrak{P}_\nu = \frac{a\,b\,p_\nu}{1 + \dfrac{dr}{dx}\lg ab}\,, \quad (\nu = 1{,}2)\;.$$

Diese Gleichungen haben in der Tat die Ausgangsform.

Beispiel 2.

$$\xi = \frac{1}{a}x\,,\ \eta_1 = \frac{1}{a}y_1 + \frac{1-a}{a}y_2 + (p_1 + p_2)\lg a\,,\ \eta_2 = y_2 - (p_1 + p_2)\lg a\,, \quad (a \neq 0)\;.$$

Hier setzen wir $r \equiv p_1 + p_2$ und haben weiter

$$\pi_1 = p_1 + (1-a)\,p_2 + \frac{dr}{dx}a\lg a\,,\ \pi_2 = a\,p_2 - \frac{dr}{dx}a\lg a\;.$$

Für die Funktion ϱ gilt

$$\varrho \equiv \pi_1 + \pi_2 = p_1 + p_2 \equiv r \, .$$

Die zugehörige L-Gruppe lautet daher

$$\xi = \frac{1}{a} x \, , \; \eta_1 = \frac{1}{a} y_1 + \frac{1-a}{a} y_2 + r \lg a \, , \; \eta_2 = y_2 - r \lg a \, , \; \varrho = r \, .$$

Beispiel 3.

$$\xi = x + (a-1) p_2 \, , \; \eta_1 = a y_1 + a(a-1) \frac{p_2^2}{2} \, , \; \eta_2 = a y_2 + a(a-1) \frac{p_2^2}{2} \, , \; (a \neq 0) \, .$$

Wir setzen $r \equiv p_2$ und haben weiter — ohne Benützung von r —

$$\pi_1 = \frac{a p_1 + a(a-1) p_2 z_2}{1 + (a-1) z_2} \, , \; \pi_2 = a p_2 \, .$$

Die zugehörige L-Gruppe lautet

$$\xi = x + (a-1) r \, , \; \eta_1 = a y_1 + a(a-1) \frac{r^2}{2} \, , \; \eta_2 = a y_2 + a(a-1) \frac{r^2}{2} \, , \; \varrho = a r \, .$$

§ 4. Das Differentialgleichungssystem der R-Gruppe

Mit dem Satze II (§ 2) haben wir den Anschluß an die Liesche Gruppentheorie gewonnen. Wir machen davon Gebrauch und leiten jetzt ein System von Differentialgleichungen her, dem die R-Gruppe genügen muß.

Nach Lie genügt nämlich die L-Gruppe unter der erfüllten Voraussetzung (2.10) einem System von vier Differentialgleichungen der Form[8])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial a} &= \psi(a) \; X(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) \, , & \frac{\partial \eta_1}{\partial a} &= \psi(a) \; Y_1(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) \, , \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial a} &= \psi(a) \; Y_2(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) \, , & \frac{\partial \varrho}{\partial a} &= \psi(a) \; R(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) \, . \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Man erhält (4.1), indem man die Gleichungen (2.9) der L-Gruppe nach a differentiiert, und hinterher darin x, y_1, y_2, r durch $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$ ausdrückt, was wegen (2.10) möglich ist. Dabei bekommt man in allen Gleichungen denselben Faktor $\psi(a)$.

Wir erweitern nun das System (4.1), indem wir ähnliche Differentialgleichungen für π_1, π_2 aufstellen.

---

[8]) *Lie-Engel* (I), pp. 27—33 und p. 45.

Es wird

$$\frac{\partial \pi_\nu}{\partial a} \equiv \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{d\eta_\nu}{d\xi}\right) = \frac{d\left(\frac{\partial \eta_\nu}{\partial a}\right)}{d\xi} - \frac{d\eta_\nu}{d\xi}\,\frac{d\left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)}{d\xi} \;,$$ [9])

und dies vermöge (4.1) gleich ψP_ν mit

$$P_\nu \equiv \frac{dY_\nu}{d\xi} - \pi_\nu \frac{dX}{d\xi} \;, \quad (\nu = 1{,}2) \;. \tag{4.2}$$

Wir erhalten damit die weiteren Differentialgleichungen (4.3),

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial a} &= \psi(a)\, P_1\left(\xi\,,\ \eta_1\,,\ \eta_2\,,\ \pi_1\,,\ \pi_2\,,\ \frac{d\varrho}{d\xi}\right), \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial a} &= \psi(a)\, P_2\left(\xi\,,\ \eta_1\,,\ \eta_2\,,\ \pi_1\,,\ \pi_2\,,\ \frac{d\varrho}{d\xi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Dem System (4.1), (4.3) genügt die *erweiterte L-Gruppe.*

Indem wir nun in (4.1), (4.3) *die Funktion* $\varrho = r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ *einführen, was wir durch das Überstreichen der Funktionsbuchstaben andeuten, erhalten wir ein System von fünf Differentialgleichungen, welchem die R-Gruppe genügt.*

Die Gleichung für ϱ aus (4.1) wird dann vermöge der übrigen Gleichungen (4.1) und (4.3) identisch erfüllt, weil dasselbe für die Ausgangsgleichung (2.8) vermöge der R-Gruppe gilt;

$$\frac{d\bar{\varrho}}{da} \equiv \psi(a)\, \overline{R}(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) \;,$$

oder ausgeschrieben,

$$\overline{X}\,\frac{\partial\bar{\varrho}}{\partial\xi} + \overline{Y}_1\frac{\partial\bar{\varrho}}{\partial\eta_1} + \overline{Y}_2\frac{\partial\bar{\varrho}}{\partial\eta_2} + \overline{P}_1\frac{\partial\bar{\varrho}}{\partial\pi_1} + \overline{P}_2\frac{\partial\bar{\varrho}}{\partial\pi_2} \equiv \overline{R} \;. \tag{4.4}$$

Betrachten wir hingegen ϱ als unbestimmte Funktion, so stellt (4.4) eine Differentialgleichung für ϱ dar,

$$X\frac{\partial\varrho}{\partial\xi} + Y_1\frac{\partial\varrho}{\partial\eta_1} + Y_2\frac{\partial\varrho}{\partial\eta_2} + P_1\frac{\partial\varrho}{\partial\pi_1} + P_2\frac{\partial\varrho}{\partial\pi_2} = R \;. \tag{4.5}$$

---

[9]) Wir machen hier Gebrauch von der Formel $\frac{\partial}{\partial a}(d\varphi) = d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)$, worin $\varphi(x, y_1, y_2, r, a)$ die Größe a nur als Parameter enthält, und d sich nicht auf den Parameter bezieht.

Satz III. *Die Variabeln $\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2$ der R-Gruppe genügen in bezug auf a einem System von fünf Differentialgleichungen der Form*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial a} &= \psi(a)\ \overline{X}(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2)\ ,\\ \frac{\partial \eta_\nu}{\partial a} &= \psi(a)\ \overline{Y}_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2)\ ,\ (\nu = 1{,}2)\ ,\\ \frac{\partial \pi_\nu}{\partial a} &= \psi(a)\ \overline{P}_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2, \zeta_1, \zeta_2),\ (\nu=1{,}2).\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

(4.6) *leitet sich vermöge der Funktion* $\varrho = r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ *aus dem Differentialgleichungssystem* (4.1), (4.3) *der zugehörigen L-Gruppe her. Dabei genügt die Funktion* ϱ *der partiellen Differentialgleichung*

$$X\frac{\partial \varrho}{\partial \xi} + Y_1\frac{\partial \varrho}{\partial \eta_1} + Y_2\frac{\partial \varrho}{\partial \eta_2} + P_1\frac{\partial \varrho}{\partial \pi_1} + P_2\frac{\partial \varrho}{\partial \pi_2} = R\ . \tag{4.5}$$

Außer dem Anschluß an die Liesche Gruppentheorie haben wir mit dem Satz II auch den Anschluß an die zitierte Arbeit von Herrn *Ostrowski* erreicht. Es ist daher zu erwarten, daß sein „*Théorème I*"[10]) in sinngemäßer Übertragung auch für die *R*-Gruppen gilt. Das ist in der Tat der Fall. Die entsprechenden Aussagen stehen in unseren Sätzen IV, V, VI. Diese Sätze leiten wir indessen nicht auf dem Wege über die obige Arbeit her, sondern direkt aus unseren bisherigen Ergebnissen.

§ 5. Die Definitionsgleichungen für *r*

Um zu Aussagen über die Funktion ϱ zu kommen, knüpfen wir an die Differentialgleichung (4.5) an. In P_1 und P_2 steckt je ein Glied mit $\frac{d\varrho}{d\xi}$ als Faktor. Da $\frac{d\varrho}{d\xi}$ allein ζ_1, ζ_2 enthält, muß sein Koeffizient Null sein. Diese Bedingung liefert eine einfachere Differentialgleichung für ϱ,

$$(Y'_{1\varrho} - \pi_1 X'_\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial \pi_1} + (Y'_{2\varrho} - \pi_2 X'_\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial \pi_2} = 0\ . \tag{5.1}$$

Hier verschwinden nicht beide Klammern gleichzeitig, sonst wären X, Y_1, Y_2 frei von ϱ und stammten damit bloß von einer Punkttransformationsgruppe her.

---

[10]) **A. Ostrowski** (I), p. 176.

Sei daher erstens $Y'_{2\varrho} - \pi_2 X'_\varrho \not\equiv 0$:

Mit dem Quotienten

$$\frac{Y'_{1\varrho} - \pi_1 X'_\varrho}{Y'_{2\varrho} - \pi_2 X'_\varrho} \equiv \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho, \pi_1, \pi_2) \tag{5.2}$$

schreibt sich (5.1) in der Form

$$\gamma \frac{\partial\varrho}{\partial\pi_1} + \frac{\partial\varrho}{\partial\pi_2} = 0\,, \text{ [11]) } \quad \text{oder} \quad -\frac{\dfrac{\partial\varrho}{\partial\pi_2}}{\dfrac{\partial\varrho}{\partial\pi_1}} = \gamma\,. \tag{5.3}$$

Nun ist aber γ selber Integral von (5.3),

$$\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\pi_1} + \frac{\partial\gamma}{\partial\pi_2} = 0\,.$$

Wir haben nämlich

$$\left.\begin{aligned} \gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\pi_1} &= \frac{-X'_\varrho \gamma}{Y'_{2\varrho} - \pi_2 X'_\varrho} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}\right)\gamma\,\frac{\partial\varrho}{\partial\pi_1}\,, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial\pi_2} &= \frac{+X'_\varrho \gamma}{Y'_{2\varrho} - \pi_2 X'_\varrho} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}\right)\frac{\partial\varrho}{\partial\pi_2}\,. \end{aligned}\right|$$

Die Summe der beiden Zeilen ist wegen (5.3) identisch Null: γ ist mit ϱ Integral von (5.3). Daher kann γ, wenn es überhaupt von π_1, π_2 abhängt, diese Variabeln nur vermöge ϱ enthalten, und wir haben die beiden Fälle,

$$\text{Fall I:}\quad \gamma = \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)\,, \qquad \text{Fall II:}\quad \gamma = c(\xi, \eta_1, \eta_2)\,.$$

Die Gleichung (5.3) rechter Hand besagt nun, daß für jeden festen Punkt (ξ, η_1, η_2) die Niveaulinien $\varrho = \text{const.}$ Geraden in der π_1, π_2-Ebene sind.

Die Gleichungen dieser Geraden liefern die Integrale von (5.3):

$$\left.\begin{aligned} &\text{im } \textbf{Fall I:} \quad \pi_1 = \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)\,\pi_2 + \Phi(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)\,, \\ &\text{im } \textbf{Fall II:} \quad \pi_1 = c(\xi, \eta_1, \eta_2)\,\pi_2 \quad + \Psi(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

---

[11]) An dieser Stelle kommen wir auf unserem Wege über die „Gruppeneigenschaft" zur selben Differentialgleichung, wie Herr *Ostrowski* auf dem Wege über die „Umkehrbarkeit"; (I) p. 168, Formel (5.5).

Sei nun zweitens $Y'_{2\varrho} - \pi_2 X'_\varrho \equiv 0$, ($\gamma$ *wird* ∞): Dann lautet unsere Differentialgleichung einfach $\frac{\partial \varrho}{\partial \pi_1} = 0$. ϱ muß Funktion von ξ, η_1, η_2, π_2 allein sein, und wir haben ein Integral der Form:

$$\text{im } \textbf{Fall III:} \quad \pi_2 = \chi(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)\,. \tag{5.4}$$

Wir haben damit für jeden Fall die allgemeine Form der Definitionsgleichung für ϱ *gefunden.*

Ist die R-Gruppe vorgegeben, so können wir sofort entscheiden, welcher Fall vorliegt. Für den Quotienten (5.2),

$$\gamma \equiv \frac{Y'_{1\varrho} - \pi_1 X'_\varrho}{Y'_{2\varrho} - \pi_2 X'_\varrho}\,,$$

bestehen noch die von ϱ freien Darstellungen

$$\gamma = \bar{\gamma} = \frac{\overline{Y}'_{1\pi_1} - \pi_1 \overline{X}'_{\pi_1}}{\overline{Y}'_{2\pi_1} - \pi_2 \overline{X}'_{\pi_1}} = \frac{\overline{Y}'_{1\pi_2} - \pi_1 \overline{X}'_{\pi_2}}{\overline{Y}'_{2\pi_2} - \pi_2 \overline{X}'_{\pi_2}}\,, \tag{5.5}$$

wobei sicher nicht beide Quotienten unbestimmt werden. Je nachdem nun $\bar{\gamma}$ die Variabeln π_1, π_2 enthält, oder davon frei ist, oder unendlich wird, haben wir den Fall I oder II oder III vor uns.

Es steht uns frei, an Stelle von ϱ eine *parameterfreie Funktion* ϱ^* *von* ϱ einzuführen. Davon machen wir Gebrauch, um unsere obigen Definitionsgleichungen für ϱ auf eine möglichst einfache Form zu bringen. Im **Falle I** setzen wir $\varrho^* = \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)$, womit $\Phi(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) = f(\varrho^*, \xi, \eta_1, \eta_2)$ wird. ϱ^* definiert sich also aus

$$\sigma \equiv \pi_1 - \varrho^* \pi_2 - f(\varrho^*, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0\,. \tag{5.6}$$

Im **Falle II** setzen wir $\varrho^* = \Psi(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)$ und haben die Definitionsgleichung

$$\sigma \equiv \pi_1 - c(\xi, \eta_1, \eta_2)\, \pi_2 - \varrho^* = 0\,. \tag{5.6}$$

Im **Falle III** setzen wir $\varrho^* = \chi(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)$ und haben damit die Definitionsgleichung

$$\sigma \equiv \pi_2 - \varrho^* = 0\,. \tag{5.6}$$

Die Sterne können wir hinterher weglassen, denn wir können und *wollen* *von nun an unsere Funktion* $\varrho \equiv r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ *in jedem Falle so wählen, daß sie durch die entsprechende Gleichung* $\sigma = 0$ *definiert ist.* Die Funktion ϱ ist damit auch *eindeutig* definiert. Denn im Falle I haben wir $\varrho = \bar{\gamma}$, im Falle II $\varrho = \pi_1 - \bar{\gamma}\pi_2$, im Falle III $\varrho = \pi_2$. Dabei ist $\bar{\gamma}$ aus (5.5) durch die vorgegebene R-Gruppe völlig bestimmt.

Die Definitionsgleichungen $\sigma = 0$ lassen sich auch als *Pfaffsche Gleichungen* in den vier Variabeln $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$ schreiben. Indem wir $\sigma = 0$ mit $d\xi$ multiplizieren, erhalten wir

$$\left.\begin{array}{ll} \text{im } \mathbf{Fall\ \ I:} & d\sigma \equiv d\eta_1 - \varrho d\eta_2 - f(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2)\,d\xi = 0\,, \\ \text{im } \mathbf{Fall\ \ II:} & d\sigma \equiv d\eta_1 - c(\xi, \eta_1, \eta_2)\,d\eta_2 - \varrho\,d\xi = 0\,, \\ \text{im } \mathbf{Fall\ III:} & d\sigma \equiv \qquad\qquad\qquad\qquad d\eta_2 - \varrho d\xi = 0\,. \end{array}\right\} \quad (5.7)$$

Satz IV. *Die Funktion* $r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$, *mit Hilfe welcher sich eine R-Gruppe aus der zugehörigen L-Gruppe herleiten läßt, ist in jedem Fall durch eine der drei folgenden Gleichungen definierbar:*

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{I,} & s \equiv p_1 - rp_2 - f(r, x, y_1, y_2) = 0\,, \\ \mathbf{II,} & s \equiv p_1 - c(x, y_1, y_2)\,p_2 - r \quad = 0\,, \\ \mathbf{III,} & s \equiv \qquad\qquad\qquad\quad p_2 - r \quad = 0\,. \end{array}\right\} \quad (5.6)$$

Diese Gleichungen können auch durch die Pfaffschen Gleichungen ersetzt werden:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{I,} & ds \equiv dy_1 - rdy_2 - f(r, x, y_1, y_2)\,dx = 0\,, \\ \mathbf{II,} & ds \equiv dy_1 - c(x, y_1, y_2)\,dy_2 - rdx \quad = 0\,, \\ \mathbf{III,} & ds \equiv \qquad\qquad\qquad\quad dy_2 - rdx \quad = 0\,. \end{array}\right\} \quad (5.7)$$

Die Definitionsgleichungen $ds = 0$ des obigen Satzes sind *invariante Gleichungen der L-Gruppe*. Dies sieht man am schnellsten so ein: Drücken wir $d\sigma$ vermöge der L-Gruppe in lateinischen Variabeln aus, so nimmt es die Gestalt

$$d\sigma = Adx + Bdy_1 + Cdy_2 + Ddr \equiv ds^*$$

an, wo A, B, C, D Funktionen von x, y_1, y_2, r, a sind. Da ds^* gleichzeitig mit dem ebenfalls in dx, dy_1, dy_2, dr linear homogenen ds verschwindet, müssen die beiden Formen abhängig sein, d. h. es ist

$$ds^* \equiv \mu(a, x, y_1, y_2, r)\,ds, \qquad \mu \neq 0\,.$$

Daher besteht vermöge der L-Gruppe eine Relation der Form

$$d\sigma = \mu(a, x, y_1, y_2, r)\, ds\,. \tag{5.8}$$

(5.8) besagt, daß $d\sigma = 0$ (oder $ds = 0$) eine invariante Gleichung der L-Gruppe ist. Daraus folgt sofort

$$\sigma = \mu \frac{dx}{d\xi} s = \mu^* s\,, \quad \mu^*\left(a, x, y_1, y_2, p_1, p_2, \frac{dr}{dx}\right) \neq 0\,, \tag{5.9}$$

d. h. die ursprünglichen Definitionsgleichungen $\sigma = 0$ (oder $s = 0$) sind invariante Gleichungen der *erweiterten* L-Gruppe.

Wir bemerken noch, daß der Faktor μ für $a = a_0$ den Wert 1 annimmt. Insbesondere kann $\mu \equiv 1$ sein. In allen andern Fällen ist μ keine Konstante. Dasselbe gilt für μ^*.

Satz V. *Die L-Gruppe erfüllt in jedem Fall des Satzes IV eine Relation der Form*

$$d\sigma = \mu ds\,, \qquad \mu \neq 0\,, \tag{5.8}$$

und die erweiterte L-Gruppe eine solche der Form

$$\sigma = \mu^* s\,, \qquad \mu^* \neq 0\,. \tag{5.9}$$

Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

Jede Definitionsgleichung $ds = 0$ des Satzes IV ist invariante Gleichung der entsprechenden L-Gruppe. Ebenso ist jede Definitionsgleichung $s = 0$ invariante Gleichung der erweiterten L-Gruppe.

Wir beweisen nun umgekehrt, daß *jede Liesche Gruppe* in x, y_1, y_2, r, *welche eine der Definitionsgleichungen $ds = 0$ invariant läßt, auch wirklich eine R-Gruppe liefert,* und zwar für eine beliebige Wahl der Funktion $f(r, x, y_1, y_2)$ bzw. $c(x, y_1, y_2)$.

Für das aus $ds = 0$ erhaltene $r = r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ nimmt ϱ *vermöge der Gruppe* den Wert $\varrho = r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ an. Die Gleichung $\varrho = k^*(x, y_1, y_2, r, a)$ der vorgegebenen Lieschen Gruppe lautet daher für die obige Funktion

$$\varrho = r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2) = k^*(x, y_1, y_2, r(p_1, p_2, x, y_1, y_2), a)\,.$$

Ist nun $u = u(x, y_1, y_2, r, a)$ eine der übrigen drei Gruppengleichungen, so lehrt die obige Relation, daß die Invarianzeigenschaft

$$u(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho, b) = u(x, y_1, y_2, r, c)$$

erhalten bleibt, wenn man für ϱ und r die Funktionen $r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ und $r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ einsetzt. Daher entsteht aus der Lieschen Gruppe eine R-Gruppe.

Damit haben wir nun die L-Gruppe vollständig charakterisiert: Wir können hinreichende Bedingungen aussprechen.

Satz VI. *Damit eine Liesche Gruppe in x, y_1, y_2, r durch Einsetzen der Funktion $r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ eine R-Gruppe liefert, sind zwei Bedingungen notwendig und hinreichend: Erstens muß die Definitionsgleichung für r eine der Formen $ds = 0$ des Satzes IV haben, worin f bzw. c beliebige Funktionen ihrer Variabeln sind. Zweitens muß die Liesche Gruppe diese Definitionsgleichung invariant lassen.* [12])

Bei der Herleitung der Definitionsgleichungen für die Funktion $\varrho = r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ haben wir die Differentialgleichung (4.5) nur teilweise benützt, nämlich daraus (5.1) hergeleitet und integriert. Wir verifizieren noch, daß auch die Differentialgleichung (4.5) für unsere Funktion ϱ erfüllt ist.

Die Liesche Gruppe genügt einem System (4.1), (4.3) von Differentialgleichungen und erfüllt nach dem Satze V eine Relation der Form

$$\sigma = \mu^* s, \qquad \mu^* \not\equiv 0 .$$

Differentiieren wir diese nach a und setzen wir hinterher für s seinen Wert $\dfrac{\sigma}{\mu^*}$ ein, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\psi(a)} \frac{d\sigma}{da} = \left(\frac{1}{\mu^* \psi} \frac{d\mu^*}{da} \right) \sigma . \tag{5.10}$$

(Darin hängt $\dfrac{1}{\mu^* \psi} \dfrac{d\mu^*}{da} \equiv \lambda^*$, in den griechischen Variabeln ausgedrückt, nur von $\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2, \dfrac{d\varrho}{d\xi}$ ab, und kann insbesondere auch identisch Null sein.) Nun ist aber vermöge (4.1), (4.3)

$$\frac{1}{\psi(a)} \frac{d\sigma}{da} = X \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + Y_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \eta_1} + Y_2 \frac{\partial \sigma}{\partial \eta_2} + P_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \pi_1} + P_2 \frac{\partial \sigma}{\partial \pi_2} + R \frac{\partial \sigma}{\partial \varrho} ,$$

---

[12]) Dieser Satz VI stellt nun das Analogon zum *Théorème I* a. a. O. dar.

was laut (5.10) mit σ verschwindet. Andererseits haben wir vermöge $\sigma = 0$ für $u = \xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2$ die Formeln

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(-\frac{\partial \sigma}{\partial \varrho}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial u}.$$

Somit geht (5.10) vermöge $\sigma = 0$ über in

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial \varrho}\left(X\frac{\partial \varrho}{\partial \xi} + Y_1\frac{\partial \varrho}{\partial \eta_1} + Y_2\frac{\partial \varrho}{\partial \eta_2} + P_1\frac{\partial \varrho}{\partial \pi_1} + P_2\frac{\partial \varrho}{\partial \pi_2} - R\right) = 0\ ,$$

was wegen $\frac{\partial \sigma}{\partial \varrho} \not\equiv 0$ auf (4.5) hinausläuft.

Wir verfolgen unsere bisherige Theorie an den Beispielen des § 3. In allen Differentialgleichungssystemen (4.6) tritt hier die Funktion $\psi(a) \equiv \frac{1}{a}$ auf. Wir gehen überall von der ursprünglichen R-Gruppe aus.

Beispiel 1. Die Funktionen $\overline{X}, \overline{Y}_1, \overline{Y}_2$ lauten hier

$$\overline{X} = \frac{\pi_1}{\pi_2}\ , \quad \overline{Y}_1 = \eta_1\ , \quad \overline{Y}_2 = \eta_2\ .$$

Die Formel (5.5) liefert den $\bar{\gamma}$-Wert $\bar{\gamma} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$. Wir haben den **Fall I** vor uns und setzen daher $\varrho = \frac{\pi_1}{\pi_2}$. ϱ definiert sich aus der Gleichung

$$\pi_1 - \varrho\pi_2 - f(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0$$

für $f \equiv 0$. (Wir sehen, daß unser früheres $r = \frac{p_1}{p_2}$ gerade „richtig" gewählt war.)

Die Invarianzrelationen (5.9), (5.8) lauten

$$\pi_1 - \varrho\pi_2 = \frac{a}{1 + \frac{dr}{dx}\lg a}(p_1 - rp_2)\ , \quad d\eta_1 - \varrho\, d\eta_2 = a(dy_1 - r\, dy_2)\ .$$

Beide Bedingungen des Satzes VI sind für unser Beispiel 1 tatsächlich erfüllt.

Beispiel 2. Wir haben

$$\overline{X} = -\xi\ , \quad \overline{Y}_1 = -\eta_1 - \eta_2 + (\pi_1 + \pi_2)\ , \quad \overline{Y}_2 = -(\pi_1 + \pi_2)\ .$$

Daraus folgt $\bar{\gamma} = -1$. Wir haben den **Fall II** und setzen $c \equiv -1$. Aus der Gleichung

$$\pi_1 + \pi_2 - \varrho = 0$$

erhalten wir unser früheres $\varrho = \pi_1 + \pi_2$. Die Invarianzrelation lautet

$$\pi_1 + \pi_2 - \varrho = p_1 + p_2 - r\,, \quad \text{oder} \quad d\eta_1 + d\eta_2 - \varrho\, d\xi = \frac{1}{a}(dy_1 + dy_2 - r\,dx)\,.$$

Beispiel 3.

$$\bar{X} = \pi_2\,, \quad \bar{Y}_1 = \eta_1 + \frac{\pi_2^2}{2}\,, \quad \bar{Y}_2 = \eta_2 + \frac{\pi_2^2}{2}\,.$$

Hier wird $\bar{\gamma}$ unendlich. Wir haben den **Fall III,** $\varrho = \pi_2$, und es gelten die Gleichungen

$$\pi_2 - \varrho = \frac{a}{1 + (a-1)\dfrac{dr}{dx}}(p_2 - r)\,, \quad \text{oder} \quad d\eta_2 - \varrho\, d\xi = a\,(dy_2 - r\,dx)\,.$$

§ 6. Die Integraldarstellung der R-Gruppen

Wir müssen nun näher auf den Zusammenhang zwischen L-Gruppe und Differentialgleichungssystem (4.1) eingehen. Das Integralsystem von (4.1) läßt sich immer in der Form schreiben,

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) = c_\nu\,, \qquad (\nu = 1, 2, 3) \\ &\varphi_4(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) = c_4 + \int_{a_0}^{a} \psi(t)\, dt\,. \end{aligned}\right\} \text{[13]} \tag{6.1}$$

Es definiert selbst die Gruppe noch nicht. Wir müssen „Anfangsbedingungen" kennen, etwa die Gruppentransformation für $a = a_0$. Enthält die L-Gruppe die *identische Transformation,* wie wir es voraussetzen, und ist a_0 ihr Parameter, so lautet die L-Gruppe in der „Integraldarstellung":

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) = \varphi_\nu(x, y_1, y_2, r)\,, \qquad (\nu = 1, 2, 3) \\ &\varphi_4(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) = \varphi_4(x, y_1, y_2, r) + \int_{a_0}^{a} \psi(t)\, dt\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

---

[13]) Wir benützen zur Integration von (4.1) das Simultansystem

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta_1}{Y_1} = \frac{d\eta_2}{Y_2} = \frac{d\varrho}{R} = \psi(a)\, da\,,$$

welches drei unabhängige, von a freie Integrale $\varphi_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) = c_\nu$ besitzt. Vermöge dieser Integrale drücken wir z. B. X durch ξ und c_1, c_2, c_3 aus. Die Integration der Gleichung $\dfrac{d\xi}{X} = \psi(a)\, da$ liefert dann als viertes Integral $\varphi_4(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) - c_4 = \int_{a_0}^{a} \psi(t)\, dt$.

Daß das System (6.2) eine Gruppe darstellt, ist aus seiner Form ersichtlich. Denn zusammen mit einem weiteren System derselben Gestalt,

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{R}) &= \varphi_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho), \qquad (\nu = 1, 2, 3)\\ \varphi_4(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{R}) &= \varphi_4(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) + \int_{a_0}^{b} \psi(t)\, dt\,,\end{aligned}\right\}$$

ergibt sich das analoge System

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{R}) &= \varphi_\nu(x, y_1, y_2, r), \qquad (\nu = 1, 2, 3)\\ \varphi_4(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{R}) &= \varphi_4(x, y_1, y_2, r) + \int_{a_0}^{c} \psi(t)\, dt\,,\end{aligned}\right\}$$

wo c durch die Gleichung $\int_{a_0}^{c} \psi(t)\, dt = \int_{a_0}^{a} \psi(t)\, dt + \int_{a_0}^{b} \psi(t)\, dt$ bestimmt ist.

Unter der Voraussetzung (A) besteht demnach ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang zwischen der L-Gruppe und dem Differentialgleichungssystem (4.1), (4.3)[14]). Dieser umkehrbar eindeutige Zusammenhang überträgt sich auf die R-Gruppe und ihr Differentialgleichungssystem:

Setzen wir in die *Differentialgleichungen* (4.1), (4.3) *der L-Gruppe* die Funktion $\varrho = r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$ der zugehörigen R-Gruppe ein, so erhalten wir die *Differentialgleichungen* (4.6) *der R-Gruppe* (Satz III, § 4). Aus dem *Integralsystem* (6.1) der Differentialgleichungen (4.1) ergibt sich daher auf dieselbe Weise das *Integralsystem* der Differentialgleichungen (4.6):

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) &= c_\nu\,, \qquad (\nu = 1, 2, 3)\\ \bar{\varphi}_4(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) &= c_4 + \int_{a_0}^{a} \psi(t)\, dt\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Andererseits erhalten wir, wiederum auf dieselbe Weise, aus der L-Gruppe (6.2) die R-Gruppe

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) &= \bar{\varphi}_\nu(x, y_1, y_2, p_1, p_2)\,, \qquad (\nu = 1, 2, 3)\\ \bar{\varphi}_4(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) &= \bar{\varphi}_4(x, y_1, y_2, p_1, p_2) + \int_{a_0}^{a} \psi(t)\, dt\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Wir sehen nun, daß die R-Gruppe durch das Integralsystem (6.3) ihrer Differentialgleichungen schon völlig bestimmt ist. Wir können daher den Satz VII aussprechen:

[14]) Diese Tatsache ist grundlegend für die Liesche Theorie der „infinitesimalen Transformationen" einer Gruppe. *Lie-Engel* (I), pp. 45 ff., insbesondere p. 55.

Satz VII. *Jede R-Gruppe ist durch das Differentialgleichungssystem* (4.6), *dem sie genügt, eindeutig definiert. Das Differentialgleichungssystem* (4.6) *besitzt ein von* ζ_1, ζ_2 *freies Integralsystem der Form*

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi}_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) &= c_\nu\,, \qquad (\nu = 1, 2, 3) \\ \bar{\varphi}_4(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) &= c_4 + \int_{a_0}^{a} \psi(t)\, dt\,, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

welches nach ξ, η_1, η_2 *auflösbar ist.*

Wir berechnen zum Schluß die R-Gruppen unserer Beispiele aus ihren Differentialgleichungssystemen (4.6). Dabei werden wir *nicht* das Simultansystem

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta_1}{Y_1} = \frac{d\eta_2}{Y_2} = \frac{d\pi_1}{P_1} = \frac{d\pi_2}{P_2} = \psi(a)\, da \tag{6.5}$$

direkt integrieren, sondern mit Vorteil von unserer Theorie Gebrauch machen. Wir haben schon aus $\bar{X}, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ die Funktion ϱ bestimmt, und berechnen noch P_1, P_2. Mit Hilfe der Differentialgleichung (4.5) finden wir aus ϱ und X, Y_1, Y_2, P_1, P_2 die Funktion R. Wir integrieren nun das einfachere System der zugehörigen L-Gruppe,

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta_1}{Y_1} = \frac{d\eta_2}{Y_2} = \frac{d\varrho}{R} = \psi(a)\, da\,, \tag{6.6}$$

und setzen im gefundenen Integralsystem die Funktion ϱ ein. So kommen wir viel rascher und einfacher zum System (6.3), und damit zu den R-Gruppengleichungen in der Form (6.4).

Beispiel 1. Aus $X = \varrho$, $Y_1 = \eta_1$, $Y_2 = \eta_2$ ergeben sich weiter

$$P_1 = \pi_1(1 - \varrho')\,, \quad P_2 = \pi_2(1 - \varrho')\,; \quad \left(\varrho' \equiv \frac{d\varrho}{d\xi}\right),$$

und mit $\varrho \equiv \dfrac{\pi_1}{\pi_2}$ und der Differentialgleichung (4.5), $R \equiv 0$. Das System

$$\frac{d\xi}{\varrho} = \frac{d\eta_1}{\eta_1} = \frac{d\eta_2}{\eta_2} = \frac{d\varrho}{0} = \frac{da}{a}$$

hat die Integrale

$$\varrho = c_1\,, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = c_2\,, \quad \xi - \varrho \lg \eta_1 = c_3\,; \quad \frac{\xi}{\varrho} = c_4 + \lg a\ .$$

Diese Gleichungen stellen für $\varrho = \frac{\pi_1}{\pi_2}$ schon das gesuchte Integralsystem (6.3) dar. Die L-Gruppe lautet in der Form (6.2)

$$\varrho = r, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{y_1}{y_2}, \quad \xi - \varrho \lg \eta_1 = x - r \lg y_1 ; \quad \frac{\xi}{\varrho} = \frac{x}{r} + \lg a ;$$

die R-Gruppe in der entsprechenden Form (6.4),

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{y_1}{y_2}, \quad \xi - \frac{\pi_1}{\pi_2} \lg \eta_1 = x - \frac{p_1}{p_2} \lg y_1 ; \quad \frac{\xi}{\frac{\pi_1}{\pi_2}} = \frac{x}{\frac{p_1}{p_2}} + \lg a .$$

Beispiel 2. Hier kommen zu $X = -\xi$, $Y_1 = -\eta_1 - \eta_2 + \varrho$, $Y_2 = -\varrho$ noch

$$P_1 = -(\pi_2 - \varrho'), \quad P_2 = \pi_2 - \varrho' .$$

(4.5) liefert mit $\varrho \equiv \pi_1 + \pi_2$ die Funktion $R \equiv 0$. Das System

$$\frac{d\xi}{-\xi} = \frac{d\eta_1}{-\eta_1 - \eta_2 + \varrho} = \frac{d\eta_2}{-\varrho} = \frac{d\varrho}{0} = \frac{da}{a}$$

hat die Integrale

$$\varrho = c_1, \quad \eta_2 - \varrho \lg \xi = c_2, \quad \frac{\eta_1 + \eta_2}{\xi} = c_3 ; \quad \lg \frac{1}{\xi} = c_4 + \lg a .$$

Beispiel 3. Hier haben wir

$$X = \varrho, \quad Y_1 = \eta_1 + \frac{\varrho^2}{2}, \quad Y_2 = \eta_2 + \frac{\varrho^2}{2} ; \quad P_1 = \pi_1 + \varrho'(\varrho - \pi_1), \quad P_2 = \pi_2 + \varrho'(\varrho - \pi_2) .$$

Für die Funktion R erhalten wir $R \equiv \varrho$. Das System

$$\frac{d\xi}{\varrho} = \frac{d\eta_1}{\eta_1 + \frac{\varrho^2}{2}} = \frac{d\eta_2}{\eta_2 + \frac{\varrho^2}{2}} = \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{da}{a} \tag{6.7}$$

hat die Integrale

$$\xi - \varrho = c_1, \quad \frac{\eta_1}{\varrho} - \frac{\varrho}{2} = c_2, \quad \frac{\eta_2}{\varrho} - \frac{\varrho}{2} = c_3 ; \quad \lg \varrho = c_4 + \lg a .$$

Hier sieht das System (6.5) genau so aus, wie das obige System (6.7) für $\varrho = \pi_2$ vermehrt um die Gleichung

$$\frac{da}{a} = \frac{d\pi_1}{\pi_1 + \zeta_2(\pi_2 - \pi_1)} ,$$

die wir also in diesem Falle zur Integration von (6.5) nicht benötigen, weil nämlich π_1 in den übrigen Gleichungen nicht vorkommt.

Wir sehen, daß die L-Gruppe durch die drei Funktionen X, Y_1, Y_2 und die Funktion ϱ schon vollständig bestimmt ist. Es erhebt sich daher die Frage, wie die drei Funktionen X, Y_1, Y_2 beschaffen sein müssen, damit sie eine L-Gruppe definieren, welche eine unserer Definitionsgleichungen für ϱ invariant läßt. Diese Frage werden wir im zweiten Teil vollständig beantworten, und sie im dritten Teil von einer anderen Seite her nochmals angreifen.

II. TEIL

Direkte Bestimmung aller L-Gruppen

§ 7. Das Engelsche Gleichungssystem

Wir haben im ersten Teil die Bestimmung aller R-Gruppen auf diejenige aller L-Gruppen zurückgeführt. Diese sind durch den Satz VI (§ 5) vollständig charakterisiert: sie müssen eine unserer Definitionsgleichungen (5.6), $\sigma = 0$, invariant lassen. Diese Forderung führt auf eine Differentialgleichung der Form (5.10),

$$\frac{1}{\psi(a)} \frac{d\sigma}{da} = \lambda^* \sigma \,, \tag{7.1}$$

oder ausgeschrieben,

$$X \frac{\partial\sigma}{\partial\xi} + Y_1 \frac{\partial\sigma}{\partial\eta_1} + Y_2 \frac{\partial\sigma}{\partial\eta_2} + R \frac{\partial\sigma}{\partial\varrho} + P_1 \frac{\partial\sigma}{\partial\pi_1} + P_2 \frac{\partial\sigma}{\partial\pi_2} = \lambda^* \sigma \,.$$

(Hierin kann $\lambda^*\left(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2, \dfrac{d\varrho}{d\xi}\right)$ identisch Null sein.)

Gehen wir von einer *Pfaffschen* Definitionsgleichung (5.7), $d\sigma = 0$, aus, so kommen wir auf die entsprechende Relation

$$\frac{1}{\psi(a)} \frac{d(d\sigma)}{da} = \lambda d\sigma \,. \tag{7.2}$$

Diese besagt in der Lieschen Ausdrucksweise, daß die Pfaffsche Gleichung $d\sigma = 0$ bei der „*infinitesimalen Transformation*" unserer Gruppe invariant bleibt. Das Problem, alle solchen infinitesimalen Transformationen aufzustellen, hat schon *Friedrich Engel* gelöst, und zwar für eine beliebige lineare Pfaffsche Gleichung in n Variabeln[15]).

[15]) *Fr. Engel* (I), insbesondere § 2 pp. 301—302.

In unserer Ausdrucksweise lautet dieses Problem: Es sind alle Differentialgleichungssysteme (4.1), (4.3) aufzustellen, bei welchen die Gleichung (7.1) besteht.

Nun besitzt aber die infinitesimale Transformation einer Lieschen Gruppe als „Komponenten" die *Funktionen des Differentialgleichungssystems* dieser Gruppe[16]). Die Bestimmung aller infinitesimalen Transformationen, welche die Pfaffsche Gleichung invariant lassen, ist daher gleichbedeutend mit der Bestimmung aller *Differentialgleichungssysteme*, bei denen eine Invarianzrelation der Form (7.1) gilt.

Darauf beruht es, daß wir die Engelsche Methode auf unsere Problemstellung anwenden können, ohne deswegen den Begriff der infinitesimalen Transformation einführen zu müssen.

Die gestellte Aufgabe lösen wir nach *Engel* mit Vorteil in n Variabeln $\xi_1, \ldots, \xi_n$, wobei wir $\xi_2, \ldots, \xi_n$ als unbestimmte Funktionen von ξ_1 auffassen. Die Ableitungen $\dfrac{d\xi_\nu}{d\xi_1}$ bezeichnen wir mit π_ν. Die Liesche Gruppe habe das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial \xi_\nu}{\partial a} = \psi(a)\, X_\nu(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,, \quad (\nu = 1, \ldots, n)\,,$$

mit der Erweiterung

$$\frac{\partial \pi_\nu}{\partial a} = \psi(a) \left(\frac{dX_\nu}{d\xi_1} - \pi_\nu \frac{dX_1}{d\xi_1} \right).$$

Unsere Definitionsgleichung (5.6) lautet in der allgemeinen Form

$$\sigma \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, \pi_\nu = 0\,.$$

Diese Ausdrücke führen wir nun in (7.1) ein,

$$\frac{1}{\psi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\sigma_\nu}{da} \pi_\nu + \frac{1}{\psi} \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu \frac{d\pi_\nu}{da} = \lambda^* \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu \pi_\nu\,. \tag{7.3}$$

Hierin ist

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\sigma_\nu}{da} = \sum_{\mu=1}^{n} X_\mu \frac{\partial \sigma_\nu}{\partial \xi_\mu}\,; \quad \frac{1}{\psi} \frac{d\pi_\nu}{da} = \frac{dX_\nu}{d\xi_1} - \pi_\nu \frac{dX_1}{d\xi_1}\,.$$

Wir erhalten, indem wir (7.3) noch mit $d\xi_1$ multiplizieren, und das letzte Glied links, $-\dfrac{dX_1}{d\xi_1} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu\, d\xi_\nu$, zur rechten Seite schlagen,

[16]) *Lie-Engel* (I), vergleiche etwa p. 45, Formel (1) mit p. 53, Formel (8). Auf diesem Zusammenhange beruht die *strenge Begründung* der Lieschen Theorie von den infinitesimalen Transformationen.

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} X_\mu \frac{\partial \sigma_\nu}{\partial \xi_\mu} d\xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu dX_\nu = \left(\lambda^* + \frac{dX_1}{d\xi_1}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu d\xi_\nu \,. \tag{7.4}$$

Jetzt addieren wir beidseitig das totale Differential der sogenannten „*charakteristischen Funktion*" U, [17])

$$-\sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu X_\mu \equiv U \,, \tag{7.5}$$

$$-\sum_{\mu=1}^{n} X_\mu d\sigma_\mu - \sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu dX_\mu \equiv dU \,.$$

Dabei hebt sich der Summand $\sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu dX_\mu$ weg, und mit

$$d\sigma_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \sigma_\mu}{\partial \xi_\nu} d\xi_\nu \,, \qquad dU = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu} d\xi_\nu$$

erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{n} X_\mu \left(\frac{\partial \sigma_\nu}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial \sigma_\mu}{\partial \xi_\nu}\right)\right) d\xi_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\left(\lambda^* + \frac{dX_1}{d\xi_1}\right) \sigma_\nu + \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu}\right) d\xi_\nu \,. \tag{7.6}$$

Hier führen wir noch Abkürzungen ein:

$$\frac{\partial \sigma_\nu}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial \sigma_\mu}{\partial \xi_\nu} \equiv \alpha_{\nu\mu} \,, \qquad \lambda^* + \frac{dX_1}{d\xi_1} = \lambda \,. \tag{7.7}$$

(Wir bemerken nebenbei, ohne auf den Beweis einzugehen, daß dieses λ mit demjenigen in (7.2) übereinstimmt.)

Die Gleichung (7.6) zerfällt in n lineare inhomogene Gleichungen in $\lambda, X_1, \ldots, X_n$. Zusammen mit der Definitionsgleichung (7.5) für die charakteristische Form U haben wir ein System von $n+1$ linearen inhomogenen Gleichungen in den $n+1$ Unbekannten $\lambda, X_1, \ldots, X_n$. Das System besitzt eine schiefsymmetrische Matrix der Ordnung $n+1$ und lautet:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu X_\mu &= -U \,, \\ -\sigma_\nu \lambda + \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu\mu} X_\mu &= \frac{\partial U}{\partial \xi_\nu} \,, \quad (\nu = 1, \ldots, n) \,. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

---

[17]) Die Einführung dieser Funktion ist der springende Punkt in der Methode von *Engel*.

Dieses allgemeine Gleichungssystem löst *Engel* mit Hilfe der Theorie der sogenannten „Jacobischen Symbole" vollständig auf. Für unsere Spezialfälle brauchen wir indessen diese Theorie nicht weiter zu verfolgen.

§ 8. Die Differentialgleichungen für die charakteristische Funktion und für die L-Gruppe

Für die Auflösung des Systems (7.8) beschränken wir uns auf unseren **Fall I.** Wir haben

$$\sigma \equiv -f(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2) - \varrho\pi_2 + \pi_1 ,$$

und setzen

$$\left.\begin{array}{llll} \xi_1 = \xi , & \xi_2 = \eta_2 , & \xi_3 = \eta_1 , & \xi_4 = \varrho , \\ X_1 = X , & X_2 = Y_2 , & X_3 = Y_1 , & X_4 = R , \\ \sigma_1 = -f , & \sigma_2 = -\varrho , & \sigma_3 = 1 , & \sigma_4 = 0 . \end{array}\right\}$$

Für die Koeffizienten $\alpha_{\nu\mu}$ liefert (7.7)

$$\begin{array}{lll} \alpha_{12} = -f'_{\eta_2} , & \alpha_{13} = -f'_{\eta_1} , & \alpha_{14} = -f'_{\varrho} , \\ & \alpha_{23} = 0 , & \alpha_{24} = -1 , \\ & & \alpha_{34} = 0 . \end{array}$$

Überdies gilt $\alpha_{\nu\mu} = -\alpha_{\mu\nu}$, $\alpha_{\nu\nu} = 0$.

Das System (7.8) lautet für unseren Fall I

$$\left.\begin{array}{cccccl} . & -fX & -\varrho Y_2 + & Y_1 & . & = -U , \\ f\lambda & . & -f'_{\eta_2} Y_2 & -f'_{\eta_1} Y_1 & -f'_{\varrho} R & = \dfrac{\partial U}{\partial \xi} , \\ \varrho\lambda + f'_{\eta_2} X & & . & . & -R & = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_2} , \\ -\lambda + f'_{\eta_1} X & & . & . & . & = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_1} \\ . & f'_{\varrho} X & +Y_2 & . & . & = \dfrac{\partial U}{\partial \varrho} . \end{array}\right\} \qquad (8.1)$$

Da die schiefsymmetrische Determinante von (8.1) die ungerade Ordnung 5 besitzt, verschwindet sie identisch. Streicht man darin die zweite Zeile und die zweite Kolonne heraus, so hat die entstehende Unterdeterminante 4. Ordnung den Wert 1. Die Systemdeterminante ist demnach vom Range 4, und wir können das System der ersten, dritten, vierten und fünften Gleichung nach λ, Y_2, Y_1, R auflösen, wobei X als Lösungsparameter auftritt. Diese Auflösung lautet:

$$\begin{aligned} \lambda &= -(U'_{\eta_1} - f'_{\eta_1} X)\,, & Y_1 &= fX + \varrho(U'_\varrho - f'_\varrho X) - U\,, \\ Y_2 &= U'_\varrho - f'_\varrho X\,, & R &= -(U'_{\eta_2} - f'_{\eta_2} X) - \varrho(U'_{\eta_1} - f'_{\eta_1} X)\,.\text{[18]} \end{aligned} \qquad (8.2)$$

Nun bleibt noch die zweite Gleichung in (8.1) zu befriedigen. Setzen wir darin für λ, Y_2, Y_1, R die Ausdrücke (8.2) ein, so fallen alle Glieder mit X als Faktor heraus, und es bleibt die folgende *lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für die charakteristische Funktion* U:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} - f'_\varrho \frac{\partial U}{\partial \eta_2} + (f - \varrho f'_\varrho)\frac{\partial U}{\partial \eta_1} + (f'_{\eta_2} + \varrho f'_{\eta_1})\frac{\partial U}{\partial \varrho} - f'_{\eta_1} U = 0\,.\text{[19]} \qquad (8.3)$$

Genügt $U(\xi, \eta_2, \eta_1, \varrho)$ dieser Gleichung, so stellen bei jeder Wahl von $X(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)$ die aus (8.2) berechneten Funktionen λ, Y_2, Y_1, R mit X zusammen eine Lösung des Systems (8.1) dar.

Für jede Lösung X, Y_1, Y_2, R, zusammen mit P_1, P_2 und $\lambda^* = \lambda - \frac{dX}{d\xi}$ (nach Formel (7.7) rechts), besteht nun die Invarianzrelation (7.1),

$$\frac{1}{\psi(a)}\frac{d\sigma}{da} = \lambda^* \sigma\,.$$

Denken wir uns darin λ^* vermöge der durch X, Y_2, Y_1, R definierten L-Gruppe in den lateinischen Variabeln ausgedrückt,

$$\lambda^*\left(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2, \frac{d\varrho}{d\xi}\right) = l\left(a, x, y_1, y_2, p_1, p_2, \frac{dr}{dx}\right),$$

so haben wir

$$\frac{d \lg \sigma}{da} = \psi(a)\, l(a, \ldots)\,.$$

Integrieren wir diese Gleichung von a_0 bis a, und beachten wir, daß für $a = a_0$

$$\sigma = \sigma(x, y_1, y_2, r, p_1, p_2) \equiv s$$

wird, so erhalten wir $\lg \frac{\sigma}{s} = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\, l(a)\, da$ und daher

$$\sigma = s\, e^{\int_{a_0}^{a} \psi\, l\, da}\,. \qquad (8.4)$$

---

[18]) Diese Auflösung von (8.1) ist unter den formal möglichen die einzige nennerfreie, also die einzige, welche in keinem Falle versagt.

[19]) Man kann (8.3) auch direkt aus der Abhängigkeit der linken Seiten von (8.1) herleiten, indem man die Gleichungen beziehungsweise mit den Minoren einer geeigneten Kolonne der Systemdeterminante multipliziert und addiert.

Die für die Invarianz von $\sigma = 0$ notwendige Relation (7.1) *ist dafür auch hinreichend.*

Damit läßt die Gruppe auch die *Pfaffsche* Definitionsgleichung $d\sigma = 0$ invariant. In den folgenden Sätzen führen wir $d\sigma = 0$ an, weil wir vom dritten Teil her auf diese Form der Definitionsgleichungen für ϱ zurückkommen werden.

Satz VIII (I). *Damit die Liesche Gruppe mit dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta_1}{Y_1} = \frac{d\eta_2}{Y_2} = \frac{d\varrho}{R} = \psi(a)\, da$$

die Pfaffsche Gleichung

$$d\sigma \equiv d\eta_1 - \varrho\, d\eta_2 - f(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2)\, d\xi = 0$$

invariant läßt, sind zwei Bedingungen notwendig und hinreichend:

Erstens muß die charakteristische Funktion $U \equiv fX + \varrho Y_2 - Y_1$ *der Differentialgleichung* $D_1(U, f) = 0$ *genügen,*

$$D_I(U,f) \equiv \frac{\partial U}{\partial \xi} - f'_\varrho \frac{\partial U}{\partial \eta_2} + (f - \varrho f'_\varrho)\frac{\partial U}{\partial \eta_1} + (f'_{\eta_2} + \varrho f'_{\eta_1})\frac{\partial U}{\partial \varrho} - f'_{\eta_1} U = 0\,.$$

Zweitens müssen die Funktionen Y_2, Y_1, R *bei freier Wahl von* X *nach den Formeln* (8.2) *gebildet sein,*

$$\begin{aligned} &Y_2 = U'_\varrho - f'_\varrho X\,; \qquad Y_1 = fX + \varrho(U'_\varrho - f'_\varrho X) - U\,;\\ &R = -\,(U'_{\eta_2} - f'_{\eta_2} X) - \varrho(U'_{\eta_1} - f'_{\eta_1} X)\,. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Um die entsprechenden Sätze zum Fall II und III möglichst einfach herzuleiten, beachten wir, daß die *Gleichung des **Falles I,***

$$d\eta_1 - \varrho\, d\eta_2 - f(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2)\, d\xi = 0$$

durch Vertauschen der Variabeln ξ und η_2 und für den Wert $f \equiv c(\xi, \eta_1, \eta_2)$ übergeht in die *Gleichung des **Falles II,***

$$d\eta_1 - c(\xi, \eta_1, \eta_2)\, d\eta_2 - \varrho\, d\xi = 0\,,$$

und diese ihrerseits durch Vertauschen der Variabeln η_1 und η_2 und für den Wert $c \equiv 0$ übergeht in die *Gleichung des **Falles III,***

$$d\eta_2 - \varrho\, d\xi = 0\,.$$

Damit ergeben sich die fraglichen Sätze ohne weiteres:

Satz VIII (II). *Damit die Liesche Gruppe mit dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta_1}{Y_1} = \frac{d\eta_2}{Y_2} = \frac{d\varrho}{R} = \psi(a)\, da$$

die Pfaffsche Gleichung

$$d\sigma \equiv d\eta_1 - c(\xi, \eta_1, \eta_2)\, d\eta_2 - \varrho\, d\xi = 0$$

invariant läßt, sind zwei Bedingungen notwendig und hinreichend:

Erstens muß die charakteristische Funktion $U \equiv \varrho X + cY_2 - Y_1$ *der Differentialgleichung* $D_{II}(U, c) = 0$ *genügen,*

$$D_{II}(U, c) \equiv \frac{\partial U}{\partial \eta_2} + c\frac{\partial U}{\partial \eta_1} + (c'_\xi + \varrho c'_{\eta_1})\frac{\partial U}{\partial \varrho} - c'_{\eta_1} U = 0 \; .$$

Zweitens müssen die Funktionen X, Y_1, R *bei freier Wahl von* Y_2 *nach den Formeln*

$$X = U'_\varrho \, ; \quad Y_1 = cY_2 + \varrho U'_\varrho - U \, ; \qquad R = -(U'_\xi - c'_\xi Y_2) - \varrho(U'_{\eta_1} - c'_{\eta_1} Y_2)$$

gebildet sein.

Satz VIII (III). *Damit die Liesche Gruppe mit dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta_1}{Y_1} = \frac{d\eta_2}{Y_2} = \frac{d\varrho}{R} = \psi(a)\, da$$

die Pfaffsche Gleichung

$$d\sigma \equiv d\eta_2 - \varrho\, d\xi = 0$$

invariant läßt, sind zwei Bedingungen notwendig und hinreichend:

Erstens muß die charakteristische Funktion $U \equiv \varrho X - Y_2$ *der Differentialgleichung* $D_{III}(U) = 0$ *genügen,*

$$D_{III}(U) \equiv \frac{\partial U}{\partial \eta_1} = 0 \, ,$$

d. h. U *muß frei von* η_1 *sein.*

Zweitens müssen die Funktionen X, Y_2, R *bei freier Wahl von* Y_1 *nach den Formeln*

$$X = U'_\varrho \, ; \quad Y_2 = \varrho U'_\varrho - U \, ; \quad R = -U'_\xi - \varrho U'_{\eta_2}$$

gebildet sein.

Wir betrachten jetzt diese Sätze an einigen Beispielen. Dabei legen wir gerade diejenigen Pfaffschen Gleichungen zugrunde, die wir am Schluß des § 5 bei unseren Beispielen 1 bis 3 gefunden haben.

Beispiel 1. Unsere Pfaffsche Gleichung

$$d\eta_1 - \varrho d\eta_2 = 0$$

gehört dem Fall I für $f \equiv 0$ an. Nach dem Satz VIII (I) muß U der Differentialgleichung

$$D_I(U, 0) \equiv \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$$

genügen, d. h. frei von ξ sein. Jede von einer beliebigen Funktion $U(\eta_2, \eta_1, \varrho)$ nach den Formeln des Satzes VIII (I) hergeleitete Gruppe X, Y_1, Y_2, R ist daher eine L-Gruppe, welche für $r = \frac{p_1}{p_2}$ in eine R-Gruppe übergeht. Wir haben damit schon *alle* R-Gruppen mit $r = \frac{p_1}{p_2}$ aufgestellt.

Setzen wir insbesondere $U \equiv \varrho\eta_2 - \eta_1$, so haben wir bei der Wahl $X = \varrho$ die Formeln

$$Y_2 = \eta_2\,, \quad Y_1 = \eta_1\,, \quad R = 0\,,$$

also gerade die L-Gruppe unseres Beispiels 1, die wir am Schluß des § 6 gefunden haben.

Beispiel 2. Die Pfaffsche Gleichung

$$d\eta_1 + d\eta_2 - \varrho d\xi = 0$$

gehört zum Fall II für $c \equiv -1$. Nach dem Satz VIII (II) muß U der Differentialgleichung

$$D_{II}(U, -1) \equiv \frac{\partial U}{\partial \eta_2} - \frac{\partial U}{\partial \eta_1} = 0$$

genügen, d. h. $U = U(\xi, \eta_1 + \eta_2, \varrho)$.

Die Gesamtheit aller L-Gruppen, die aus $U(\xi, \eta_1 + \eta_2, \varrho)$ nach den Formeln des Satzes VIII (II) gebildet werden, geht für $r = p_1 + p_2$ in die Gesamtheit aller möglichen R-Gruppen mit $r = p_1 + p_2$ über.

Setzen wir insbesondere $U = \eta_1 + \eta_2 - \xi\varrho$, so erhalten wir bei der Wahl $Y_2 = -\varrho$ die Funktionen

$$X = -\xi, \quad Y_1 = -\eta_1 - \eta_2 + \varrho, \quad R = 0,$$

also gerade die L-Gruppe des früheren Beispiels 2.

Beispiel 3.

$$d\eta_2 - \varrho d\xi = 0 .$$

Hier unterliegt U nur der Bedingung, daß es frei von η_1 ist. Wir erhalten dann immer eine L-Gruppe nach den Formeln des Satzes VIII (III).

Setzen wir $U = \frac{\varrho^2}{2} - \eta_2$, so ergeben sich mit $Y_1 = \eta_1 + \frac{\varrho^2}{2}$ zusammen die Funktionen

$$X = \varrho, \quad Y_2 = \eta_2 + \frac{\varrho^2}{2}, \quad R = \varrho$$

der L-Gruppe unseres früheren Beispiels 3.

§ 9. Der Zusammenhang mit den Gruppen von ebenen Berührungstransformationen. Das R-Gruppoid

Zum Satz VIII (III) haben wir noch eine wichtige Bemerkung zu machen. Die Formeln

$$X = U'_\varrho, \quad Y_2 = \varrho U'_\varrho - U, \quad R = -U'_\xi - \varrho U'_{\eta_2},$$

abgeleitet von einer beliebigen Funktion $U(\xi, \eta_2, \varrho)$, wo ϱ die Bedeutung $\varrho = \frac{d\eta_2}{d\xi} = \pi_2$ hat, definieren nach *Lie* eine *Gruppe von ebenen Berührungstransformationen in den Variabeln* ξ, η_2, π_2[20]). *Jede R-Gruppe des Falles III besteht demnach aus einer Berührungstransformationsgruppe der x, y_2-Ebene, vermehrt um eine Gruppengleichung der Form*

$$\eta_1 = h_1(x, y_1, y_2, p_2, a) \; ; \quad \text{(Beispiel 3)} .$$

Diese Aussage stellt die begriffliche Deutung des Satzes VIII (III) dar. Auch die Umkehrung gilt: *Jede Berührungstransformationsgruppe der x, y_2-Ebene stellt, zusammen mit einer beliebigen Gruppengleichung der Form $\eta_1 = h_1(x, y_1, y_2, p_2, a)$ eine R-Gruppe des Falles III dar.*

---

[20]) *Lie-Engel* (II), p. 252.

Das Analoge gilt im Falle II für den Wert $c \equiv 0$ in bezug auf die x, y_1-Ebene, und im Falle I für $f \equiv 0$ (Beispiel 1), in bezug auf die y_2, y_1-Ebene.

Nach dem „*Théorème III*“[21]) der zitierten Arbeit von Herrn *Ostrowski* existiert immer eine *R-Einzel*transformation, welche eine Pfaffsche Form des Falles I oder II in $ds_{III} \equiv dy_2 - r dx$ des Falles III überführt. Sei nun T_a eine L-Gruppe des allgemeinen Falles I oder II, welche $d\tau = 0$ invariant läßt, und $\mathfrak{R}$ die Einzeltransformation, welche $d\tau$ in ds_{III} überführt. Bilden wir

$$\mathfrak{R} T_a \mathfrak{R}^{-1} = S_a ,$$

worin $\mathfrak{R}^{-1}$ die inverse Transformation von $\mathfrak{R}$ bedeutet, so läßt jede Transformation dieser Schar S_a die Gleichung $ds_{III} = 0$ invariant, denn sie führt die Form ds_{III} wieder in die Form ds_{III} über. *Diese Schar S_a ist eine L-Gruppe des Falles III.* Denn mit

$$S_a = \mathfrak{R} T_a \mathfrak{R}^{-1}, \quad S_b = \mathfrak{R} T_b \mathfrak{R}^{-1}; \quad T_a T_b = T_c ,$$

ist auch

$$S_a S_b = \mathfrak{R} T_a T_b \mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R} T_c \mathfrak{R}^{-1} = S_c .$$

Überdies besteht, wegen der umkehrbar eindeutigen Zuordnung

$$S_a \rightleftarrows T_a , \qquad S_b \rightleftarrows T_b , \qquad S_a S_b \rightleftarrows T_a T_b ,$$

ein Isomorphismus zwischen der allgemeinen Gruppe T_a und der speziellen Gruppe S_a des Falles III.

Jede unserer R-Gruppen, welche die bestimmte Pfaffsche Form $d\sigma$ in sich überführt, steckt in der „*unendlichen kontinuierlichen Gruppe*“ *aller symmetrischen R-Transformationen von $d\sigma$*. Diese wollen wir kurz als den „*Kern von $d\sigma$*“ bezeichnen. Zu jeder Pfaffschen Form gehört ein solcher Kern und alle Kerne sind untereinander isomorph[22]).

Wir nehmen nun noch die Gesamtheit aller *unsymmetrischen* R-Transformationen hinzu, welche die Form $d\sigma$ in eine andere Form $d\tau$ überführen, also die Kerne von $d\sigma$ und $d\tau$ untereinander verbinden. Der Inbegriff *aller* symmetrischen *und* unsymmetrischen R-Transformationen stellt eine Mannigfaltigkeit dar, die wir als „*unendliches kontinuierliches R-Gruppoid*“ bezeichnen können[23]).

---

[21]) *A. Ostrowski* (I), p. 182.

[22]) Zum Begriff der „unendlichen kontinuierlichen Gruppe“ vergleiche *Lie-Engel* (I), pp. 3—6; für die entsprechenden Differentialgleichungen *A. Ostrowski* (I), p. 185, § 5.

[23]) *H. Brandt*, „Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes“, Math. Ann. 96 (1927), pp. 360—366.

Wir haben oben auf den Zusammenhang der R-Gruppen mit den Gruppen von *ebenen* Berührungstransformationen hingewiesen. Es besteht ein weiterer Zusammenhang mit den Gruppen von *räumlichen* Berührungstransformationen. Darauf gehen wir nun im dritten Teil ein.

III. TEIL

R-Gruppen und Gruppen von räumlichen Berührungstransformationen

§ 10. L-Gruppen und B-Gruppen

Wir bezeichnen im folgenden eingliedrige Gruppen von räumlichen Berührungstransformationen kurz als „B-Gruppen". Eine B-Gruppe transformiert jedes Flächenelement

$$x\,,\; y_2\,,\; y_1\,,\; p \equiv \frac{\partial y_1}{\partial x}\,, \qquad q \equiv \frac{\partial y_1}{\partial y_2}$$

wieder in ein Flächenelement

$$\xi\,,\; \eta_2\,,\; \eta_1\,,\; \pi \equiv \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}\,, \qquad \varkappa \equiv \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_2}\,.$$

(Wir identifizieren hier die übliche Koordinatenbezeichnung y mit y_2 und z mit y_1, fassen also y_1 als unbestimmte Funktion von x und y_2 auf.) Jede B-Gruppe erfüllt eine Relation der Form

$$d\eta_1 - \varkappa d\eta_2 - \pi d\xi = \mu(dy_1 - q dy_2 - p dx); \quad \mu(a, x, y_2, y_1, p, q) \not\equiv 0,$$

d. h. sie läßt die spezielle Pfaffsche Gleichung

$$dy_1 - q dy_2 - p dx = 0 \tag{10.1}$$

invariant.

Angenommen, eine B-Gruppe lasse überdies die partielle Differentialgleichung

$$p - f(q, x, y_2, y_1) = 0$$

invariant. Führen wir in dieser B-Gruppe für die Variable p die Funktion $f(q, x, y_2, y_1)$ und für die Variable π die Funktion $f(\varkappa, \xi, \eta_2, \eta_1)$ ein, so erhalten wir eine einparametrige Schar in den 4 Variablen x, y_2, y_1, q.

Nach einem Satze von *Lie* ist dieses „verkürzte“ System wiederum eine eingliedrige Gruppe[24]). Diese läßt die Pfaffsche Gleichung

$$dy_1 - q dy_2 - f(q, x, y_2, y_1)\, dx = 0$$

invariant, ist also, wenn wir noch q mit unserem früheren r identifizieren, nichts anderes, als eine *L-Gruppe des* ***Falles I.*** Berechnen wir hier q aus

$$p_1 - q p_2 - f(q, x, y_2, y_1) = 0 ,$$

und setzen wir es in die verkürzte B-Gruppe ein, so erhalten wir nach den früheren Ausführungen eine R-Gruppe in x, y_1, y_2, p_1, p_2.

Nehmen wir nun an, eine B-Gruppe lasse die partielle Differentialgleichung

$$q - c(x, y_2, y_1) = 0$$

invariant. Führen wir in dieser B-Gruppe für die Variable q die Funktion $c(x, y_2, y_1)$ und für die Variable κ die Funktion $c(\xi, \eta_2, \eta_1)$ ein, so erhalten wir nach dem oben benützten Lieschen Satze eine verkürzte Gruppe in den 4 Variabeln x, y_2, y_1, p, welche die Pfaffsche Gleichung

$$dy_1 - c(x, y_2, y_1)\, dy_2 - p dx = 0$$

invariant läßt. Identifizieren wir hier p mit unserem früheren r, so haben wir eine *L-Gruppe des* ***Falles II*** vor uns, welche für $p = p_1 - c(x, y_2, y_1)\, p_2$ die zugehörige R-Gruppe in x, y_1, y_2, p_1, p_2 liefert.

Der Fall III nimmt auch hier eine Sonderstellung ein[25]). Die Pfaffsche Gleichung

$$dy_2 - r dx = 0$$

können wir nicht aus (10.1) mit Hilfe einer invarianten Gleichung herleiten, sondern wir müssen zu diesem Zwecke die Variabeln y_2, y_1 in der B-Gruppe vertauschen: Wir fassen hier y_2 als unbestimmte Funktion von x und y_1 auf, transformieren also ein Flächenelement mit den Koordinaten

$$x\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ \bar{p} \equiv \frac{\partial y_2}{\partial x}\,, \quad \bar{q} \equiv \frac{\partial y_2}{\partial y_1}$$

---

[24]) *Lie-Engel* (I), p. 233. Der direkte Beweis dieses Satzes für eine invariante Gleichung verläuft ähnlich, wie unser Beweis dafür, daß aus der L-Gruppe vermöge der invarianten Gleichung $r = r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ eine R-Gruppe entsteht (§ 5).

[25]) Dies liegt an der Verwendung der *inhomogenen* Koordinaten, sowohl früher bei den R-Gruppen, als jetzt bei den B-Gruppen.

in ein solches mit den Koordinaten

$$\xi\,,\ \eta_1\,,\ \eta_2\,,\ \bar{\pi} \equiv \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi}\,,\qquad \bar{\kappa} \equiv \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_1}\,.$$

Die invariante Gleichung (10.1) der B-Gruppe lautet nun

$$dy_2 - \bar{q}\,dy_1 - \bar{p}\,dx = 0\,. \tag{10.2}$$

Angenommen, die B-Gruppe in den Variabeln $x, y_1, y_2, \bar{p}, \bar{q}$ lasse nun die partielle Differentialgleichung

$$\bar{q} \equiv \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0$$

invariant. „Verkürzen" wir diese B-Gruppe mit $\bar{q} = 0$, so erhalten wir — wiederum nach dem schon benützten Lieschen Satze — eine Gruppe in den 4 Variabeln $x, y_1, y_2, \bar{p}$, welche die Pfaffsche Gleichung

$$dy_2 - \bar{p}\,dx = 0$$

invariant läßt. Identifizieren wir darin $\bar{p}$ mit unserem früheren r, so haben wir eine *L-Gruppe des* ***Falles III*** vor uns, welche für $\bar{p} = p_2$ die zugehörige R-Gruppe in x, y_1, y_2, p_2 liefert.

Wir haben damit einen neuen Weg zur Erzeugung von R-Gruppen dargelegt und werden mit dem Satze X beweisen, daß man *jede R-Gruppe* auf diese Weise erhalten kann.

Auch im allgemeinsten Falle der unsymmetrischen *R-Einzeltransformationen* führt dieser Weg zur Erzeugung von R-Transformationen zum Ziel. Es gilt der Satz, daß zu jeder R-Transformation solche „erzeugende" Berührungstransformationen existieren, wie dies Herr *Ostrowski* im zweiten Teil seiner Arbeit dargelegt hat[26]).

Im folgenden beschränken wir uns — wie im zweiten Teil — zuerst auf unseren früheren ***Fall I*** und leiten daraus die Ergebnisse in den Fällen II und III durch Variabelnvertauschung her. *Unser Ziel ist die Bestimmung aller B-Gruppen, welche eine partielle Differentialgleichung der Form* $p = f(q, x, y_1, y_2)$ *invariant lassen.* Zunächst stellen wir den formalen und den geometrischen Zusammenhang der B-Gruppen mit den daraus erzeugten L-Gruppen her.

---

[26]) ***A. Ostrowski*** **(II), pp. 41—60.**

Unsere B-Gruppe sei durch das Differentialgleichungssystem (10.3) definiert,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial a} &= \psi(a)\, X^*(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa), & \frac{\partial\pi}{\partial a} &= \psi(a)\, P^*(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa), \\ \frac{\partial\eta_2}{\partial a} &= \psi(a)\, Y_2^*(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa), & \frac{\partial\kappa}{\partial a} &= \psi(a)\, Q^*(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa). \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial a} &= \psi(a)\, Y_1^*(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa), \end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

Darin ergeben sich die Funktionen X^*, Y_2^*, Y_1^*, P^*, Q^* nach *Lie* aus der sogenannten *charakteristischen Funktion* $W^*(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa)$ mit Hilfe der Formeln[27])

$$\left.\begin{aligned} X^* &= W_\pi^{*\prime}, \\ Y_2^* &= W_\kappa^{*\prime} \\ Y_1^* &= \pi W_\pi^{*\prime} + \kappa W_\kappa^{*\prime} - W^*, \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} P^* &= -W_\xi^{*\prime} - \pi W_{\eta_1}^{*\prime}, \\ Q^* &= -W_{\eta_2}^{*\prime} - \kappa W_{\eta_1}^{*\prime}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.4)$$

Dabei ist identisch $\pi X^* + \kappa Y_2^* - Y_1^* \equiv W^*$.

Die B-Gruppe lasse nun die vorgegebene Gleichung

$$\tau \equiv f(\kappa, \xi, \eta_2, \eta_1) - \pi = 0 \qquad (10.5)$$

invariant. Das Einführen der Funktion $f(\kappa, \xi, \eta_2, \eta_1)$ für die Variable π deuten wir durch Weglassen des Sterns an. Die Invarianz von $\tau = 0$, ($\pi = f$) führt — ähnlich wie früher im 1. Teil bei der Invarianz von $\sigma = 0$, ($\varrho = r$) — auf die Differentialgleichung $\frac{1}{\psi(a)}\frac{df}{da} = P$, oder ausgeschrieben,

$$X f_\xi' + Y_2 f_{\eta_2}' + Y_1 f_{\eta_1}' + Q f_\kappa' - P = 0\,. \qquad (10.6)$$

Andererseits gilt, wenn man

$$W^*(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa)\Big|_{\pi=f} = W(\xi, \eta_2, \eta_1, \kappa)\;; \qquad W_\pi^{*\prime}\Big|_{\pi=f} \equiv X^*\Big|_{\pi=f} = X$$

setzt, die Formel

$$W_u^{*\prime}\Big|_{\pi=f} = W_u' - f_u' X\,, \quad \text{für} \quad u = \xi, \eta_2, \eta_1, \kappa\,.$$

---

[27]) *Lie-Engel* (II), p. 252.

Damit erhalten wir aus (10.4) für Y_2, Y_1, Q, P die Formeln:

$$\begin{aligned} Y_2 &= W'_\kappa - f'_\kappa X\,, & Q &= -(W'_{\eta_2} - f'_{\eta_2} X) - \kappa(W'_{\eta_1} - f'_{\eta_1} X)\,, \\ Y_1 &= fX + \kappa(W'_\kappa - f'_\kappa X) - W\,, & P &= -(W'_\xi - f'_\xi X) - f(W'_{\eta_1} - f'_{\eta_1} X)\,. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Setzen wir die Ausdrücke (10.7) in die Gleichung (10.6) ein, so fallen alle Glieder, die X als Faktor enthalten, weg, und es bleibt die *partielle Differentialgleichung für* W,

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} - f'_\kappa \frac{\partial W}{\partial \eta_2} + (f - \kappa f'_\kappa)\frac{\partial W}{\partial \eta_1} + (f'_{\eta_2} + \kappa f'_{\eta_1})\frac{\partial W}{\partial \kappa} - f'_{\eta_1} W = 0\,. \tag{10.8}$$

Die ersten drei Formeln (10.7) und die Gleichung (10.8) sind aber, wenn wir hier noch κ mit ϱ, W mit U, Q mit R identifizieren, nichts anderes als die Formeln und die Differentialgleichung $D_I(U, f) = 0$ des Satzes VIII (I) im 2. Teil: *Die mit der invarianten Gleichung* $p = f(q, x, y_2, y_1)$ *„verkürzte" B-Gruppe ist eine L-Gruppe unseres früheren Falles I. Die charakteristische Funktion* W^* *geht für* $\pi = f(\kappa, \xi, \eta_2, \eta_1)$ *einfach in die charakterische Funktion* U *der L-Gruppe über.*

Die Gleichung

$$p = f(q, x, y_2, y_1) \tag{10.9}$$

ordnet jedem Punkt (x, y_2, y_1) ∞^1 Flächenelemente (p, q) zu. Sie definiert im Raume $\mathfrak{C}(x, y_2, y_1)$ ein „Flächenelementfeld"[28]. Die Invarianz der obigen Gleichung bei der B-Gruppe bedeutet, daß die B-Gruppe, angewendet auf die Flächenelemente des Feldes (10.9), diese einfach untereinander vertauscht. Die B-Gruppe, angewendet auf das invariante Feld (10.9), geht aber in eine L-Gruppe über, welche zur Gleichung

$$p_1 - q p_2 - f(q, x, y_2, y_1) = 0\,, \tag{10.10}$$

gehört, oder, in unserer früheren Schreibweise,

$$p_1 - r p_2 - f(r, x, y_2, y_1) = 0\,. \tag{10.11}$$

Die Größen r und $f(r, x, y_2, y_1)$ sind die Komponenten desjenigen Flächenelementes, welches aus den Linienelementen (p_1, p_2) der Gleichung (10.10) besteht. Der Wert von r liefert umgekehrt zu jedem Linienelement (p_1, p_2) die Komponenten eines Flächenelementes, in welchem das betreffende Linienelement liegt.

[28]) *A. Ostrowski* (I), pp. 171—173.

Die L-Gruppe kann demnach als eine solche *B-Gruppe* aufgefaßt werden, *welche die Linienelemente der R-Gruppe* bei der Transformation *mit den Flächenelementen des invarianten Feldes* (10.9) „*begleitet*".

Diese geometrische Auffassung ist auch im allgemeinen Falle der R-Einzeltransformationen möglich. Nur führt dort die „begleitende" Berührungstransformation die Flächenelemente des Feldes $p = f(q, x, y_2, y_1)$ in diejenigen eines *anderen* Feldes $\pi = \varphi(\kappa, \xi, \eta_2, \eta_1)$ über, wenn es sich nicht um eine symmetrische R-Transformation handelt[29]).

§ 11. *B*-Gruppen mit invarianten Feldern

Wir möchten nun *alle* B-Gruppen aufstellen, welche das Feld (10.9) invariant lassen. Wir haben schon gesehen, daß dann ihre charakteristischen Funktionen W^* für den Wert $\pi = f(\kappa, \xi, \eta_2, \eta_1)$ unserer früheren Differentialgleichung $D_I(W, f) = 0$ genügen müssen. *Diese Bedingung ist allein schon hinreichend.*

Jede charakteristische Funktion W^*, für welche

$$W^* \Big|_{\pi = f} = W$$

gilt, schreibt sich nämlich in der Form

$$W^* \equiv W + \int_f^\pi X^* \, d\pi \ . \tag{11.1}$$

Denn sei z.B. W_1^* eine solche, und $W_{1\pi}^{*\prime} = X_1^*$, so gilt $\int_f^\pi X_1^* \, d\pi = W_1^* - W$, also $W + \int_f^\pi X_1^* \, d\pi \equiv W_1^*$. Unsere Funktionen Y_2^*, Y_1^*, Q^* lauten nun nach den Formeln (10.4)

$$Y_2^* = W'_\kappa - f'_\kappa X + \int_f^\pi X_\kappa^{*\prime} \, d\pi \, ,$$

$$Y_1^* = \pi X^* + \kappa(W'_\kappa - f'_\kappa X) - W + \kappa \int_f^\pi X_\kappa^{*\prime} \, d\pi - \int_f^\pi X^* \, d\pi \, ,$$

$$Q^* = -(W'_{\eta_2} - f'_{\eta_2} X) - \kappa(W'_{\eta_1} - f'_{\eta_1} X) - \int_f^\pi X_{\eta_2}^{*\prime} \, d\pi - \kappa \int_f^\pi X_{\eta_1}^{*\prime} \, d\pi \ .$$

---

[29]) *A. Ostrowski* (II), pp. 48—49.

Hierin fallen aber für $\pi = f$ alle Integrale weg und die Formeln nehmen die Gestalt (10.7) an. W^* definiert eine B-Gruppe, welche wegen $D_I(W, f) = 0$ für $\pi = f$ in eine L-Gruppe des Falles I übergeht. Daher läßt jede solche B-Gruppe die Gleichung $\pi = f$ invariant und wir haben den Satz:

Satz IX (I). *Damit die durch* $W^*(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa)$ *definierte B-Gruppe die Gleichung*

$$\pi = f(\kappa, \xi, \eta_2, \eta_1)$$

invariant läßt, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

Die Funktion

$$W^* \Big|_{\pi = f} \equiv W(\xi, \eta_2, \eta_1, \kappa)$$

muß der Differentialgleichung $D_1(W, f) = 0$ *des Satzes VIII (I) genügen, worin* ϱ *durch* κ *zu ersetzen ist.*

Damit haben wir das im § 10 gestellte Ziel für den **Fall I** erreicht und kommen nun zu den Fällen II und III.

Die gesuchten B-Gruppen sollen im **Fall II** Gleichungen der Form

$$q = c(x, y_2, y_1) \tag{11.2}$$

invariant lassen, also in L-Gruppen übergehen, welche zur Gleichung

$$p_1 - c(x, y_2, y_1)\, p_2 - p = 0 \tag{11.3}$$

gehören, oder in früherer Schreibweise

$$p_1 - c(x, y_2, y_1)\, p_2 - r = 0\,. \tag{11.4}$$

Die Größe r hat in diesem Fall *nicht* den Wert der q-Komponente des durch (11.3) definierten Flächenelementes, sondern den Wert der p-Komponente. Die q-Komponente ist hier mit dem Punkt (x, y_2, y_1) fest. Das begleitende Flächenelementfeld (11.2) besteht demnach nicht aus „Elementarkegeln" wie das Feld (10.9), sondern aus „axialen Büscheln".

Den entsprechenden Satz IX (II) gewinnen wir — wie im 2. Teil den Satz VIII (II) — aus dem ersten Satze durch Variabelnvertauschung. Hier muß ξ mit η_2 vertauscht, und f durch $c(\xi, \eta_2, \eta_1)$ ersetzt werden.

Satz IX (II). *Damit die durch* $W^*(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa)$ *definierte B-Gruppe die Gleichung*

$$\kappa = c(\xi, \eta_2, \eta_1)$$

invariant läßt, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

Die Funktion

$$W^* \Big|_{\kappa=c} \equiv W(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi)$$

muß der Differentialgleichung $D_{II}(W, c) = 0$ *des Satzes VIII (II) genügen, worin* ϱ *durch* π *zu ersetzen ist.*

Im **Falle III** soll die B-Gruppe in den Variabeln $x, y_1, y_2, \bar{p}, \bar{q}$ die Gleichung

$$\bar{q} \equiv \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0 \qquad (11.5)$$

invariant lassen, also in eine L-Gruppe übergehen, welche zur Gleichung

$$p_2 - \bar{p} = 0 \qquad (11.6)$$

gehört, oder in früherer Schreibweise,

$$p_2 - r = 0 \,. \qquad (11.7)$$

Die Größe r hat den Wert der $\bar{p}$-Komponente des durch (11.6) definierten Flächenelementes. Die $\bar{q}$-Komponente ist immer Null: Die „axialen Büschel" des Feldes (11.5), welches in diesem Falle die Linienelemente bei der R-Transformation begleitet, stehen alle senkrecht auf der x, y_2-Ebene.

Den gesuchten Satz IX (III) gewinnen wir aus dem Satz IX (II) durch Vertauschen der Variabeln η_1 und η_2, und für den Wert $c \equiv 0$.

Satz IX (III). *Damit die durch* $W^*(\xi, \eta_1, \eta_2, \bar{\pi}, \bar{\kappa})$ *definierte B-Gruppe die Gleichung*

$$\bar{\kappa} = 0$$

invariant läßt, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

Die Funktion

$$W^* \Big|_{\bar{\kappa}=0} \equiv W(\xi, \eta_1, \eta_2, \bar{\pi})$$

muß frei von η_1 *sein.*

Die Sätze IX (I), IX (II), IX (III) gestatten nun ohne weiteres, *alle charakteristischen Funktionen* W^* hinzuschreiben, deren B-Gruppen in eine beliebig vorgegebene L-Gruppe übergehen, *deren B-Gruppen also eine beliebig vorgegebene R-Gruppe erzeugen.* Hierin ist der im § 10 versprochene Beweis dafür enthalten, dass man *jede R-Gruppe* aus B-Gruppen erzeugen kann.

Die R-Gruppe des **Falles I** sei durch U, X, f gegeben, also durch ihre L-Gruppe und die Funktion r. Dann schreiben sich W^* und X^* einer entsprechenden B-Gruppe in der Form

$$W^* = U + \int_f^\pi X^* \, d\pi \,, \qquad X^* = X + \int_f^\pi S \, d\pi \,,$$

wo $S(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa)$ eine willkürliche Funktion ihrer Variabeln ist. Zusammengesetzt ergibt dies

$$W^* = U + (\pi - f) \, X + \int_f^\pi \left(\int_f^\pi S \, d\pi \right) d\pi \,. \tag{11.8}$$

worin alle fraglichen B-Gruppen stecken.

Im **Falle II** ist die R-Gruppe durch U, Y_2, c gegeben. Wir haben die entsprechenden Formeln

$$W^* = U + \int_c^\kappa Y_2 \, d\kappa \,, \qquad Y_2^* = Y_2 + \int_c^\kappa T \, d\kappa \,,$$

wo $T(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa)$ willkürlich wählbar ist. Die gesuchten B-Gruppen sind durch

$$W^* = U + (\kappa - c) \, Y_2 + \int_c^\kappa \left(\int_c^\kappa T \, d\kappa \right) d\kappa \tag{11.9}$$

definiert.

Im **Falle III** endlich ist die R-Gruppe durch U, Y_1 gegeben. Die Formeln lauten

$$W^* = U + \int_0^{\bar{\kappa}} Y_1^* \, d\bar{\kappa} \,, \qquad Y_1^* = Y_1 + \int_0^{\bar{\kappa}} V \, d\bar{\kappa} \,,$$

bei freier Wahl von $V(\xi, \eta_1, \eta_2, \bar{\pi}, \bar{\kappa})$. Die B-Gruppen haben die charakteristischen Funktionen

$$W^* = U + \bar{\kappa} Y_1 + \int_0^{\bar{\kappa}} \left(\int_0^{\bar{\kappa}} V \, d\bar{\kappa} \right) d\bar{\kappa} \,. \tag{11.10}$$

Satz X (I, II, III). *Jede R-Gruppe läßt sich aus unendlich vielen B-Gruppen durch „Verkürzung" erzeugen. Die charakteristischen Funktionen W^* aller dazu tauglichen B-Gruppen stecken in den folgenden Formeln:*

Fall I: *R-Gruppe* $U(\xi, \eta_2, \eta_1, \kappa)$; $X(\xi, \eta_2, \eta_1, \kappa)$; $f(\kappa, \xi, \eta_2, \eta_1)$.

$$W^* = U + (\pi - f)\, X + \int_f^\pi \left(\int_f^\pi S\, d\pi\right) d\pi \;;$$

U erfüllt $D_I(U, f) = 0$, $S(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa)$ ist willkürlich.

Fall II: *R-Gruppe* $U(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi)$; $Y_2(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi)$; $c(\xi, \eta_2, \eta_1)$.

$$W^* = U + (\kappa - c)\, Y_2 + \int_c^\kappa \left(\int_c^\kappa T\, d\kappa\right) d\kappa \;;$$

U erfüllt $D_{II}(U, c) = 0$, $T(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa)$ ist willkürlich.

Fall III: *R-Gruppe* $U(\xi, \eta_2, \bar{\pi})$; $Y_1(\xi, \eta_1, \eta_2, \bar{\pi})$.

$$W^* = U + \bar{\kappa} Y_1 + \int_0^{\bar{\kappa}} \left(\int_0^{\bar{\kappa}} V\, d\bar{\kappa}\right) d\bar{\kappa} \;;$$

$U(\xi, \eta_2, \bar{\pi})$ und $V(\xi, \eta_1, \eta_2, \bar{\pi}, \bar{\kappa})$ sind willkürlich.

§ 12. Herleitung aller möglichen R-Gruppen aus einer vorgegebenen B-Gruppe

Wir kommen jetzt zum letzten Problem in diesem Zusammenhange: Ausgehend von einer *vorgegebenen* räumlichen B-Gruppe, suchen wir ihre invarianten Gleichungen der Form $p = f(q, x, y_2, y_1)$ oder $q = c(x, y_2, y_1)$ auf. Damit finden wir nach den vorangegangenen Sätzen alle möglichen L-Gruppen, und gleichzeitig alle R-Gruppen, welche sich überhaupt aus der vorgegebenen B-Gruppe herleiten lassen.

Wir nehmen unsere Feldgleichung in der allgemeinen Form

$$\tau \equiv t(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa) = 0 \tag{12.1}$$

an. Bezeichnen wir $t(x, y_2, y_1, p, q)$ mit t, so soll also vermöge der B-Gruppe eine Relation der Form

$$\tau = \mu t$$

bestehen. Dies führt uns auf eine Differentialgleichung für τ in der Form $\frac{1}{\psi(a)} \frac{d\tau}{da} = \lambda \tau$, oder ausgeschrieben,

$$X^* \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + Y_2^* \frac{\partial \tau}{\partial \eta_2} + Y_1^* \frac{\partial \tau}{\partial \eta_1} + P^* \frac{\partial \tau}{\partial \pi} + Q^* \frac{\partial \tau}{\partial \kappa} = \lambda \tau , \qquad (12.2)$$

worin λ willkürlich vorgegeben wird.

Wir nehmen die singulären Integrale vorweg, indem wir nachprüfen, ob sich aus dem Nullsetzen der bekannten Koeffizienten X^*, Y_2^*, Y_1^*, P^*, Q^* invariante Gleichungen $\tau = 0$ herleiten lassen, welche mindestens eine der Variabeln π, κ enthalten. (Der einfachste Fall ist etwa $P^* \equiv \pi$, denn $\tau \equiv \pi$ erfüllt (12.2) vermöge $\pi = 0$, ganz abgesehen von den übrigen Koeffizienten). Im folgenden können wir daher voraussetzen, daß die Koeffizienten *nicht* vermöge der Wertesysteme weiterer invarianter Gleichungen verschwinden.

Es seien nun

$$c_1(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa), \quad c_2(\ldots), \quad c_3(\ldots), \quad c_4(\ldots) \qquad (12.3)$$

vier unabhängige Integrale der *homogenen Gleichung*

$$\frac{1}{\psi(a)} \frac{d\tau}{da} = 0 \; . \qquad (12.4)$$

Weiter sei G irgendein nichtidentisch verschwindender unter den Koeffizienten, und γ die entsprechende Variable. Wir setzen

$$\lambda(\xi, \eta_2, \eta_1, \pi, \kappa) = \bar{\lambda}(\gamma, c_1, \ldots, c_4) \, , \quad G = \bar{G}(\gamma, c_1, \ldots, c_4) \, .$$

Ein fünftes Integral, welches τ enthält, ergibt sich nun aus

$$\frac{d\gamma}{\bar{G}} = \frac{d\tau}{\bar{\lambda}\tau} :$$

$$\tau = c_5 e^{\Phi} \quad \text{mit} \quad \Phi \equiv \int \frac{\bar{\lambda}}{\bar{G}} d\gamma \, , \quad \bar{G} \neq 0 \; .$$

Da e^{Φ} nicht verschwindet, reduziert sich die allgemeine Lösung auf

$$\tau \equiv \chi(c_1, \ldots, c_4) = 0 \, , \qquad (12.5)$$

worin χ eine *willkürliche* Funktion von $c_1, \ldots, c_4$ darstellt.

Jede nichtsinguläre invariante Gleichung kann demnach aus invarianten Funktionen gebildet werden. Es genügt, die *homogene Gleichung* (12.4) zu integrieren.

Wir betrachten diese Ausführungen an einem Beispiel. Die Schar

$$\begin{cases} \xi = x + q \lg a\,, \\ \eta_2 = a y_2 + pa \lg a\,, \\ \eta_1 = a y_1 + pq a \lg a\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi = ap\,, \\ \varkappa = q\,. \end{cases} \tag{12.6}$$

ist eine eingliedrige Gruppe in x, y_2, y_1, p, q und läßt die Pfaffsche Gleichung $dy_1 - q dy_2 - p dx = 0$ invariant, stellt also eine *räumliche B-Gruppe* dar.

Die Funktionen des Gleichungssystems (10.3) lauten

$$X^* = \varkappa\,, \quad Y_2^* = \eta_2 + \pi\,, \quad Y_1^* = \eta_1 + \pi\varkappa\,, \quad P^* = \pi\,, \quad Q^* = 0\,,$$

mit der charakteristischen Funktion $W^* = \pi\varkappa + \eta_2\varkappa - \eta_1$. Unter den Gleichungen

$$\varkappa = 0\,, \qquad \eta_2 + \pi = 0\,, \qquad \eta_1 + \pi\varkappa = 0\,, \qquad \pi = 0$$

befinden sich die unabhängigen *invarianten Gleichungen* $\varkappa = 0$ *und* $\pi = 0$ *als singuläre Lösungen.*

Die Integration der homogenen Gleichung (12.4) führt auf die folgenden Integrale:

$$\varkappa = c_1\,, \quad \xi - \varkappa \lg \pi = c_2\,, \quad \xi - \varkappa \frac{\eta_2}{\pi} = c_3\,, \quad \xi - \frac{\eta_1}{\pi} = c_4\,.$$

Jede weitere invariante Gleichung steckt daher in der Formel

$$\chi\left(\varkappa\,, \quad \xi - \varkappa \lg \pi\,, \quad \xi - \varkappa \frac{\eta_2}{\pi}\,, \quad \xi - \frac{\eta_1}{\pi}\right) = 0\,.$$

Die singuläre Lösung $\varkappa = 0$ steckt in $\varkappa = c_1$, die zweite singuläre Lösung $\pi = 0$ ist hingegen in der allgemeinen Lösung nicht enthalten.

Diese Lösung $p = 0$ führt auf die L-Gruppe

$$\xi = x + q \lg a, \quad \eta_2 = a y_2, \quad \eta_1 = a y_1, \quad \varkappa = q\,; \qquad (W = \eta_2\varkappa - \eta_1)$$

mit der invarianten Gleichung $dy_1 - q dy_2 = 0$. Wir haben $q = \frac{p_1}{p_2}$ zu setzen und finden somit die R-Gruppe unseres früheren Beispiels 1.[30])

---

[30]) Dies ist natürlich kein Zufall. Bei der Aufstellung der B-Gruppe (12.6) wurde nämlich der Satz X (I) mit $S \equiv 0$ auf die $R(L)$-Gruppe $U = \eta_2\varkappa - \eta_1$; $X = \varkappa$; $f \equiv 0$ des Beispiels 1 (§ 8) angewendet.

Verkürzen wir die B-Gruppe dagegen mit $q = 1$, so bekommen wir die L-Gruppe

$$\begin{aligned} \xi &= x + \lg a, & \eta_1 &= a y_1 + pa \lg a, \\ \eta_2 &= a y_2 + pa \lg a, & \pi &= ap; \end{aligned} \qquad (W = \pi + \eta_2 - \eta_1)$$

mit der invarianten Gleichung $dy_1 - dy_2 - pdx = 0$. Wir haben $p = p_1 - p_2$ zu setzen und erhalten so eine R-Gruppe des Falles II.

Weitere R-Gruppen des Falles I erhalten wir aus den Integralen c_2, c_3, c_4; z. B. durch Nullsetzen:

$$c_3 = 0: \quad \underline{p = \frac{q y_2}{x}}, \quad p_1 - q p_2 - \frac{q y_2}{x} = 0, \quad \underline{q = \frac{x p_1}{x p_2 + y_2}};$$

$$c_4 = 0: \quad \underline{p = \frac{y_1}{x}}, \quad p_1 - q p_2 - \frac{y_1}{x} = 0, \quad \underline{q = \frac{x p_1 - y_1}{x p_2}}.$$

usw.

Es lassen sich demnach schon von *einer B-Gruppe* im allgemeinen *unzählig viele R-Gruppen* herleiten.

LITERATUR

A. Ostrowski (I), Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions. I. Comm. Math. Helv., vol. 13, fasc. 3, pp. 156—194.

A. Ostrowski (II), Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions. II. Comm. Math. Helv., vol. 14, fasc. 1, pp. 23—60.

Lie-Engel (I), Theorie der Transformationsgruppen. Bd. I (Teubner, Leipzig 1888).

Lie-Engel (II), Theorie der Transformationsgruppen. Bd. II (Teubner, Leipzig 1890).

Fr. Engel (I). Die infinitesimalen Transformationen einer Pfaffschen Gleichung. Berichte Verh. Akad. d. Wiss., Leipzig, Math.-Phys. Kl. 1899, pp. 296—315.

In unseren Zitaten von Literaturstellen benützen wir die obigen ()-Nummern an Stelle der Werktitel.

(Eingegangen den 5. Juni 1945.)