Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers.
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16896

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers

Von H. HADWIGER, Bern

K. Borsuk hat die Vermutung ausgesprochen[1]), daß jede beschränkte Menge des n-dimensionalen Euklidischen Raumes durch $n+1$ Mengen von kleinerem Durchmesser überdeckt werden könne[2]). Daß n Mengen zu einer Überdeckung solcher Art nicht immer ausreichen, lehrt bereits die Menge, die aus den $n+1$ Eckpunkten eines n-dimensionalen regulären Simplex besteht. Auch die n-dimensionale Vollkugel kann nicht durch n Mengen kleineren Durchmessers überdeckt werden; nach dem *Borsuk*-schen Antipodensatz enthält ja wenigstens eine der als abgeschlossen annehmbaren überdeckenden Mengen ein antipodisches Punktepaar, so daß von den n Überdeckungsmengen wenigstens eine den nämlichen Durchmesser wie die Vollkugel aufweist[3]).

In dieser Note soll ein einfacher Beweis der oben zitierten Vermutung mitgeteilt werden. Genauer beweisen wir den folgenden

Satz: *Eine Menge A des n-dimensionalen Euklidischen Raumes vom Durchmesser $D(A)=1$ kann stets durch $n+1$ Mengen $A_i (i=0,1,\ldots,n)$ der Durchmesser $D(A_i)<1$ überdeckt werden*[4]).

Beweis: Nach einem bekannten Satz[5]) ist A Teilmenge eines n-dimensionalen Körpers K konstanter Breite $D=1$. Es genügt also, den Satz für einen solchen Körper K zu beweisen. Ist K eine Kugel vom Durch-

---

[1]) *K. Borsuk*, Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre. Fundam. Math. XX (1933), 177—190.

[2]) Diese Mitteilung, sowie die Anregung zu dieser Studie überhaupt, verdanke ich Herrn *H. Hopf* (Zürich).

[3]) *K. Borsuk*, Über die Zerlegung einer Euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich 1932, II. Bd. 192.

[4]) In einem demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinenden Aufsatz (Über die Zerstückung eines Eikörpers) habe ich den Satz für Eikörper (mit regulärem Rand) bewiesen. Bezeichnet r den inneren Rollradius der Randfläche, so ergibt sich die Aussage des Satzes in der verschärften Form:

$$D(A_i) \leqq 1 - 2r\left\{1 - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right\}. \quad \text{Z. B. } n=2,\ A=\text{Kreis},\ r=\tfrac{1}{2},\ D(A_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[5]) *T. Bonnesen* und *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Bd., Berlin 1934, S. 130.

messer $D = 1$, so ist der Satz trivial[6]). Wir können uns auf eine Nichtkugel K beschränken.

Wir betrachten nun die Umkugelfläche R des Körpers K vom Radius r. Bekanntlich gilt

$$r \leqq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} < \sqrt{\frac{1}{2}}\,. \tag{1}$$

Die Menge RK der Randpunkte von K, die zu R gehören, enthält $n + 1$ Punkte, die nicht in einer abgeschlossenen Hälfte (Halbkugelschale) von R liegen[7]), so daß der Mittelpunkt M von R innerer Punkt des von den erwähnten $n + 1$ Punkten aufgespannten n-dimensionalen Simplex S ist.

Es sei nun P ein von M verschiedener Punkt von K. Die P mit M verbindende Gerade hat mit dem Rand von S zwei Punkte gemeinsam; P_0 sei nun derjenige von diesen beiden Punkten, der auf der entgegengesetzten Seite von M liegt wie P, so daß also M innerer Punkt der Strecke PP_0 ist. — Der Rand von S ist weiter überdeckt durch $n + 1$ abgeschlossene $(n - 1)$-dimensionale Simplexe $S_i (i = 0, 1, \ldots, n)$. Da die Eckpunkte der S_i nach Konstruktion zu K gehören, gilt für ihre Durchmesser

$$D(S_i) \leqq 1\,. \tag{2}$$

Die Menge $A_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ enthalte nun M und außerdem alle von M verschiedenen Punkte P von K, für welche P_0 zum Randsimplex S_i gehört. Offenbar ist K durch die $n + 1$ abgeschlossenen Mengen A_i überdeckt. — Wir wählen jetzt zwei von M verschiedene Punkte P und Q von A_i; P_0 und Q_0 liegen also in S_i. Es bezeichne $d = PQ$, $p = MP$, $q = MQ$, $p_0 = MP_0$, $q_0 = MQ_0$. Es darf

$$q \leqq p \leqq r \tag{3}$$

angenommen werden.

Weiter führen wir den Winkel $\omega = P\hat{M}Q = P_0\hat{M}Q_0$ ein, und es bezeichne $\overline{\omega}$ den größten Wert, den ω annehmen kann. Offenbar kann dieser maximale Winkel $\overline{\omega}$ durch die Punkte P und Q nur realisiert

---

[6]) Die Kugel vom Durchmesser 1 kann überdeckt werden durch $n + 1$ Simplexsektoren der Durchmesser

$$D = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\,, \text{ wenn } n \text{ gerade,} \qquad D = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n+3}}}\,, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist.}$$

[7]) Das unter [5]) zitierte Werk S. 127—128.

werden, wenn P_0 und Q_0 zwei Eckpunkte von S_i darstellen, die den Durchmesser von S_i liefern. In diesem Falle ist $p_0 = q_0 = r$, so daß die Beziehung

$$r\sqrt{2(1-\cos\bar{\omega})} = D(S_i) \leqq 1 \tag{4}$$

gilt. Für die Distanz d gilt allgemein

$$d = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cos\omega}\ . \tag{5}$$

Ist nun $0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{3}$, so ist im Hinblick auf (3) und (5) zunächst $d \leqq p \leqq r$, und wegen (1) also $d < 1$.

Es sei weiter $\frac{\pi}{3} < \omega < \pi$; dann ist wieder mit Rücksicht auf (3) und (5) zunächst

$d \leqq p\sqrt{2(1-\cos\omega)}$. Wenn nun $\omega < \bar{\omega}$ gilt, so ist also

$d < p\sqrt{2(1-\cos\bar{\omega})}$ und wegen (3) und (4) also $d < 1$.

Wenn aber $\omega = \bar{\omega}$ gilt, so muß sicher in Verschärfung von (3) $p < r$ sein. Denn $p = r$ würde bedeuten, daß P zu KR gehört; das gleiche würde aber auch für P_0 (wie oben erwähnt, muß im vorliegenden Fall P_0 ein Eckpunkt von S_i sein!) gelten, so daß $PP_0 = 2r \leqq 1$ sein müßte; dies könnte nur für den bei unserm Beweis vorweggenommenen Fall, wo K eine Kugel vom Durchmesser 1 ist, zutreffen. Es wird somit $d < r\sqrt{2(1-\cos\bar{\omega})}$, oder wegen (4) wieder $d < 1$ sein.

In allen möglichen Fällen hat sich also für zwei von M verschiedene Punkte von A_i, $d < 1$ ergeben. Da M ein innerer Punkt von K ist, wird endlich für jeden Punkt P von A_i auch $PM < 1$ ausfallen. Da nun A_i abgeschlossen ist, muß somit $D(A_i) < 1$ gelten. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

(Eingegangen den 24. Mai 1945.)