Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereiche

Von H. Hadwiger, Bern

Die klassischen, nach *J. Steiner*[1]) benannten Formeln für Flächeninhalt und Umfang äußerer und innerer Parallelbereiche ebener konvexer Bereiche gelten innerhalb passender Grenzen auch für Parallelbereiche *nicht* konvexer Bereiche, falls diese gewissen gestaltlichen Voraussetzungen genügen[2]). Das einläßliche Studium der Frage nach der erweiterten Gültigkeit der Steinerschen Formeln zeigt, daß der Begriff der gewöhnlichen *Konvexität* nicht sehr geeignet ist, bei der Bildung der äußeren und inneren Parallelmengen eine ausschlaggebende Rolle zu spielen. Daß bei der Berücksichtigung nur konvexer Bereiche eine auffallende Einseitigkeit herrscht, wird durch die Tatsache erhellt, daß die Steinerschen Formeln für die äußeren Parallelbereiche unbeschränkt gelten, während ihre Brauchbarkeit für die inneren Parallelbereiche an Einschränkungen gebunden ist, die wesentlich von der Gestalt der Bereiche abhängen.

Es stellt sich bald heraus, daß die Abklärung der erwähnten gestaltlichen Bedingungen sehr eng verwandt ist mit der Lösung der Frage nach der erweiterten Gültigkeit der Steinerschen Formeln für bedeutend allgemeinere Mengen. Welche Voraussetzung hat nun bei einer solchen Erweiterung an die Stelle der Konvexität zu treten?

Hier bietet sich die Gelegenheit, die *Unterkonvexität* und die *Überkonvexität* einzuführen, und es soll das hauptsächlichste Ziel dieser Abhandlung sein, die Bedeutung dieser Begriffe im Rahmen des erörterten Fragenkreises darzulegen. Mit ihrer Hilfe gelingt es, die Gültigkeitsfrage der Steinerschen Formeln für äußere *und* innere Parallelmengen von Mengen sehr allgemeiner Gestalt (beliebig mehrfach zusammenhängend und aus verschiedenen Teilen bestehend) in einheitlicher Weise abzuklären.

Die Begriffe *Parallelkurve* und *Parallelbereich* treten in der geometrischen Literatur in verschiedenen Formen auf. Je nach den Voraussetzungen über das Ausgangsgebilde ist die eine oder die andere Definition möglich. Bei Bereichen mit regulären Randkurven können beispielsweise

---

[1]) *J. Steiner*, Über parallele Flächen, Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1840, 114—118 = Werke 2, 1882, 171—176. Es handelt sich hierbei um die entsprechenden Formeln der räumlichen Geometrie.

[2]) Leicht überblickbar und instruktiv sind die Verhältnisse etwa bei einem (nicht notwendig konzentrischen) Kreisring.

die „differentialgeometrischen Parallelkurven" erklärt werden; bei konvexen Bereichen ist es vorteilhaft, die mit Hilfe der Stützfunktion definierten inneren und äußeren Parallelbereiche im Sinne von *T. Kaluza* einzuführen. *G. Bol* hat in verschiedenen Abhandlungen die hohe methodische Bedeutung dieser Parallelbildungen nachgewiesen[3]).

Indem wir auf eine klassische *Cantor-Minkowski*sche Konstruktion[4]) zurückgreifen, gewinnen wir eine Definition der äußeren und inneren *Parallelmenge*, die sich von jeder Voraussetzung über die Urmenge frei hält, und so grundsätzlich auf jede beliebige Punktmenge angewendet werden kann.

Es ist für die von uns einzuschlagende Methode kennzeichnend, daß sich die Lösung des entwickelten Problems für die zweidimensionale Sphäre (Kugeloberfläche) in begrifflicher Beziehung treffender verwirklichen läßt, als dies für die Ebene der Fall ist. Maßgebend hierfür sind die nämlichen Gründe, die eine *Bernstein*sche Lösung[5]) des isoperimetrischen Problems auf der Kugeloberfläche ermöglichten, welche in der Ebene ihr Analogon nicht finden kann.

Gewisse methodische Kunstgriffe, die auf einem auf der Sphäre geltenden Antipodismus oder Dualismus beruhen, sind in der ebenen Geometrie nicht vorhanden. Die Endlichkeit und Geschlossenheit der Sphäre verleiht vielen Beziehungen eine Vollständigkeit, die im „Entartungsfall" der Ebene verloren geht.

Wir nehmen aus den soeben genannten Gründen eine geringfügige Belastung in technischer Beziehung in Kauf und entwickeln das Problem und seine Lösung vollständig für die Sphäre. Es ist selbstverständlich, daß damit auch der Fall der Ebene als Grenzfall eingeschlossen ist.

Bezeichnungen

Es ist zweckmäßig, einige für die gesamte Arbeit gültige Bezeichnungen zusammenzustellen:

S = Sphäre (Kugeloberfläche) vom Radius R,
E = Ebene,

---

[3]) *G. Bol*, Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen, Jahresbericht der D. M. V. 51, 1941, 219—257; Einfache Isoperimetriebeweise für Kreis und Kugel bzw. Beweis einer Vermutung von H. Minkowski, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, 15, 1943, 27—36 bzw. 37—56.

[4]) *H. Minkowski*, Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen, Jahresbericht der D. M. V 9, 1901, 115—121.

[5]) *F. Bernstein*, Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene, Math. Ann. 60, 117—136.

A = Punktmenge in S oder in E; $\overline{A}$ = abgeschlossene Hülle und A^* = komplementäre Menge von A,

F und L = Flächeninhalt und Randlänge eines Bereiches A,

n = Anzahl der getrennten Teile eines (nicht zusammenhängenden) Bereiches A,

m = Anzahl der Randkontinua eines Bereiches A,

$*$ = ein bei einem sich auf eine Menge A beziehenden Symbol angebrachter Stern bezeichnet den Übergang zu dem sich auf die komplementäre Menge A^* beziehenden Symbol

$\alpha, \beta, \Delta, \varrho, \sigma$ = sphärische oder euklidische Distanzen und Kreisradien in S oder E,

K_ϱ = abgeschlossener Kreisbereich vom Radius ϱ. Wenn der Mittelpunkt M des Kreises in der Bezeichnung hervortreten muß, schreiben wir $K_\varrho(M)$,

A_ϱ bzw. $A_{-\varrho}$ = äußere bzw. innere Parallelmenge (im Abstand ϱ) der Menge A,

$F(\varrho)$ und $L(\varrho)$ bzw. $F(-\varrho)$ und $L(-\varrho)$ = Flächeninhalt und Randlänge des äußeren bzw. inneren Parallelbereiches von A.

1. Parallelmengen sphärischer Mengen

Jede beliebige Menge A der Sphäre S gestattet die nachfolgende

Definition I. *Unter der äußeren Parallelmenge A_ϱ einer Menge A verstehen wir die Vereinigungsmenge aller Kreise K_ϱ, deren Mittelpunkte in A liegen. — Unter der inneren Parallelmenge $A_{-\varrho}$ verstehen wir die Menge $((A^*)_\varrho)^*$, d. h. die Komplementärmenge der entsprechenden äußeren Parallelmenge der Komplementärmenge.*

Da wir voraussetzen, daß die K_ϱ abgeschlossene Kreisbereiche sind, ist A_ϱ bzw. $A_{-\varrho}$ abgeschlossen (offen), falls das gleiche für A zutrifft. — Für jede Menge ist offenbar $A_0 = A$. Ist $A = 0$, so soll auch $A_\varrho = A_{-\varrho} = 0$ sein.

2. Unter- und Überkonvexität sphärischer Mengen

Die Definition der erweiterten Konvexitätsbegriffe die wir einführen wollen, basiert wesentlich auf der Gültigkeit eines Satzes topologischer Natur, den wir vorausschicken müssen, wenn die Brauchbarkeit der nachfolgenden Definition erkannt werden soll.

Satz I. *Zu einer abgeschlossenen Menge A der Sphäre vom Radius R gibt es eine Zahl α, $0 \leqq \alpha \leqq \pi R$, so daß der Durchschnitt AK_ϱ von A mit jedem Kreis K_ϱ vom Radius $0 \leqq \varrho < \alpha$ einfach zusammenhängend ist; dagegen trifft dies für kein $\varrho > \alpha$ für alle K_ϱ zu.*

Auf diesen Sachverhalt, den wir später zusammen mit den andern nachfolgend formulierten Sätzen beweisen, gründen wir die

Definition II. *Ist α die der abgeschlossenen Menge A auf Grund von Satz I zukommende Zahl, so heißt A unterkonvex vom Grade α. Ferner heißt A überkonvex vom Grade α, wenn die abgeschlossene Hülle $\overline{A}^*$ der Komplementärmenge A^* unterkonvex vom Grade α ist.*

Formale Gründe legen es nahe, die leere Menge 0 sowie die gesamte Sphäre S als unterkonvex und überkonvex vom Grade πR anzunehmen.
Ein erster Sachverhalt, der die enge Anpassung der oben eingeführten Konvexitätsbegriffe an den mit den Parallelbildungen in Zusammenhang stehenden Fragenkreis andeutet, wird durch den folgenden Satz aufgedeckt:

Satz II. *Die abgeschlossene Menge A sei unterkonvex vom Grade α und es sei $0 \leqq \varrho \leqq \alpha$; die äußere Parallelmenge A_ϱ ist dann unterkonvex vom Grade $\alpha - \varrho$.*

Es ist klar, daß jedem Satz dieser Art über unterkonvexe Mengen ein entsprechender Satz über überkonvexe Mengen als Korollar an die Seite gestellt werden kann. Wegen der einfachen Wechselbeziehung genügt es durchaus, nur die Unterkonvexität eingehender zu studieren.

3. Die erweiterten Steinerschen Formeln für sphärische Bereiche

Die ausschlaggebende Bedeutung der oben eingeführten erweiterten Konvexitätsbegriffe kann erst in Verbindung mit dem Problem der erweiterten Gültigkeit der Steinerschen Formeln in vollem Umfang erkannt werden. Unterkonvexität und Überkonvexität erscheinen hier als charakteristische Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln für erheblich allgemeinere Mengen. Die gewöhnliche Konvexität, die in der Sphärik übrigens in verschiedener Beziehung nicht eine überzeugende Rolle spielt, tritt vollständig in den Hintergrund.
Es sei A ein abgeschlossener echter Teilbereich von S. Unter einem Bereich wollen wir hier die abgeschlossene Hülle eines Gebietes verstehen. A möge aus n getrennten Teilen bestehen; die einzelnen Teile können mehrfach zusammenhängend sein. Die Anzahl der streckbaren Rand-

kontinua sei m. F bezeichne den gesamten Flächeninhalt und L die totale Randlänge von A. Die entsprechenden Maßzahlen für den äußeren bzw. inneren Parallelbereich A_ϱ bzw. $A_{-\varrho}$ seien $F(\varrho)$ und $L(\varrho)$ bzw. $F(-\varrho)$ und $L(-\varrho)$.

Es gilt dann der folgende

Satz III. *Ist der Bereich A unterkonvex vom Grade α und überkonvex vom Grade β, so ist im Intervall* $-\beta \leqq \varrho \leqq \alpha$

$$F(\varrho) = F \cos \frac{\varrho}{R} + LR \sin \frac{\varrho}{R} + (4n - 2m)\, \pi R^2 \left(1 - \cos \frac{\varrho}{R}\right) .$$

$$L(\varrho) = -\frac{F}{R} \sin \frac{\varrho}{R} + L \cos \frac{\varrho}{R} + (4n - 2m)\, \pi R \sin \frac{\varrho}{R} .$$

Es ist vorteilhaft die Formeln von Satz III in der folgenden Gestalt zu schreiben:

$$F(\varrho) - (4n - 2m)\, \pi R^2 = [F - (4n - 2m)\, \pi R^2] \cos \frac{\varrho}{R} + RL \sin \frac{\varrho}{R}$$

$$RL(\varrho) = -[F-(4n-2m)\, \pi R^2] \sin \frac{\varrho}{R} + RL \cos \frac{\varrho}{R} .$$

Damit wird offensichtlich, daß sich die Änderung des Wertepaares

$$F - (4n - 2m)\, \pi R^2,\ RL$$

beim Übergang zu den Parallelmengen als orthogonale Transformation deuten läßt. Hieraus folgern wir, daß der Ausdruck

$$J = (F - (4n - 2m)\, \pi R^2)^2 + (RL)^2$$

eine *Parallelinvariante* ist, d. h. ein Wert, der sich innerhalb des Geltungsbereiches der Steinerschen Formeln nicht ändert.

Eine beachtenswerte Eigenschaft der oben gebildeten Invarianten ergibt sich, wenn man den dem Bereiche A komplementär entsprechenden Bereich $\bar{A}^*$ betrachtet.

Im Hinblick auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} F^* &= 4\pi R^2 - F , \\ L^* &= L , \\ n^* &= 1 + m - n , \\ m^* &= m \end{aligned}$$

verifiziert man leicht, daß

$$F^* - (4n^* - 2m^*)\,\pi R^2 = (4n - 2m)\,\pi R^2 - F\,,$$

so daß sich die Übereinstimmung

$$J^* = J$$

der beiden einander komplementär zugeordneten Invarianten ergibt.

4. Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene Bereiche

Um bei der Übertragung unserer Resultate auf den wichtigen Fall der Ebene eine gewisse Vollständigkeit anzustreben, wiederholen wir die grundlegenden Definitionen:

Definition I°. *Unter der äußeren Parallelmenge A_ϱ einer beliebigen ebenen Menge A verstehen wir die Vereinigungsmenge aller Kreise K_ϱ, deren Mittelpunkte in A liegen. Unter der inneren Parallelmenge $A_{-\varrho}$ verstehen wir die Menge $((A^*)_\varrho)^*$, d. h. die Komplementärmenge der entsprechenden äußeren Parallelmenge der Komplementärmenge.*

Definition II°. *Eine abgeschlossene ebene Menge A heißt unterkonvex vom Grade α, wenn der Durchschnitt $A \cdot K_\varrho$ von A mit jedem Kreis K_ϱ vom Radius $\varrho < \alpha$ einfach zusammenhängend ist; dagegen treffe dies für kein $\varrho > \alpha$ für jeden Kreis K_ϱ zu. A heißt überkonvex vom Grade α, wenn die abgeschlossene Hülle $\overline{A}^*$ der Komplementärmenge A^* unterkonvex vom Grade α ist.*

Der Zusammenhang der so definierten erweiterten Konvexität mit der gewöhnlichen Konvexität wird durch den nachfolgenden Satz hergestellt, dessen Beweis wir dem Leser leicht überlassen können, da er nur der Vollständigkeit wegen erwähnt und nirgends gebraucht wird:

Satz IV. *Eine abgeschlossene ebene Menge A ist dann und nur dann konvex, wenn der Durchschnitt $A \cdot K_\varrho$ von A mit jedem Kreis K_ϱ mit beliebigem Radius ϱ einfach zusammenhängend ist.*

Dieser Satz legt es nahe, eine konvexe Menge als unterkonvex vom Grade ∞ anzusehen; sinngemäß ist die Definition II° zu ergänzen.

Es sei nun A ein abgeschlossener beschränkter Bereich, d. h. die abgeschlossene Hülle eines beschränkten ebenen Gebietes. A möge aus n getrennten Teilen bestehen; die einzelnen Teile können mehrfach zusammenhängend sein. Die Anzahl der streckbaren Randkontinua sei m. Es bezeichne F den gesamten Flächeninhalt und L die totale Randlänge von A. Über Flächeninhalt $F(\varrho)$ und Randlänge $L(\varrho)$ der äußeren und inneren Parallelbereiche A_ϱ gilt dann der folgende

Satz III°. *Ist der Bereich A unterkonvex vom Grade α und überkonvex vom Grade β, so gelten im Intervall* $-\beta \leqq \varrho \leqq \alpha$ *die Formeln*

$$F(\varrho) = F + L\varrho + (2n - m)\pi\varrho^2 ,$$
$$L(\varrho) = L + (4n - 2m)\pi\varrho .$$

Die Formeln von Satz III° enthalten die klassischen Formeln von *Jakob Steiner* als Spezialfälle. Ist nämlich A konvex, so ist notwendigerweise $n = m = 1$. Für die äußeren Parallelbereiche, d. h. für das Intervall $0 \leqq \varrho < \infty$ gelten dann die bekannten Beziehungen

$$F(\varrho) = F + L\varrho + \pi\varrho^2 ,$$
$$L(\varrho) = L + 2\pi\varrho .$$

Die Formeln von Satz III° lassen sich aus denjenigen von Satz III mühelos durch die geläufigen Grenzübergänge $R \to \infty$ gewinnen.

Bezeichnet J die weiter oben abgeleitete sphärische Parallelinvariante, so läßt sich durch Grenzübergang dann eine für die Ebene brauchbare Parallelinvariante gewinnen, wenn man den ungeformten ebenfalls parallelinvarianten Ausdruck

$$\frac{J - (4n - 2m)^2 \pi^2 R^4}{R^2} = L^2 - (8n - 4m)\pi F + \frac{F^2}{R^2}$$

betrachtet. Für $R \to \infty$ gewinnt man die ebene *Parallelinvariante*

$$L^2 - (8n - 4m)\pi F ,$$

die für $n = m = 1$ mit dem bekannten *Isoperimetrischen Defizit* identisch ist.

5. Hilfssätze topologischer Art

Wir beweisen zunächst einige einfache metrisch-topologische Hilfssätze, die innerhalb der Theorie der Parallelmengen selbständiges Interesse verdienen können. Die Aussagen beziehen sich auf die Sphäre.

1. Hilfssatz. *Ist G ein nicht kreisförmiges einfach zusammenhängendes Gebiet, so gibt es zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ im äußeren Parallelgebiet G_ε stets einen Kreis K_ϱ, so daß der Durchschnitt $\overline{G^*K_\varrho}$ nicht zusammenhängend ist.*

Beweis. Es gibt zunächst sicher einen $K_\sigma \epsilon \overline{G}$ so, daß $\overline{G}^* K_\sigma$ wenigstens drei Punkte enthält. Es kann angenommen werden, daß diese drei Punkte auf einem Bogen des Kreisrandes von K_σ liegen, der ganz zu $\overline{G}^*$ gehört, da andernfalls der Hilfssatz bewiesen ist. Da G nach Voraussetzung nicht kreisförmig ist, besitzt dieser Bogen zwei Endpunkte P und Q, $P \neq Q$. Es bezeichne M die Bogenmitte und N den zu M diametralen Gegenpunkt auf dem Kreisrand von K_σ. N hat von $\overline{G}^*$ einen positiven Abstand, da sonst der Hilfssatz wieder bewiesen wäre. Offenbar läßt sich nun ein ganz in G_ε liegender Kreis K_ϱ finden, dessen Rand durch P und Q hindurchläuft und die Gerade MN in den Punkten M' und N' so schneidet, daß der Durchmesser $M'N'$ ganz in G liegt. Der Durchschnitt $\overline{G}^* K_\varrho$ kann nicht zusammenhängend sein.

2. Hilfssatz. *Wenn das Komplementärgebiet A_λ^* der äußeren Parallelmenge A_λ einer abgeschlossenen Menge A ein Kreisgebiet G vom Radius ϱ aufweist, so enthält das Gebiet A^* ein konzentrisches Kreisgebiet G^0 vom Radius $\varrho + \lambda$.*

Beweis. Ein Randpunkt P des Kreisgebietes G gehört zu A_λ; das Innere des Kreises $K_\lambda(P)$ gehört sicher zu A^*. Andererseits muß auf dem Rand von $K_\lambda(P)$ mindestens ein Punkt P^0 von A liegen. P^0 kann nur der Berührungspunkt des $K_\lambda(P)$ mit der äußern Enveloppe aller $K_\lambda(P)$ sein, wo P auf dem Kreisrand von G variiert. Alle P^0 liefern den Rand des mit G konzentrischen Kreisgebietes G^0 vom Radius $\varrho + \lambda$ das zu A^* gehört.

3. Hilfssatz. *Hat die abgeschlossene Menge A mit jedem Kreis K_ϱ vom festen Radius ϱ einen einfach zusammenhängenden Durchschnitt $A K_\varrho$, so hat sie auch mit jedem Kreis K_σ, $\sigma < \varrho$, einen einfach zusammenhängenden Durchschnitt $A K_\sigma$.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil der Behauptung an. Es gibt dann einen $K_\sigma(M)$, $\sigma < \varrho$, so daß $D = A \cdot K_\sigma$ nicht einfach zusammenhängend ist. Für den Fall, daß D mehrfach zusammenhängend ist, oder einen ganz im Innern von K_σ liegenden, mit dem übrigen Durchschnitt nicht zusammenhängenden Teil enthält, genügt es, einen $K_\varrho(M)$ zu betrachten, der dann im Widerspruch zur Voraussetzung mit A ebenfalls keinen einfach zusammenhängenden Durchschnitt aufweist. Man darf also folgendes annehmen:

1. $D = D_1 + D_2$, $D_1 D_2 = 0$; D_1, D_2 abgeschlossen.
2. Es gibt zwei Randpunkte von $K_\sigma : P_1 \epsilon D_1$; $P_2 \epsilon D_2$.
3. Der Rand von K_σ werde durch die beiden Punkte P_1 und P_2 in die

beiden Kreisbögen C_1 und C_2 zerlegt. Es gibt zwei Punkte $Q_1 \in C_1 D^*$, $Q_2 \in C_2 D^*$ die durch ein ganz in $D^* K_\sigma$ verlaufendes Polygon verbunden werden können.

Wir betrachten nun einen Kreis $K_\varrho(N)$, der die beiden Punkte P_1 und P_2 im Innern enthält. Die Menge aller Mittelpunkte N ist eine offene zusammenhängende Menge T (Überdeckungsgebiet zweier Kreisgebiete). Der Durchschnitt $A K_\varrho(N)$ ist nach Voraussetzung einfach zusammenhängend. Wenn wir die Punkte P_1 und P_2 durch einen Hauptkreisbogen S, der innerhalb von K_σ verlaufen soll, verbinden, so zerfällt das Komplementärgebiet von $A K_\varrho(N) + S$ in zwei getrennte einfach zusammenhängende Gebiete, wobei die Punkte Q_1 und Q_2 in verschiedenen Gebieten liegen müssen. Da auch der zu N antipodische Punkt N^0 in einem dieser beiden Gebiete liegen muß (N^0 kann nicht zu K_ϱ und nicht zu S gehören!), ist nun N^0 entweder mit Q_1 oder mit Q_2 im gleichen zusammenhängenden Gebiet. T_1 bezeichne die Menge der Mittelpunkte N im ersten Fall, T_2 die analoge Menge im zweiten Fall. Wie man leicht verifiziert, sind T_1 und T_2 offen und selbstverständlich fremd.

Im Hinblick auf die gegenseitige Lage der Punkte P_1, P_2, Q_1, Q_2 auf dem Rand von K_σ kann der Kreis K_ϱ so gelegt werden, daß er P_1 und P_2 im Innern, aber nach Belieben entweder Q_1 oder Q_2 nicht enthält. Der im Komplementärgebiet K_ϱ^* liegende Punkt Q befindet sich offenbar mit N^0 im gleichen zusammenhängenden Gebiet der weiter oben betrachteten Art. Damit ist erwiesen, daß von den beiden eingeführten Mengen T_1 und T_2 keine leer ist.

Nun gilt aber $T = T_1 + T_2$, d. h. das Gebiet T ist zerlegt in zwei fremde, offene und nicht leere Teile T_1 und T_2! Damit ist erneut ein Widerspruch erzielt.

4. Hilfssatz. *Hat die abgeschlossene Menge A mit jedem Kreis K_ϱ von festem Radius ϱ einen einfach zusammenhängenden Durchschnitt $A K_\varrho$, so ist für $0 < \lambda < \varrho$ auch $A_\lambda K_{\varrho-\lambda}$ stets einfach zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $U = A K_\varrho(M)$ und $V = A_\lambda K_{\varrho-\lambda}(M)$. Es sei zunächst V nicht zusammenhängend, also $V = V_1 + V_2$, $V_1 V_2 = 0$. Es sei $P \in U$ und $W(P) = K_\lambda(P) K_{\varrho-\lambda}(M)$. Im Hinblick auf $K_\lambda(P) \in A_\lambda$ gilt offenbar $W(P) \in V$. Da nun $W(P)$ zusammenhängend und nicht leer ist, gilt für jeden Punkt P entweder $W(P) \in V_1$ oder $W(P) \in V_2$. Gilt das erstere, so soll $P \in U_1$ und gilt das letztere, so soll $P \in U_2$ sein, so daß also $U = U_1 + U_2$ ist. Da aber die Teile U_1 und U_2 abgeschlossen, fremd und nicht leer sind, ergibt sich ein Widerspruch mit der Voraussetzung, wonach U zusammenhängend sein soll. Es ist also V zusammenhängend. Wir nehmen nun weiter an, daß V mehrfach zusammenhängend ist. V^* und somit auch A_λ^* enthalte ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \epsilon K_{\varrho-\lambda}$. Ist nun G nicht kreisförmig, so gibt es nach dem 1. Hilfssatz ein σ, $0 < \sigma < \varrho - \lambda$ so, daß der Durchschnitt $K_\sigma A_\lambda$ nicht zusammenhängend ist. Nach dem 3. Hilfssatz ist auch $A \cdot K_{\varrho'}$ stets einfach zusammenhängend, wo $\sigma = \varrho' - \lambda$ gesetzt wird. Nach dem weiter oben erreichten ersten Resultat beim Beweis dieses 4. Hilfssatzes aber müßte $A_\lambda K \sigma$ zusammenhängend sein. Widerspruch! Es bleibt noch der Fall übrig, wo G kreisförmig ist. A_λ^* enthält also ein Kreisgebiet vom Radius σ innerhalb $K_{\varrho-\lambda}$. Nach dem 2. Hilfssatz enthält dann A^* ein konzentrisches Kreisgebiet vom Radius $\sigma + \lambda$ das innerhalb K_σ liegt. In diesem Falle wäre aber AK_ϱ mehrfach zusammenhängend. Widerspruch!

5. Hilfssatz. *Hat die abgeschlossene Menge A mit jedem Kreis K_ϱ vom festen Radius ϱ einen einfach zusammenhängenden Durchschnitt $A K_\varrho$ und ist für ein λ, $0 < \lambda < \varrho$, auch der Durchschnitt $A_\lambda K_\varrho$ stets einfach zusammenhängend, so ist auch $AK_{\sigma+\lambda}$ stets einfach zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $U = A_\lambda K_\sigma(M)$ und $V = AK_{\sigma+\lambda}(M)$. Zunächst nehmen wir an, daß V nicht zusammenhängend sei, also $V = V_1 + V_2$, $V_1 V_2 = 0$. Es sei $P \epsilon U$ und $W(P) = AK_\lambda(P)$. Im Hinblick auf die Voraussetzung, wonach AK_ϱ stets einfach zusammenhängend ist, muß auch $W(P)$ nach dem 3. Hilfssatz einfach zusammenhängend sein. Andererseits gilt $W(P) \epsilon K_{\sigma+\lambda}$, also $W(P) \epsilon V$. Für jeden Punkt P gilt entweder $W(P) \epsilon V_1$ oder $W(P) \epsilon V_2$. Gilt das erstere, so soll $P \epsilon U_1$ und gilt das letztere, so soll $P \epsilon U_2$ sein, so daß also $U = U_1 + U_2$ ist. Da nun aber die Teile U_1 und U_2 abgeschlossen, fremd und nicht leer sind, ergibt sich so ein Widerspruch mit der Voraussetzung, wonach U zusammenhängend sein soll. Es ist also V zusammenhängend. Wir nehmen jetzt weiter an, daß V mehrfach zusammenhängend sei. V^* und somit auch A^* enthält ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \epsilon K_{\sigma+\lambda}$. Ist nun G nicht kreisförmig, so gibt es nach dem 1. Hilfssatz ein ω, $0 < \omega < \sigma$, so daß $AK_{\omega+\lambda}$ nicht zusammenhängend ist. Nach dem 3. Hilfssatz ist mit $A_\lambda K_\sigma$ auch immer $A_\lambda K_\omega$ einfach zusammenhängend. Nach dem weiter oben erreichten ersten Resultat beim Beweis dieses 5. Hilfssatzes ist aber $AK_{\omega+\lambda}$ zusammenhängend. Widerspruch! Betrachten wir noch den Fall, wo G kreisförmig ist. A^* enthält ein Kreisgebiet in $K_{\sigma+\lambda}$ dessen Radius im Hinblick auf die Voraussetzung über A größer als ϱ sein muß. Also enthält A_λ^* ein Kreisgebiet in K_σ dessen Radius größer als $\varrho - \lambda$, also positiv ist. $A_\lambda K_\sigma$ ist nicht einfach zusammenhängend. Widerspruch!

6. Hilfssatz integralgeometrischen Ursprungs

Es ist eine bekannte Tatsache, daß sich viele Formeln der klassischen Geometrie als einfache Folgerungen viel allgemeinerer Beziehungen der neuzeitlichen, hauptsächlich von *W. Blaschke* und seinen Schülern geschaffenen Integralgeometrie ergeben. Als Beispiel hierfür kann die Formel von *J. Steiner* für ebene konvexe Bereiche genannt werden, die sich als Spezialfall einer Formel von *L. A. Santaló* darstellen läßt[6]).

Auch die von uns erstrebten Erweiterungen haben ihrem formelmäßigen Gehalte nach bei der hier vorgesehenen Entwicklung einen integralgeometrischen Ursprung. Die entscheidende Schlüsselbeziehung, die in den nachfolgenden 6. Hilfssatz eingebaut ist, wird direkt aus der Hauptformel der sphärischen Integralgeometrie abgeleitet.

6. Hilfssatz. *A sei ein abgeschlossener Bereich der Sphäre S vom Radius R. Es bezeichne n die Zahl der getrennten Teile und m die Zahl der streckbaren Randkontinua von A. Ferner soll F den Flächeninhalt und L die Randlänge von A, und endlich $F(\varrho)$ den Flächeninhalt des äußeren Parallelbreiches A_ϱ bezeichnen. Wenn der Durchschnitt AK_ϱ von A mit jedem sphärischen Kreis K_ϱ vom Radius ϱ stets aus einfach zusammenhängenden Teilen besteht, so gilt die Ungleichung*

$$F(\varrho) \leqq LR \sin\frac{\varrho}{R} + F\cos\frac{\varrho}{R} + (4n - 2m)\pi R^2\left(1 - \cos\frac{\varrho}{R}\right).$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn der Durchschnitt AK_ϱ fast immer einfach zusammenhängend ist.

Beweis. Setzt man abkürzend

$$N = (4n - 2m)\pi\,,$$

so gilt für zwei Bereiche A_0 und A_1 die Hauptformel der sphärischen Integralgeometrie[7])

$$\int \overline{N}\dot{A}_0 = 2\pi\{L_0L_1 + N_0F_1 + N_1F_0 - F_0F_1\}\,.$$

Hierbei bezeichnet $\dot{A}_0$ die sphärische kinematische Dichte des auf der Sphäre S beweglichen Bereiches A_0. Ferner sei

$$\overline{N} = (4\overline{n} - 2\overline{m})\pi$$

---

[6]) *W. Blaschke*, Vorlesungen über Integralgeometrie I, Berlin und Leipzig 1936, Seite 30, Formel 180.

[7]) *W. Blaschke*, Vorlesungen über Integralgeometrie II, Berlin und Leipzig 1937, Seite 82, Formel 131.

die sich auf den Durchschnitt $A_0 A_1$ beziehende Zahl gleicher Bedeutung. Die Integration hat sich über alle A_0 zu erstrecken, welche A_1 treffen. Setzen wir nun $A_1 = A$ und $A_0 = K_\varrho$, so gelten die Beziehungen

$$F_1 = F, \quad L_1 = L, \quad N_1 = (4n - 2m)\pi ;$$

$$F_0 = 2\pi R^2\left(1 - \cos\frac{\varrho}{R}\right), \quad L_0 = 2\pi R \sin\frac{\varrho}{R}, \quad N_0 = 2\pi .$$

Im Hinblick auf die Voraussetzung über A wird $\bar{n} = \bar{m}$, und also

$$\bar{N} = 2\pi\bar{n} .$$

So ergibt sich zunächst

$$\int \bar{n}\,\dot{K}_\varrho = 2\pi\left\{LR\sin\frac{\varrho}{R} + F\cos\frac{\varrho}{R} + (4n - 2m)\,\pi R^2\left(1 - \cos\frac{\varrho}{R}\right)\right\} .$$

Andererseits ist bei Integration über alle K_ϱ die A treffen

$$\int \dot{K}_\varrho = 2\pi F(\varrho) ,$$

so daß man durch passende Subtraktion

$$\frac{1}{2\pi}\int (\bar{n} - 1)\,\dot{K}_\varrho = LR\sin\frac{\varrho}{R} + F\cos\frac{\varrho}{R} + (4n - 2m)\,\pi R^2\left(1 - \cos\frac{\varrho}{R}\right) - F(\varrho)$$

erhält. Das links stehende Integral ist offenbar nicht negativ und dann und nur dann Null, wenn fast immer (d. h. mit Ausnahme einer Lagenmenge von K_ϱ vom integralgeometrischen Maß Null) $\bar{n} = 1$ ist. Damit ist der 6. Hilfssatz bewiesen.

7. Hauptbeweise

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns recht kurz fassen:

Beweis von Satz I. Die Radien ϱ, $0 \leqq \varrho \leqq \pi R$, lassen sich in zwei Klassen a und b einteilen, je nach dem $A \cdot K_\varrho$ für jeden Kreis K_ϱ vom festen Radius ϱ einfach zusammenhängend ist oder nicht. Nach dem 3. Hilfssatz folgt aus $\varrho \in a$ ebenfalls $\varrho' \in a$, wenn $\varrho' \leqq \varrho$ ist. Die Klassen a und b bestimmen somit eine Dedekindsche Schnittzahl α, $0 \leqq \alpha \leqq \pi R$. Diese hat offenbar die in Satz I ausgesprochene Eigenschaft. (Im Falle daß b leer ist, setzt man natürlich $\alpha = \pi R$.)

Beweis von Satz II. Nach Voraussetzung hat A mit K_ϱ für $\varrho < \alpha$ stets einen einfach zusammenhängenden Durchschnitt $A K_\varrho$. Nach dem 4. Hilfssatz ist $A_\lambda K_{\varrho-\lambda}$ stets einfach zusammenhängend, also ist $A_\lambda K_\sigma$ stets einfach zusammenhängend, falls $\sigma < \alpha - \lambda$ gewählt wird; das letzte folgt noch in Verbindung mit dem 3. Hilfssatz. — Andererseits gibt es zu jedem $\varrho > \alpha$ ein K_ϱ so, daß $A K_\varrho$ nicht einfach zusammenhängt. Nach dem 5. Hilfssatz gibt es ein $K_{\varrho-\lambda}$ so, daß auch $A_\lambda K_{\varrho-\lambda}$ nicht einfach zusammenhängt. Also ist für jedes $\sigma > \alpha - \lambda$ $A_\lambda K_\sigma$ nicht stets einfach zusammenhängend. Somit ist A_λ unterkonvex vom Grade $\alpha - \lambda$, w. z. b. w.

Beweis von Satz III. Nach dem 6. Hilfssatz gilt für $0 \leqq \varrho < \alpha$

$$F(\varrho) = F \cos \frac{\varrho}{R} + L R \sin \frac{\varrho}{R} + (4n - 2m) \pi R^2 \left(1 - \cos \frac{\varrho}{R}\right) .$$

Da nach Satz II A_λ für $0 < \lambda < \alpha$ unterkonvex vom Grade $\alpha - \lambda$ ist, und da, wie elementar einzusehen, $A_\varrho = (A_\lambda)_{\varrho-\lambda}$ ist, gilt nach der soeben gemachten Feststellung

$$F(\varrho) = F(\lambda) \cos \frac{\varrho - \lambda}{R} + L(\lambda) R \sin \frac{\varrho - \lambda}{R} + (4n_\lambda - 2m_\lambda) \pi R^2 \left(1 - \cos \frac{\varrho - \lambda}{R}\right) .$$

Nun sind die Funktionen $F(\lambda)$ und $L(\lambda)$ stetig von λ abhängig, so daß im Intervall $0 \leqq \lambda < \alpha$ $4n_\lambda - 2m_\lambda$ stetig, also wegen der Ganzzahligkeit konstant sein muß. Man kann in der Formel $4n_\lambda - 2m_\lambda = 4n - 2m$ setzen und dann nach $L(\lambda)$ auflösen. So ergibt sich zunächst:

$$L(\lambda) = \frac{F(\varrho) - F(\lambda) \cos \frac{\varrho - \lambda}{R} - (4n - 2m) \pi R^2 \left(1 - \cos \frac{\varrho - \lambda}{R}\right)}{R \sin \frac{\varrho - \lambda}{R}} .$$

Setzen wir hier für die Flächeninhalte $F(\varrho)$ und $F(\lambda)$ die gültigen Formeln ein, so gewinnt man mit mehrfacher Verwendung der trigonometrischen Additionstheoreme die Darstellung

$$L(\lambda) = -\frac{F}{R} \sin \frac{\lambda}{R} + L \cos \frac{\lambda}{R} + (4n - 2m) \pi R \sin \frac{\lambda}{R} ,$$

die nach der Herleitung im Intervall $0 \leqq \lambda < \alpha$ richtig ist.

Die Gültigkeit der entsprechenden Formeln für $-\beta < \varrho \leqq 0$ folgt nun leicht auf Grund der Tatsache, daß der dem Bereiche A komplementär zugeordnete Bereich $\overline{A}^*$ unterkonvex vom Grade β ist, mit Benutzung der Formeln

$$F(-\varrho) = 4\pi R^2 - F^*(\varrho); \quad L(-\varrho) = L^*(\varrho)$$

$$n^* = 1 + m - n, \quad m^* = m.$$

Die Ausdehnung des Geltungsintervalls auf das abgeschlossene Intervall $-\beta \leqq \varrho \leqq \alpha$ ist aus Stetigkeitsgründen möglich.

(Eingegangen den 3. Mai 1945.)