Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Sur les polydromies des fonctions biharmoniques.

Autor: Soudan, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16894

Sur les polydromies des fonctions biharmoniques

Par R. SOUDAN, Genève

Le présent travail nous a été suggéré par M. le Professeur Rolin Wavre à qui nous tenons à adresser ici nos plus vifs remerciements pour son aide et ses précieux conseils.

Il s'agit de la généralisation aux fonctions polyharmoniques des résultats qu'il a publiés[1]) sur les polydromies des fonctions harmoniques.

Bien que les résultats qui vont suivre soient établis dans l'espace à trois dimensions et pour les fonctions biharmoniques, ils se généralisent sans difficulté aux fonctions polyharmoniques d'ordre p, dans l'espace euclidien à n dimensions.

§ 1. Fonction biharmonique

Soit D un domaine de frontière F analytique. Soit P un point situé hors de $D + F$ et M un point de $D + F$. Soit $\varrho(M)$ holomorphe dans $D + F$ et f_0, f_1, g_0, g_1, quatre fonctions holomorphes de M placé sur F. Soit enfin

$$v_1(M, P) = \frac{\alpha}{\overline{MP}} + \alpha_0 + \beta\overline{MP} + \gamma\overline{MP}^2$$

la fonction biharmonique élémentaire ($\alpha, \alpha_0, \beta, \gamma$ sont des constantes arbitraires) vérifiant la relation:

$$\Delta_2 v_1 = \Delta\Delta v_1 = 0 \quad \text{pour } M \neq P .$$

Il s'ensuit:

$$\Delta v_1 = \frac{2\beta}{\overline{MP}} + 6\gamma = v_0 ,$$

v_0 étant la fonction harmonique élémentaire.

Envisageons la fonction $U(P)$ définie comme suit:

$$\text{I} \quad U(P) = \int_D \varrho(M)\, v_1(M,P)\, d\tau + \sum_{i=0}^{1} \int_F \left\{ f_i(M)\, v_i(M,P) - g_i(M) \frac{d}{dn} v_i(M,P) \right\} d\sigma .$$

---

[1]) Mathematische Zeitschrift 1933, Band 37, Heft 5: Sur les polydromies de certains potentiels newtoniens prolongés.

Prace matematyczno-fizyczne. Warszawa 1935: Sur les polydromies des potentiels newtoniens prolongés, dans l'espace réel à n dimensions.

On vérifie facilement que v_0 et v_1 se développent en séries uniformément convergentes des puissances croissantes des coordonnées de P. Il s'ensuit que U est holomorphe hors de $D + F$, et il vient:

$$\Delta_2 U(P) = 0 .$$

U est donc biharmonique hors de $D + F$. C'est un potentiel généralisé engendré par des densités (spatiale, de simple couche, de double couche) ϱ, f_1, g_1 et f_0, g_0, attirant le point potentié P selon deux fonctions de la distance: respectivement v_0 et v_1.

L'équation I garde son sens si P est dans D.

Pour généraliser nos résultats aux fonctions polyharmoniques d'ordre p, on choisira arbitrairement pour v un polynôme des puissances de la distance (allant de -1 à $2p-2$). Ce polynôme est ici réduit à quatre termes.

§ 2. Formule fondamentale

A partir de l'identité de Green relative aux laplaciens, on forme facilement la formule de Gutzmer:

II $$\int_D (U \Delta_2 V - V \Delta_2 U)\, d\tau = -\sum_{i=0}^{1} \int_F \left(\Delta_i U \frac{d}{dn} \Delta_{1-i} V - \Delta_i V \frac{d}{dn} \Delta_{1-i} U\right) d\sigma .$$

Soit maintenant $B(M)$ continue ainsi que ses dérivées des quatre premiers ordres dans $D + F$. Soit P un point sur lequel nous centrons une petite sphère Σ si ce point est dans D. Appliquons la formule II au domaine $D - \Sigma$ en posant:

$$U = v_1(M, P), \qquad V = B(M) .$$

Il vient, puisque $\Delta_2 v_1 = 0$ dans $D - \Sigma$ et en faisant tendre Σ vers 0:

III
$$\int_D v_1 \Delta_2 B\, d\tau + \sum_{i=0}^{1} \int_F \left\{ v_{1-i} \frac{d}{dn} \Delta_{1-i} B - \Delta_i B \frac{d}{dn} v_i \right\} d\sigma = \begin{cases} 0 \text{ pour } P \text{ hors de } D + F . \\ -8\pi\beta \cdot B - 4\pi\alpha \cdot \Delta B \\ \quad \text{pour } P \text{ dans } D . \end{cases}$$

§ 3. Application du théorème de Cauchy-Kowalewska

Il existe une fonction B holomorphe dans un domaine D, dont les points sont voisins de P, telle que:

$$\begin{array}{lrl} 1 & \Delta_2 B = \varrho & \text{au voisinage de } P \text{ (dans } D) \; . \\ 2 & \dfrac{d}{dn}\Delta B = f_1 & \\ 3 & \Delta B = g_1 & \text{au voisinage de } P, \text{ sur une} \\ 4 & \dfrac{d}{dn}\, B = f_0 & \quad \text{surface } S \text{ passant par } P \; . \\ 5 & B = g_0 & \end{array}$$

$\varrho,\ f_1,\ f_0,\ g_1,\ g_0,$ étant holomorphes.

Posons $\Delta B = A$; les conditions 1, 2, 3, garantissent l'existence de A holomorphe dans D voisin de P, donc de B, à une fonction harmonique près:

$$B = B_0 + \Phi \quad \text{avec 6 :} \quad \Delta\Phi = 0 \quad \text{au voisinage de} \quad P.\ B_0$$

est déterminée par:

$$B_0 = \frac{-1}{4\pi} \int_D \frac{A}{r}\, d\tau \; .$$

Les conditions 4, 5, s'écrivent:

$$7 \qquad \frac{d}{dn}\Phi = f_0 - \frac{d}{dn} B_0 \qquad \text{et : 8} \qquad \Phi = g_0 - B_0 \; .$$

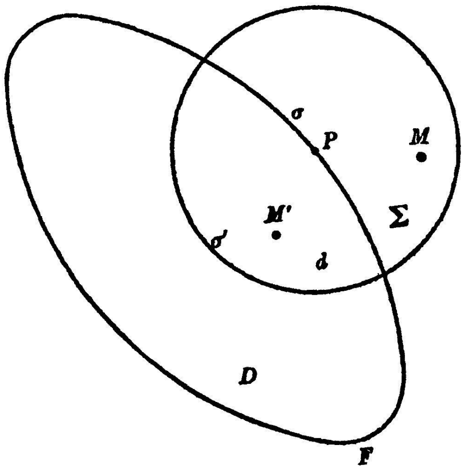
Φ obéissant aux trois relations 6, 7, 8, son existence est garantie et par suite celle de B vérifiant les cinq relations initiales.

§ 4. Prolongement analytique

Pour étudier U au voisinage d'un point P de F, centrons une petite sphère Σ sur P. Soit σ la portion de F intérieure à Σ; σ' la portion de Σ intérieure à F et d le domaine de frontière $\sigma + \sigma'$.

Soit u la fonction biharmonique engendrée par les masses situées dans Σ et A la fonction biharmonique engendrée par les masses situées hors de Σ. Alors:

$$U = A + u \; .$$



A est holomorphe à l'intérieur de Σ donc n'engendre pas de polydromie dans ce domaine. Il suffit donc d'étudier le prolongement au travers de σ de la fonction:

$$1 \qquad u = \int_d v_1 \varrho \, d\tau + \sum_{i=0}^{1} \int_\sigma \left(f_i v_i - g_i \frac{d}{dn} v_i \right) d\sigma \; .$$

Soit B la solution du problème généralisé de Cauchy-Kowalewska telle que:

$$\Delta_2 B = - 8\pi\beta \cdot \varrho \qquad \text{dans } D' \text{ voisin de } P.$$

$$2 \qquad \left| \begin{aligned} \frac{d}{dn} \Delta B &= - 8\pi\beta \cdot f_1 \\ \Delta B &= - 8\pi\beta \cdot g_1 \\ \frac{d}{dn} B &= - 8\pi\beta \cdot f_0 \\ B &= - 8\pi\beta \cdot g_0 \end{aligned} \right| \qquad \text{dans } D' \text{ et sur } \sigma \, .$$

On choisit Σ intérieure à D'. B est par conséquent holomorphe dans Σ. Substituons 2 dans 1. Il vient:

$$3 \qquad u = \frac{-1}{8\pi\beta} \int_d v_1 \Delta_2 B \, d\tau - \frac{1}{8\pi\beta} \int_{\sigma+\sigma'} \{ v_1 , B \} \, d\sigma + \frac{1}{8\pi\beta} \int_{\sigma'} \{ v_1 , B \} \, d\sigma$$

après avoir posé:

$$\{ v_1 , B \} = \sum_{i=0}^{1} \left(v_i \frac{d}{dn} \Delta_i B - \Delta_i B \frac{d}{dn} v_i \right) \; .$$

Le second membre de 3 représente u puisque B est holomorphe dans $d + \sigma + \sigma'$. D'autre part u a un sens si il est calculé pour un point placé dans d. La formule III est donc applicable à 3. Il vient:

$$\text{IV} \qquad u(M) = H(M) + \begin{cases} B^*(M) & \text{pour } M \text{ dans } d. \\ 0 & \text{pour } M \text{ hors de } d + \sigma + \sigma' \\ & \text{(mais dans } \Sigma) \, , \end{cases}$$

en ayant posé:

$$H = \frac{1}{8\pi\beta} \int_{\sigma'} \{ v_1 , B \} \, d\sigma \quad \text{et} \quad B^* = B + \frac{\alpha}{2\beta} \Delta B \; .$$

H est holomorphe dans Σ; c'est un potentiel biharmonique de masses situées sur σ'.

Soit maintenant M un point situé hors de $D + F$ dans Σ et M' un point de d. Désignons par u_M le potentiel u calculé en M, $u_{M'}$ le potentiel u calculé en M' et $u_{MM'}$ le même potentiel calculé en M et prolongé en M'. On a en vertu de IV:

$$u_M = H_M$$

et comme H est holomorphe dans Σ, donc prolongeable en M' au travers de σ:

$$u_{MM'} = H_{MM'} = H_{M'} \, .$$

D'autre part:

$$u_{M'} = H_{M'} + B^*_{M'} \, . \quad \text{Donc:} \quad u_{MM'} - u_{M'} = - B^*_{M'} \, .$$

Ainsi $-B^*$ est la fonction de passage de u donc de U au travers de F.

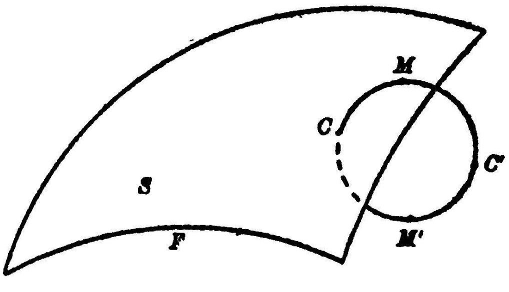
Elle est nulle et par suite U est holomorphe dans toute l'espace si $\alpha = \beta = 0$ c'est-à-dire si v_1 est un polynôme des puissances paires de la distance.

En partant de M' et en sortant de D au travers de F, on trouverait sans difficulté:

4 $$u_{M'M} - u_M = + B^*_M \, .$$

Envisageons par exemple une surface analytique ouverte S chargée des quatre densités de simple et double couche engendrant un potentiel biharmonique hors de S. Soit Γ la frontière de S. Décrivons un circuit fermé $MCM'C'M$ autour de Γ. D'après ce qui précède:

$$U_{MCM'} = U_{M'} - B^*_{M'} \, .$$



Le second membre est holomorphe hors de S. Donc:

$$U_{MCM'C'M} = U_{M'C'M} - B^*_{M'C'M} = U_M - B^*_M .$$

En revenant au point de départ M après un circuit fermé, le potentiel se trouve augmenté de la fonction période $-B^*$.

On établit sans difficulté que la fonction période est nulle pour un circuit fermé n'entourant pas la frontière de S. Les seules singularités du potentiel engendré par S sont donc la ligne Γ et celles de B, solution du problème de Cauchy-Kowalewska généralisé.

D'une façon générale, les singularités engendrées par des corps limités par des portions de surfaces analytiques et chargées de densités holomorphes spatiales ou superficielles seront celles des fonctions de passage et les lignes de ramification, arêtes ou frontières des surfaces limitant les masses.

Remarque: Désignons par U_e le potentiel d'un côté de S et par U_i le potentiel de l'autre côté de S pour deux points M, M' tendant l'un vers l'autre. L'équation 4 s'écrit:

$$U_e - U_i = U_{MM'} - U_{M'} = - B^*_{M'} .$$

§ 5. Applications

a) Il est très facile de former la solution du problème de Cauchy-Kowalewska pour un plan ou une sphère chargés d'une densité de simple couche δ engendrant un potentiel biharmonique. Les équations à résoudre seront:

$$\Delta_2 B = 0 \qquad \text{au voisinage de } P.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dn}\Delta B &= -8\pi\beta\cdot\delta \\ \Delta B &= 0 \\ \frac{d}{dn} B &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{au voisinage de } P \text{ et sur le plan} \\ x = 0 \text{ ou la sphère } \varrho = R.\end{array}$$

Les laplaciens itérés ont pour expression $\Delta_2 = \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}$ pour le plan et $\Delta_2 = \dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}\varrho^2\dfrac{\partial}{\partial\varrho}\dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}\varrho^2\dfrac{\partial}{\partial\varrho}$ pour la sphère. Les solutions sont:

$$B = -\frac{4\pi}{3}\beta\delta x^3 \text{ pour le plan et } B = \frac{4\pi\beta\delta}{3} R\left(\frac{R^3}{\varrho} - 3R^2 + 3R\varrho - \varrho^2\right)$$

pour la sphère.

b) Soit B une fonction biharmonique arbitraire et S une surface analytique. Construisons le potentiel:

$$U = \frac{-1}{8\pi\beta}\int_S \left\{ v_1 , B \right\} d\sigma .$$

Ce potentiel admet B^* comme fonction de passage au travers de S.

c) Soient S une surface fermée et $G_2(B, C)$ la fonction de Green généralisée de seconde espèce[2]) pour l'intérieur de S.

[2]) Actualités Scientifiques et Industrielles, 331. *Miron Nicolesco,* Les fonctions polyharmoniques.

Cette fonction jouit des propriétés suivantes:

$G_2(B, C) = 0$ sur S, $\Delta G_2(B, C) = G_1(B, C)$ ou la fonction de Green ordinaire; $G_2(B, C)$ est continue dans S, même pour $B = C$.

Posons dans l'identité généralisée de Green:

$$A = \overline{AB}\,, \qquad B = G_2(B, C)\,.$$

B est situé dans S. C est fixe à l'intérieur de S. A est fixe, hors de S ou dans S. On établit facilement:

$$\frac{1}{8\pi}\int_S \left\{ \overline{AB}\,\frac{d}{dn} G_1(B,C) + \frac{2}{\overline{AB}}\frac{d}{dn} G_2(B,C) \right\} d\sigma = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\overline{AC} & \text{pour } A \text{ hors de } S\,, \\ \frac{1}{2}\overline{AC} - G_2(A,C) & \text{pour } A \text{ dans } S\,. \end{array} \right.$$

Le premier membre représente un potentiel biharmonique $U(A, C)$. Soit maintenant S' une portion de S. La fonction période pour un circuit autour de la frontière de S' sera:

$$p = U_e - U_i = G_2(A, C)\,.$$

C'est la fonction généralisée de Green de seconde espèce.

On arriverait au même résultat avec la fonction de Green de première espèce. Il suffit d'envisager le potentiel biharmonique:

$$U(A,C) = \frac{1}{8\pi}\int_S \left\{ \overline{AB}\,\frac{d}{dn}\,\Delta G_2(B,C) - \Delta G_2(B,C)\,\frac{d}{dn}\,\overline{AB} \right\} d\sigma = \left\langle \begin{array}{l} \overline{AC} \\ \overline{AC} - G_2(A,C)\,. \end{array} \right.$$

Il n'y a donc pas de grandes difficultés à généraliser aux fonctions polyharmoniques la plupart des résultats dont M. Wavre a établi la théorie générale pour les potentiels ordinaires.

(Reçu le 1er mai 1945.)