

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1944-1945)

Artikel: Funktionentheorie einer Klasse von hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung
Autor: Nef, Walter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16331>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Funktionentheorie einer Klasse von hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Von WALTER NEF, Zürich

Einleitung

Bekanntlich hat man mit der Aufstellung aller analytischen Funktionen einer komplexen Variablen z zugleich alle reellen Integrale der Potentialgleichung in 2 Variablen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

gefunden. Das hat seinen Grund darin, daß für den Operator

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y},$$

der die Regularität definiert,

$$A \overline{A} = \Delta$$

ist.

In diesem Sinne kann man die Theorie der analytischen Funktionen als Funktionentheorie der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ bezeichnen: Um nämlich Integrale dieser Differentialgleichung zu finden, stelle man den reellen Operator Δ in der Algebra der komplexen Zahlen als Norm des Operators A dar und nenne diejenigen Funktionen w analytisch, für die $Aw = 0$ ist. Jede analytische Funktion liefert dann offenbar ein (komplexes) Integral der Potentialgleichung und man kann außerdem zeigen, daß man in den Komponenten der analytischen Funktionen auch alle reellen Potentialfunktionen erhält.

Diese Überlegung läßt sich auf allgemeinere Differentialgleichungen anwenden. Das wurde zuerst von Herrn *Rud. Fueter* durch seine Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen gemacht¹⁾. Eine Funktion w in der Algebra der Quaternionen heißt rechts- bzw. links-regulär, wenn

$$wQ = 0 \quad \text{bzw.} \quad Qw = 0, \quad Q = \frac{\partial}{\partial x_0} + i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

¹⁾ Dieser Standpunkt wird vor allem eingenommen in der Arbeit: *Rud. Fueter*, Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $A \Delta u = 0$ mit 4 reellen Variablen, *Comm. Math. Helv.*, vol. 7, S. 307.

ist. Da $Q\bar{Q} = 1$ ist, liefert jede reguläre Quaternionenfunktion vier (nicht unabhängige) Potentialfunktionen. Ferner kann bewiesen werden, daß man in den Komponenten der regulären Funktionen alle Potentialfunktionen erhält. Da nun die Theorie der regulären Quaternionenfunktionen sich mit funktionentheoretischen Mitteln ausbauen läßt, erhält man auf diesem Wege, abgesehen vom rein funktionentheoretischen Interesse der Theorie, interessante Einblicke in die Theorie der Potentialgleichung in 4 Variablen. So erhält man z. B. die Poissonsche Integraldarstellung²⁾, und die Theorie der Singularitäten der regulären Quaternionenfunktionen³⁾ gibt einen vollständigen Überblick über die Singularitäten der Potentialfunktionen.

In meiner Arbeit über den Fatouschen Satz in n Variablen⁴⁾ habe ich die Funktionentheorie der Potentialfunktionen von beliebig vielen Variablen entwickelt und nebenbei gezeigt, wie man auch hier das Poissonsche Integral erhalten kann. Auch hier kann man noch wesentlich weiter vordringen. Insbesondere läßt auch die Theorie der Singularitäten sich vollständig entwickeln, wie ich noch zu zeigen beabsichtige.

In sehr eleganter Weise hat Herr *Fueter* die Funktionentheorie der Diracschen Differentialgleichungen entwickelt⁵⁾ und damit zum erstenmal ein hyperbolisches System von Differentialgleichungen vom funktionentheoretischen Standpunkt aus betrachtet. Die Methode, die ich hier auf die hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen vom Typus

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{jk} = 0 \quad (\delta_{jk} = \text{const.})$$

anwende, ist eine Kopie der *Fueterschen* Methode.

In neuerer Zeit ist von verschiedenen Verfassern versucht worden, sowohl die Theorie der analytischen Funktionen direkt zu verallgemeinern, als auch Differentialgleichungen mit Hilfe funktionentheoretischer Me-

²⁾ *Rud. Fueter*, Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 43, S. 69.

³⁾ *Rud. Fueter*, Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen I, Comm. Math. Helv., vol. 9, S. 320.

Walter Nef, Über die singulären Gebilde der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, Comm. Math. Helv., vol. 15, S. 144.

Walter Nef, Die unwesentlichen Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, Comm. Math. Helv., vol. 16, S. 284.

⁴⁾ *Walter Nef*, Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Fatou für Potentialfunktionen, Comm. Math. Helv., vol. 16, S. 215.

⁵⁾ *Rud. Fueter*, Die Funktionentheorie der Diracschen Differentialgleichungen, Comm. Math. Helv., vol. 16, S. 19.

thoden zu behandeln⁶⁾. Keine der mir bekannt gewordenen Arbeiten führt aber zu so abgeschlossenen Ergebnissen, wie man sie mit den *Fueter*-schen Methoden erhält.

I. T E I L

Elemente der zur Differentialgleichung gehörigen Funktionentheorie

Wir gehen aus von einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus mit konstanten Koeffizienten, in welcher nur Glieder 2. Ordnung vorkommen, also von einer Differentialgleichung der Gestalt

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = 0 ,$$

und wollen für sie die folgende Randwertaufgabe lösen:

Auf einer $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperfläche R , die noch näher zu bezeichnende Eigenschaften hat, sind die Randwerte der Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} , \dots , \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

vorgegeben. Es sind die Bedingungen anzugeben, welche diese Randwerte erfüllen müssen, wenn ein Integral der Differentialgleichung existieren soll, dessen Ableitungen die vorgeschriebenen Randwerte annehmen, und falls diese Bedingungen erfüllt sind, ist dieses Integral zu finden.

Durch eine lineare Transformation der Variabeln x_1, \dots, x_n kann die Differentialgleichung auf die Form

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \tag{1}$$

gebracht werden, wo

⁶⁾ Die Behandlung von Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Methoden ist Gegenstand der folgenden Arbeiten:

Moisil et Theodoresco, Fonctions holomorphes dans l'espace, *Mathematica*, Volumul V, 1931, pag. 141.

Theodoresco, Le problème de Cauchy pour une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Application aux équations de Dirac. *Annali Pisa*, Ser. II, Vol. IV (1935), pag. 51.

Moisil, Sur un algorithme généralisant la théorie des fonctions monogènes, qui peut être utile pour l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, *Annalele Academei Române*, Ser. III, Tomul XVI, Mem. 17 (1941).

$$\begin{aligned}\kappa_j &= +1 \text{ für } j = 1, \dots, \nu \\ &= -1 \text{ für } j = \nu + 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Dabei ist ν eine natürliche Zahl, von der wir voraussetzen können, daß $\frac{n}{2} \leq \nu < n$ ist.

Das folgende, bis und mit Hauptsatz 6, stimmt fast wörtlich mit einem entsprechenden Teil in einer früheren Arbeit über den Fatouschen Satz überein, nämlich mit dem Teil vom Beginn des Abschnittes 2 bis inklusive Satz 7⁷⁾.

Diese Übereinstimmung ist dadurch begründet, daß es sich dort um die Potentialgleichung handelt, also um eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung vom elliptischen Typus, während wir hier den hyperbolischen Fall betrachten.

\mathfrak{A} sei eine Cliffordsche Algebra der Ordnung 2^n mit den Basiselementen

$$1, e_1, \dots, e_n, e_{12}, \dots, e_{12\dots n},$$

wo 1 die Haupteinheit ist und wo die Basisgrößen e_j ($j = 1, \dots, n$) den Relationen

$$\begin{aligned}\text{I. } e_j^2 &= \kappa_j \cdot 1 & (j &= 1, \dots, n) \\ \text{II. } e_j e_k &= -e_k e_j & (j, k &= 1, \dots, n, j \neq k)\end{aligned}$$

genügen⁸⁾. Die Zahlen, mit denen wir im folgenden rechnen werden, sind die Zahlen dieser Algebra im Körper der reellen Zahlen, d. h. die Größen der Form:

$$z = x_1 + \sum_{j=1}^n e_j x_j + \dots + e_{12\dots n} x_{12\dots n},$$

wo die x beliebige reelle Zahlen sind. Der Zahl z ordnen wir nach der folgenden Definition den Betrag $|z|$ zu:

$$|z| = \left| x_1^2 + \sum_{j=1}^n x_j^2 + \dots + x_{12\dots n}^2 \right|^{1/2}.$$

Für zwei beliebige Zahlen z_1 und z_2 beweist man dann leicht:

$$\begin{aligned}\text{a) } |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, \\ \text{b) } |z_1 z_2| &\leq |z_1| |z_2| \mu^2.\end{aligned}\tag{2}$$

⁷⁾ s. ⁴⁾.

⁸⁾ Vgl. die Zürcher Dissertation: *Paul Bosshard*, Die Cliffordschen Zahlen, ihre Algebra und ihre Zahlentheorie, Zürich 1940.

Hierin bedeutet μ die Ordnung 2^n der Algebra. In erster Linie werden die Größen von der Form

$$z = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

eine Rolle spielen. Damit ordnen wir den n reellen Variablen (x_1, \dots, x_n) die eine hyperkomplexe Variable z zu. Ist z von der letzten Form, so bezeichnen wir mit \bar{z} die Größe

$$\bar{z} = \sum_{j=1}^n \kappa_j x_j e_j \quad .$$

Wir werden im folgenden Funktionen zu betrachten haben, die als Argumente Variable von der Form (2) haben und selber von der Gestalt

$$w = f(z) = \sum_{j=1}^n u_j(x_1, \dots, x_n) e_j$$

sind. Die Begriffe der Differenzierbarkeit von w in einem Gebiet nach einer Variablen $x_k (k = 1, \dots, n)$ und der Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x_k} (k = 1, \dots, n)$ haben dieselbe Bedeutung wie in der angegebenen Arbeit (S. 218).

Definition. Die Funktion $w = f(z)$ heißt in einem Gebiete \mathfrak{S} regulär, wenn sie in \mathfrak{S} zweimal stetig nach beliebigen Variablen $x_j (j = 1, \dots, n)$ differenzierbar ist, und wenn in \mathfrak{S} die Beziehung gilt:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_j} e_j = 0 \quad . \quad (3)$$

Zerlegt man die Bedingung (3) in ihre Komponenten, so erhält man die Regularitätsbedingung in der folgenden reellen Gestalt:

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 ; \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0 \quad . \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad (4)$$

Auf dieselbe reelle Bedingung führt die hyperkomplexe Gleichung

$$\sum_{j=1}^n e_j \frac{\partial w}{\partial x_j} = 0 \quad . \quad (5)$$

Diese und (3) sind also äquivalent, ohne formal übereinzustimmen.

Zwischen den regulären Funktionen und den Integralen der Differentialgleichung (1) besteht ein naher Zusammenhang, der durch die folgenden vier Sätze klargelegt wird:

Satz 1. Die Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$ sei in einem Gebiete \mathfrak{H} ein Integral der Differentialgleichung (1). Dann ist die Funktion

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} e_k$$

in \mathfrak{H} regulär.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß (3) erfüllt ist. In

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_j} e_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} e_k e_j$$

heben sich wegen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$$

und

$$e_j e_k = - e_k e_j \quad \text{für } j \neq k$$

alle Terme mit $j \neq k$ weg. Es bleibt also

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_j} e_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} e_k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \kappa_k \cdot 1.$$

Da aber u ein Integral von (1) ist, ist dies tatsächlich gleich 0.

Satz 2. Die Funktion

$$w = \sum_{j=1}^n u_j \cdot e_j$$

sei in einem Gebiete \mathfrak{H} regulär. Dann existiert in \mathfrak{H} ein Integral U der Differentialgleichung (1), dessen erste Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = u_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

sind.

Beweis: Auf Grund der Regularitätsbedingungen (4) existiert in \mathfrak{H} eine Funktion $U(x_1, \dots, x_n)$, deren Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = u_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

sind. Die linke Seite der Differentialgleichung (1), für die Funktion U angeschrieben, d. h. der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2}$$

ist dann gleich

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} .$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber gleich 0 nach der Regularitätsbedingung (4). Also ist U in \mathfrak{S} ein Integral von (1).

Satz 3. *Die Funktion*

$$w = \sum_{j=1}^n u_j e_j$$

sei in einem Gebiete \mathfrak{S} regulär. Dann sind alle Funktionen $u_j(x_1, \dots, x_n)$ in \mathfrak{S} Integrale der Differentialgleichung (1) ($j = 1, \dots, n$).

Beweis: Es sei

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_k} e_k = 0 .$$

Dies differenzieren wir nach x_j , multiplizieren rechtsseitig mit e_j und summieren über j :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_j} e_k e_j = 0$$

d. h.

$$\sum_{k=1}^n \kappa_k \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = 0 .$$

Da zwischen den e_j keine Beziehung besteht, ist infolgedessen

$$\sum_{k=1}^n \kappa_k \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) .$$

Satz 4. *\mathfrak{S} sei ein zylinderförmiges Gebiet, dessen Seitenlinien der x_1 -Achse parallel und dessen Grund- und Deckhyperebenen zu derselben senkrecht sind. Die reelle Funktion $u_1(x_1, \dots, x_n)$ sei in \mathfrak{S} ein Integral der Differentialgleichung (1). Dann existieren in \mathfrak{S} $(n - 1)$ weitere Funktionen, $u_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)$, von solcher Art, daß*

$$w = \sum_{j=1}^n u_j e_j$$

in \mathfrak{S} regulär ist.

Beweis: $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ sei ein beliebiges Integral der Differentialgleichung in $(n - 1)$ Variabeln:

$$\sum_{j=2}^n \kappa_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} = - \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=a},$$

wo $x_1 = a$ eine das Gebiet \mathfrak{H} schneidende Hyperebene ist. Wir setzen

$$u_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \int_a^{x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} dx_1 \quad (j = 2, \dots, n)$$

und behaupten, daß

$$w = \sum_{j=1}^n u_j e_j$$

regulär ist. Um nämlich (4a) zu bestätigen, beachten wir, daß

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} + \int_a^{x_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2} dx_1 \quad (j = 2, \dots, n)$$

ist. Also ist

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Um (4b) zu beweisen, berechnen wir für $j, k = 2, \dots, n$ die Ausdrücke

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} + \int_a^{x_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k \partial x_j} dx_1 = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Ferner wird

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \quad (k = 2, \dots, n).$$

Also sind die Regularitätsbedingungen (4) erfüllt.

Satz 5. *Satz 4 gilt auch für jedes einfach zusammenhängende Gebiet \mathfrak{H} , das sich in abzählbar viele zylinderförmige Gebiete von der in Satz 4 beschriebenen Art zerlegen läßt.*

Beweis: Dieser wird durch einfache Abänderungen aus dem Beweis zu Satz 6 der oben angegebenen Arbeit⁵⁾ (S. 222) erhalten.

Hauptsatz 6. *Die Funktionen w und v sollen in einem Gebiet H und auf seinem Rand R regulär sein. R sei eine geschlossene orientierbare Hyperfläche mit stetigem Normalenfeld. Dann ist*

$$\int_R w \, dZ \, v = 0 \quad ,$$

wenn wir mit dZ die Größe

$$dZ = dr \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$$

bezeichnen, wo dr das $(n-1)$ -dimensionale Hyperflächenelement auf R bedeutet und wo die $\xi_j (j=1, \dots, n)$ die Komponenten der (äußeren oder inneren) Normalen auf R sind.

Beweis: Nach dem Satz von Gauß ist:

$$\begin{aligned} \int_R w \, dZ \, v &= \sum_{j=1}^n \int_R w \, \xi_j e_j \, v \, dr = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_H \frac{\partial}{\partial x_j} (w e_j v) \, dh = \sum_{j=1}^n \int_H \left[\frac{\partial w}{\partial x_j} e_j v + w e_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dh = 0 \end{aligned}$$

nach der Regularitätsbedingung (3) und der dazu äquivalenten (5).

II. T E I L

Die Integralgleichung für eine reguläre Funktion, deren Werte auf einer Hyperfläche gegeben sind

Die Funktion

$$Q(\zeta - z) = \frac{\sum_{j=1}^n \kappa_j e_j (\xi_j - x_j)}{\left| \sum_{j=1}^n \kappa_j (\xi_j - x_j)^2 \right|^{\frac{n}{2}}} = \frac{\overline{(\zeta - z)}}{\left| \sum_{j=1}^n \kappa_j (\xi_j - x_j)^2 \right|^{\frac{n}{2}}} \quad (6)$$

ist für jeden Wert von z als Funktion der Variablen ζ regulär für alle Werte von ζ mit Ausnahme derjenigen, für welche

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j (\xi_j - x_j)^2 = 0 \quad (7)$$

ist. Die Punkte ζ in R_n , für die (7) erfüllt ist, bilden einen $(n-1)$ -dimensionalen Hyperkegel K , dessen Spitze der Punkt $\zeta = z$ ist. K heißt der zum Punkte z gehörige charakteristische Kegel der Differentialgleichung (1).

Ist ζ irgendein Punkt in R_n , so bedeutet die Größe

$$r^2 = \sum_{j=1}^{\nu} \kappa_j (\xi_j - x_j)^2 = \sum_{j=1}^{\nu} (\xi_j - x_j)^2$$

das Quadrat des Abstandes des Punktes ζ von der $(n - \nu)$ -dimensionalen Hyperebene

$$(\xi_1 - x_1) = (\xi_2 - x_2) = \cdots = (\xi_\nu - x_\nu) = 0 .$$

Ebenso ist

$$s^2 = - \sum_{j=\nu+1}^n \kappa_j (\xi_j - x_j)^2 = \sum_{j=\nu+1}^n (\xi_j - x_j)^2$$

das Quadrat des Abstandes des Punktes ζ von der ν -dimensionalen Hyperebene

$$(\xi_{\nu+1} - x_{\nu+1}) = (\xi_{\nu+2} - x_{\nu+2}) = \cdots = (\xi_n - x_n) = 0 .$$

Die Gleichung des Hyperkegels K können wir dann in den Koordinaten r und s wie folgt schreiben:

$$K : r = s \quad (r, s \text{ positiv}) . \quad (8)$$

Ist $\nu = 1$ oder $\nu = (n - 1)$ (was bei $n = 2$ und $n = 3$ stets der Fall ist), so zerfällt der charakteristische Kegel in zwei Teile, die nur die Spitze z gemeinsam haben. (Im Falle $n = 2$ kann diese Zerlegung des Kegels in zwei Teile auf zwei Arten geschehen). In diesen Fällen bezeichnen wir im folgenden als charakteristischen Kegel nicht den ganzen Kegel $r = s$, sondern nur einen der genannten Halbkegel, wobei wir diesen aber so auswählen, daß die charakteristischen (Halb-)Kegel zweier verschiedener Punkte z_1 und z_2 stets durch eine Translation ineinander übergeführt werden können.

Nun sei R eine orientierbare $(n - 1)$ -dimensionale Hyperfläche in R_n mit stetigem Normalenfeld und \mathfrak{U} ein Gebiet in R_n , das zu R in der folgenden Beziehung steht: Ist z irgendein Punkt aus \mathfrak{U} , so

1. hat jeder erzeugende Strahl des zu z gehörigen charakteristischen Kegels genau einen Schnittpunkt mit R ;
2. gehört der zwischen der Spitze des charakteristischen Kegels und dem Schnittpunkt des Strahles mit R gelegene Teil jedes erzeugenden Strahles zu \mathfrak{U} .

(9)

Auf Grund der Forderungen 1. und 2. ist es stets möglich, denjenigen Teil des charakteristischen Kegels eines zu \mathfrak{U} gehörigen Punktes z , der zwischen z und R liegt, durch ein Stück von R zu einer geschlossenen

Hyperfläche zu ergänzen, deren Inneres \mathfrak{H} ganz in \mathfrak{U} liegt und so, daß entweder für alle Punkte von \mathfrak{H} $r > s$ oder für alle Punkte von \mathfrak{H} $r < s$ ist. Diese beiden letzteren Fälle sind im folgenden völlig gleichberechtigt und wir behandeln nur den Fall $r > s$.

α sei eine beliebige reelle Konstante, die ≥ 1 ist. Mit $\mathfrak{H}(\alpha)$ bezeichnen wir die Gesamtheit der Punkte von \mathfrak{H} , für die $r > \alpha s$ ist. (Es ist dann $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(1)$). Die Berandung von $\mathfrak{H}(\alpha)$ besteht aus den folgenden Stücken:

a) den Punkten von R , für die $r > \alpha s$ ist. Die Menge dieser Punkte auf R nennen wir $R(\alpha)$.

b) den Punkten des Kegels $r = \alpha s$, die in \mathfrak{H} liegen. Die Gesamtheit dieser Punkte nennen wir $K(\alpha)$ (10).

Nun sei ferner ϱ eine positive Konstante, die so klein ist, daß R außerhalb der $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperkugel mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkt z liegt. Mit $\mathfrak{H}(\alpha, \varrho)$ bezeichnen wir das Teilgebiet von $\mathfrak{H}(\alpha)$, dessen Punkte außerhalb dieser Kugel liegen. Die Berandung von $\mathfrak{H}(\alpha, \varrho)$ besteht dann aus den folgenden drei Teilen:

- a) $R(\alpha)$;
- b) denjenigen Punkten von $K(\alpha)$, deren Abstand von z größer als ϱ ist. Ihre Gesamtheit nennen wir $K(\alpha, \varrho)$;
- c) denjenigen Punkten von $\mathfrak{H}(\alpha)$, deren Abstand von z gleich ϱ ist. Ihre Gesamtheit nennen wir $\Gamma(\alpha, \varrho)$.

Die Funktion $Q(\zeta - z)$ (vgl. (6)) ist für alle ζ , die von z verschieden sind, eine reguläre Funktion (von ζ). Insbesondere also ist sie regulär in dem zum Punkte z (aus \mathfrak{H}) gehörigen Gebiete $\mathfrak{H}(\alpha, \varrho)$. Ist nun $w = f(\zeta)$ irgendeine auf R und in \mathfrak{U} reguläre Funktion, so wenden wir für die beiden Funktionen w und $Q(\zeta - z)$ (z in \mathfrak{U}) den Hauptsatz 6 an, und zwar bezüglich des zu z gehörigen Gebietes $\mathfrak{H}(\alpha, \varrho)$:

$$\int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) = \int_{R(\alpha)} + \int_{K(\alpha, \varrho)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) . \quad (11)$$

Dabei ist dZ wie folgt definiert:

$$\left. \begin{array}{l} \text{auf } \Gamma(\alpha, \varrho) : dZ = \frac{\zeta - z}{\varrho} dr \text{ (} dr = \text{Hyperflächenelement auf } \Gamma(\alpha, \varrho) \text{)} \\ \text{auf } K(\alpha, \varrho) \text{ und } R(\alpha) : dZ = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j dr, \text{ wo die } \xi_j (j=1, \dots, n) \text{ die} \\ \text{Komponenten der bezüglich } \mathfrak{H}(\alpha, \varrho) \text{ äußeren Normalen auf} \\ K(\alpha, \varrho) \text{ bzw. } R(\alpha) \text{ sind.} \end{array} \right\} \quad (12)$$

An Stelle der linken Seite von (11) können wir schreiben:

$$f(z) \int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} d\zeta Q(\zeta - z) + \int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} [f(\zeta) - f(z)] dZ Q(\zeta - z) .$$

Da nun (11) für jeden positiven Wert von ϱ gilt, folgt:

$$f(z) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left\{ \left[\int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} dZ Q(\zeta - z) \right]^{-1} \left[\int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} [f(z) - f(\zeta)] dZ Q(\zeta - z) + \int_{R(\alpha)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{K(\alpha, \varrho)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) \right] \right\} . \quad (13)$$

Um den Grenzübergang $\varrho \rightarrow 0$ auszuführen, berechnen wir den Ausdruck

$$\varphi(\alpha) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} dZ Q(\zeta - z) .$$

Zu diesem Zwecke führen wir vorerst in R_n neue Koordinaten ein:

$$\begin{aligned} r, s, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{\nu-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-\nu-1}, & \quad \text{falls } n > 2, \nu < n - 1 \\ r, s, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}, & \quad \text{falls } n > 2, \nu = n - 1 \\ \text{und } r, s, & \quad \text{falls } n = 2 \end{aligned}$$

und zwar durch die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 - x_1 &= r \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \dots \cos \vartheta_{\nu-2} \cos \vartheta_{\nu-1} \\ \xi_2 - x_2 &= r \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \dots \cos \vartheta_{\nu-2} \sin \vartheta_{\nu-1} \\ \xi_3 - x_3 &= r \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{\nu-2} \\ &\vdots \\ \xi_{\nu-1} - x_{\nu-1} &= r \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \\ \xi_\nu - x_\nu &= r \sin \vartheta_1 \\ \xi_{\nu+1} - x_{\nu+1} &= s \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \dots \cos \lambda_{n-\nu-2} \cos \lambda_{n-\nu-1} \\ \xi_{\nu+2} - x_{\nu+2} &= s \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \dots \cos \lambda_{n-\nu-2} \sin \lambda_{n-\nu-1} \\ \xi_{\nu+3} - x_{\nu+3} &= s \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \dots \sin \lambda_{n-\nu-2} \\ &\vdots \\ \xi_{n-1} - x_{n-1} &= s \cos \lambda_1 \sin \lambda_2 \\ \xi_n - x_n &= s \sin \lambda_1 \end{aligned} \right\} \text{falls } n > 2, \nu < n - 1 . \quad (14)$$

Ist $n > 2$ aber $\nu = n - 1$, so bleiben diese Transformationsgleichungen von der ersten bis zur $(n - 1)$ -ten (ν -ten) dieselben und an Stelle der $(\nu + 1)$ -ten bis n -ten Gleichung tritt die folgende:

$$\xi_n - x_n = s .$$

Ist $n = 2$, $\nu = 1$, so ist

$$\begin{aligned}\xi_1 - x_1 &= r \\ \xi_2 - x_2 &= s\end{aligned}$$

zu setzen.

r und s durchlaufen hier alle positiven Zahlen und haben dieselbe Bedeutung wie die gleich bezeichneten Größen in (8). Den Koordinaten ϑ und λ müssen wir, um jeden Punkt von R_n genau einmal zu erhalten, folgende Beschränkungen auferlegen:

$$\begin{aligned}0 \leq \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} < 2\pi ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \begin{Bmatrix} \vartheta_\varrho \\ \lambda_\sigma \end{Bmatrix} \leq +\frac{\pi}{2} \\ (\varrho = 2, \dots, \nu - 1 ; \sigma = 2, \dots, n - \nu - 1)\end{aligned} \quad (15)$$

Die Gleichung der Hyperkugel mit dem Radius ϱ und dem Punkt z als Mittelpunkt lautet in den neuen Koordinaten:

$$r^2 + s^2 = \varrho^2 ,$$

oder, bei Einführung eines Parameters τ :

$$\begin{aligned}r &= \varrho \cos \tau \\ s &= \varrho \sin \tau\end{aligned} \quad \left(0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}\right) .$$

Wollen wir von dieser Kugel nur den Teil $\Gamma(\alpha, \varrho)$ erhalten, über den wir zu integrieren haben, so haben wir τ wie folgt zu beschränken:

$$0 \leq \tau \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} . \quad (16)$$

Man rechnet nun leicht aus, daß

$$dr = |dZ| = r^{\nu-1} s^{n-\nu-1} \varrho \cos \vartheta_2 \dots \cos \vartheta_{\nu-1} \cos \lambda_2 \dots \cos \lambda_{n-\nu-1} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{\nu-1} d\lambda_1 \dots d\lambda_{n-\nu-1} d\tau$$

ist. Daraus und aus (12) folgt:

$$\begin{aligned}dZ &= \frac{\zeta - z}{\varrho} r^{\nu-1} s^{n-\nu-1} \varrho \cos \vartheta_2 \dots \cos \vartheta_{\nu-1} \cos \lambda_2 \dots \cos \lambda_{n-\nu-1} d\vartheta_1 \dots d\lambda_{n-\nu-1} d\tau = \\ &= (\zeta - z) \varrho^{n-2} \cos^{\nu-1} \tau \sin^{n-\nu-1} \tau \cos \vartheta_2 \dots \cos \vartheta_{\nu-1} \cos \lambda_2 \dots \cos \lambda_{n-\nu-1} d\vartheta_1 \dots d\lambda_{n-\nu-1} d\tau .\end{aligned} \quad (17)$$

Ferner wird:

$$Q(\zeta - z) = \frac{\sum_{j=1}^n \kappa_j e_j (\xi_j - x_j)}{\left| \sum_{j=1}^n \kappa_j (\xi_j - x_j)^2 \right|^{\frac{n}{2}}} = \frac{\sum_{j=1}^n \kappa_j e_j (\xi_j - x_j)}{|r^2 - s^2|^{\frac{n}{2}}} = \frac{\sum_{j=1}^n \kappa_j e_j (\xi_j - x_j)}{\varrho^n |\cos 2\tau|^{\frac{n}{2}}} . \quad (18)$$

Aus (16), (17) und (18) folgt jetzt:

$$\int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} dZ \cdot Q(\zeta - z) = \frac{\Theta}{\varrho^2} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}} \frac{\left[\sum_{j=1}^n e_j (\xi_j - x_j) \right] \left[\sum_{j=1}^n \kappa_j e_j (\xi_j - x_j) \right] \cos^{\nu-1} \tau \sin^{n-\nu-1} \tau}{|\cos 2\tau|^{\frac{n}{2}}} d\tau , \quad (19)$$

wo der Operator Θ die Bedeutung hat:

$$\Theta = \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\vartheta_2 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\vartheta_{\nu-1} \int_0^{2\pi} d\lambda_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\lambda_{n-\nu-1} \cos \vartheta_2 \cdots \cos \lambda_{n-\nu-1} .$$

Der in (19) auftretende Ausdruck

$$\left[\sum_{j=1}^n e_j (\xi_j - x_j) \right] \left[\sum_{j=1}^n \kappa_j e_j (\xi_j - x_j) \right]$$

wird gleich:

$$\sum_{j=1}^n (\xi_j - x_j)^2 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=\nu+1}^n e_j e_k (\xi_j - x_j) (\xi_k - x_k) . \quad (20)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (14) für die Differenzen $(\xi_i - x_j)$ ($j = 1, \dots, n$) erkennt man leicht, daß der 2. Summand in (20) keinen Beitrag an das Integral gibt. Da ferner

$$\sum_{j=1}^n (\xi_j - x_j)^2 = \varrho^2$$

ist, so wird:

$$\varphi(\alpha) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} dZ Q(\zeta - z) = C \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}} \frac{\cos^{\nu-1} \tau \sin^{n-\nu-1} \tau}{|\cos 2\tau|^{\frac{n}{2}}} d\tau , \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\text{wo} \quad & \text{für } n > 2, \nu < n - 1 : C = 2^{n-2} \pi^2, \\
& \text{für } n > 2, \nu = n - 1 : C = 2^{n-2} \pi, \\
& \text{für } n = 2, \nu = 1 : C = 1
\end{aligned} \tag{22}$$

ist .

Denn der Operator Θ , den wir jetzt, da in dem Integral (19) keine der Variablen ϑ , λ mehr auftritt, als Faktor auffassen können, hat als solcher jeweils den angegebenen Wert C .

Wir berechnen jetzt den ersten Summanden auf der rechten Seite von (13):

$$S = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} [f(z) - f(\zeta)] dZ Q(\zeta - z) .$$

Da $f(z)$ als reguläre Funktion zweimal nach beliebigen Variablen differenzierbar ist, sind seine ersten Ableitungen stetig, und es existiert deshalb eine reelle Konstante F mit der Eigenschaft, daß in dem Gebiete \mathfrak{H} und auf seinem Rande gilt:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \leq F \quad (j = 1, \dots, n) .$$

Daraus folgt, daß

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq n \varrho F \quad (|\zeta - z| = \varrho)$$

ist. Also wird (vgl. (2)) :

$$\begin{aligned}
|S| & \leq \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \mu^4 n \varrho F \int_{\Gamma(\alpha, \varrho)} |dZ| |Q(\zeta - z)| = \\
& = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \mu^4 n \varrho F C \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}} \frac{\cos^{\nu-1} \tau \sin^{n-\nu-1} \tau}{|\cos 2\tau|^{\frac{n}{2}}} d\tau = 0 ,
\end{aligned}$$

und infolgedessen

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{R(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) + \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{K(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) .$$

Dies gilt für jeden Wert von $\alpha > 1$, also ist auch

$$\begin{aligned}
f(z) & = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{R(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) + \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{K(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) = \\
& = J_1 + J_2 .
\end{aligned} \tag{23}$$

Wir berechnen zuerst den Ausdruck

$$J_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{R(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) .$$

Da für $\alpha \rightarrow 1$ die Größe $\varphi(\alpha)$ über jede Grenze wächst, ist

$$J_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}} \cdot \frac{d}{d\alpha} \int_{R(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) .$$

Um die Ableitung des Integrales zu berechnen, ersetzen wir die Hyperfläche R vorübergehend durch eine abgeänderte Hyperfläche R^* , die wir so aus R erhalten: S sei der Durchschnitt des charakteristischen Kegels K mit R . P sei ein beliebiger Punkt auf S und habe die Koordinaten

$$r = t \cos \frac{\pi}{4}, \quad s = t \sin \frac{\pi}{4}, \quad \vartheta_1, \dots, \lambda_{n-\nu-1} .$$

Die einparametrische Schar von Punkten mit den Koordinaten

$$r = t \cos \sigma, \quad s = t \sin \sigma, \quad \vartheta_1, \dots, \lambda_{n-\nu-1}, \quad \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon \leq \sigma \leq \frac{\pi}{4} + \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ beliebig } > 0 \right) \quad (24)$$

bildet einen Kreisbogen, der auf dem Hyperkegel K senkrecht steht und durch P geht. Die Gesamtheit dieser Kreisbogen (gebildet für alle Punkte P auf S) bildet einen $(n-1)$ -dimensionalen Hyperflächenstreifen T^* . Durch genügend kleine Wahl von ε können wir erreichen, daß T^* innerhalb des Regularitätsbereiches von $f(z)$ liegt. Das wollen wir auch tun. Jetzt ergänzen wir T^* zu einer Hyperfläche R^* , die alle Bedingungen erfüllt, die wir an R gestellt haben (vgl. (9)). (23) gilt dann auch, wenn wir die darin enthaltenen Integrale als über R^* erstreckt auffassen. Das tun wir jetzt für den Moment. Wir erhalten also

$$J_1^* = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{T^*(\alpha)} f(\zeta) dZ^* Q(\zeta - z) + \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{[R^*(\alpha) - T^*(\alpha)]} f(\zeta) dZ^* Q(\zeta - z) . \quad (25)$$

Dabei haben $R^*(\alpha)$ und $T^*(\alpha)$ eine leicht einzusehende Bedeutung. Das zweite der Integrale bleibt für $\alpha \rightarrow 1$ endlich, während $\varphi(\alpha)$ über jede Grenze wächst. Also verschwindet der zweite Summand in (25) und es ist:

$$J_1^* = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{T^*(\alpha)} f(\zeta) dZ^* Q(\zeta - z) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}} \cdot \frac{d}{d\alpha} \int_{T^*(\alpha)} f(\zeta) dZ^* Q(\zeta - z) .$$

Wir beschränken jetzt α auf so nahe bei 1 gelegene Werte, daß der Durchschnitt $S(\alpha)$ von $K(\alpha)$ und R^* ganz in T^* liegt. $d\Sigma$ sei die hyperkomplexe Größe, die dem Betrage nach gleich dem $(n - 2)$ -dimensionalen Hyperflächenelement auf $S(\alpha)$ ist, und deren zugeordneter Vektor auf R^* senkrecht steht. Da die den Streifen T^* bildenden Kreisbogen senkrecht auf $S(\alpha)$ stehen, folgt:

$$dZ^* = t d\sigma d\Sigma .$$

($dZ^* = dr^* \sum_{j=1}^n \xi_j^* e_j$, wo dr^* das $(n - 1)$ -dimensionale Hyperflächenelement auf R^* ist und wo die ξ_j^* ($j = 1, \dots, n$) die Komponenten der Normalen auf R^* bedeuten).

Berücksichtigen wir den Ausdruck (18) für $Q(\zeta - z)$, so erhalten wir:

$$\int_{T^*(\alpha)} f(\zeta) dZ^* Q(\zeta - z) = \int_{\frac{\pi}{4} - \varepsilon}^{\arctg \frac{1}{\alpha}} d\sigma \left[\int_{S(\sigma)} \frac{f(\zeta) d\Sigma(\overline{\zeta - z}) t}{s^n (\operatorname{ctg}^2 \sigma - 1)^{\frac{n}{2}}} \right] .$$

Denn um das Teilstück $T^*(\alpha)$ von T^* zu erhalten, müssen wir σ auf die Werte $\frac{\pi}{4} - \varepsilon \leq \sigma \leq \arctg \frac{1}{\alpha}$ beschränken. Es wird also:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{T^*(\alpha)} f(\zeta) dZ^* Q(\zeta - z) = - \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \int_{S(\alpha)} \frac{f(\zeta) d\Sigma(\overline{\zeta - z})}{s^{n-1}} .$$

Aus der Darstellung (21) der Funktion $\varphi(\alpha)$ folgt ferner:

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = - C \frac{\alpha^{v-1}}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{n}{2}}} .$$

Also wird:

$$J_1^* = - \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{C} \int_S \frac{f(\zeta) d\Sigma(\overline{\zeta - z})}{|\zeta - z|^{n-1}} .$$

Hierin bedeutet $d\Sigma$, um es zu wiederholen, die hyperkomplexe Größe, die dem Betrage nach gleich dem $(n - 2)$ -dimensionalen Hyperflächenelement auf S und deren zugeordneter Vektor der Normalen auf T^* parallel ist. Da nun T^* eine Richtung enthält (nämlich den Kreisbogen (24)), die auf K senkrecht steht, so ist die Normale auf T^* zugleich die-

jenige Normale der $(n - 2)$ -dimensionalen Hyperfläche S , die in der Tangentialhyperebene von K liegt. Also können wir nun $d\Sigma$ auch als diejenige Größe charakterisieren, die dem Betrage nach gleich dem Flächenelement auf S , und deren zugeordneter Vektor der Normalen auf S , die in der Tangentialebene des charakteristischen Kegels liegt, parallel ist. Diese Definition von $d\Sigma$ enthält nichts mehr von der abgeänderten Hyperfläche R^* , sondern kann direkt auf R bezogen werden; denn R und R^* haben den Durchschnitt S gemeinsam.

Im folgenden werden wir den Ausdruck J_2 in (23) berechnen und dabei sehen, daß dieser Ausdruck unabhängig davon ist, ob wir die Hyperfläche R oder R^* verwenden; er ist nämlich mit dem Durchschnitt S der betreffenden Hyperfläche mit dem charakteristischen Kegel bestimmt. Also ist auch $J_1 = J_1^*$ und wir haben:

$$J_1 = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{C} \int_S \frac{f(\zeta) d\Sigma (\overline{\zeta - z})}{|\zeta - z|^{n-1}} . \quad (26)$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung von

$$J_2 = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{K(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \frac{1}{\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}} \cdot \frac{d}{d\alpha} \int_{K(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) \quad (27)$$

über. Nach (21) ist:

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = -C \cdot \frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{n}{2}}} .$$

Um $\frac{d}{d\alpha} \int_{K(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z)$ zu bestimmen, berechnen wir zuerst das hyperkomplexe Flächenelement dZ auf $K(\alpha)$. Die Gleichung von $K(\alpha)$ heißt:

$$r^2 - \alpha^2 s^2 \equiv (\xi_1 - x_1)^2 + \dots + (\xi_n - x_n)^2 - \alpha^2 (\xi_{n+1} - x_{n+1})^2 - \dots - \alpha^2 (\xi_n - x_n)^2 = 0 . \quad (\text{vgl. (10)})$$

Daraus und aus der Definition (12) von dZ folgt:

$$\begin{aligned} dZ &= d\sigma \frac{(\xi_1 - x_1) e_1 + \dots + (\xi_n - x_n) e_n - \alpha^2 (\xi_{n+1} - x_{n+1}) e_{n+1} - \dots - \alpha^2 (\xi_n - x_n) e_n}{\sqrt{r^2 + \alpha^4 s^2}} = \\ &= \frac{d\sigma}{2 \sqrt{r^2 + \alpha^4 s^2}} ((1 - \alpha^2) (\zeta - z) + (1 + \alpha^2) (\overline{\zeta - z})) , \end{aligned}$$

wo do das $(n - 1)$ -dimensionale Hyperflächenelement auf $K(\alpha)$ ist. Für die Funktion $Q(\zeta - z)$ erhalten wir für den Fall, daß ζ auf $K(\alpha)$ liegt:

$$Q(\zeta - z) = \frac{(\overline{\zeta - z})}{(r^2 - s^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(\overline{\zeta - z})}{s^n (\alpha^2 - 1)^{\frac{n}{2}}}.$$

Also wird

$$\begin{aligned} & \int_{K(\alpha)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) = \\ &= \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)^{\frac{n}{2}}} \int_{K(\alpha)} f(\zeta) do \frac{((1 - \alpha^2)(\zeta - z) + (1 + \alpha^2)(\overline{\zeta - z}))(\overline{\zeta - z})}{s^n \sqrt{r^2 + \alpha^4 s^2}} = \\ &= \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)^{\frac{n}{2}}} \int_{K(\alpha)} f(\zeta) do \frac{(1 - \alpha^2)(\zeta - z)(\overline{\zeta - z}) + (1 + \alpha^2)(\alpha^2 - 1)s^2}{s^n \sqrt{r^2 + \alpha^4 s^2}} = \\ &= \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)^{\frac{n-2}{2}}} \int_{K(\alpha)} f(\zeta) do \frac{-r^2 - s^2 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=\nu+1}^n e_j e_k (\xi_j - x_j)(\xi_k - x_k) + s^2 + \alpha^2 s^2}{s^n \sqrt{r^2 + \alpha^4 s^2}} = \\ &= \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{n-2}{2}}} \int_{K(\alpha)} f(\zeta) do \frac{\sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=\nu+1}^n e_j e_k (\xi_j - x_j)(\xi_k - x_k)}{s^n \sqrt{r^2 + \alpha^4 s^2}}. \end{aligned}$$

Für die Ausführung des Grenzüberganges kann dieser Ausdruck durch den folgenden ersetzt werden:

$$\frac{1}{\sqrt{2}(\alpha^2 - 1)^{\frac{n-2}{2}}} \int_{K(1)} f(\zeta) do \frac{\sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=\nu+1}^n e_j e_k (\xi_j - x_j)(\xi_k - x_k)}{s^{n+1}}.$$

Differenzieren wir diesen Ausdruck nach α und setzen wir die Ableitung in (27) ein, so erhalten wir:

$$J_2 = \frac{n-2}{2\sqrt{2}C} \int_K do f(\zeta) \frac{\sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=\nu+1}^n e_j e_k (\xi_j - x_j)(\xi_k - x_k)}{s^{n+1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-2) 2^{\frac{n-2}{2}}}{C} \int_K d\sigma f(\zeta) \frac{\sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=\nu+1}^n e_j e_k (\xi_j - x_j) (\xi_k - x_n)}{|\zeta - z|^{n+1}} = \\
&= \frac{(n-2) 2^{\frac{n-4}{2}}}{C} \int_K d\sigma f(\zeta) \frac{(\zeta - z) (\overline{\zeta - z}) - |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^{n+1}}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Aus (23), (26) und (28) folgt:

Hauptsatz 7. *Ist \mathfrak{U} ein Gebiet in R_n und R eine orientierbare $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche mit stetigem Normalenfeld, das zu \mathfrak{U} in der folgenden Beziehung steht: Ist z irgendein Punkt aus \mathfrak{U} , so*

1. *hat jeder erzeugende Strahl des zu z gehörigen charakteristischen Kegels genau einen Schnittpunkt mit R ;*
2. *liegt der zwischen der Spitze des charakteristischen Kegels und dem Schnittpunkt des Strahles mit R gelegene Teil jedes erzeugenden Strahles in \mathfrak{U} ;*

ist ferner $f(z)$ eine in \mathfrak{U} und auf R reguläre Funktion, so ist für jeden Punkt z in \mathfrak{U} :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{C} \int_{S(z)} \frac{f(\zeta) d\Sigma (\overline{\zeta - z})}{|\zeta - z|^{n-1}} + \\
&+ \frac{(n-2) 2^{\frac{n-4}{2}}}{C} \int_{K(z)} d\sigma f(\zeta) \frac{(\zeta - z) (\overline{\zeta - z}) - |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^{n+1}}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Dabei ist:

$K(z)$ das zwischen z und R gelegene Stück des zu z gehörigen charakteristischen Kegels,

do das $(n-1)$ -dimensionale Hyperflächenelement auf $K(z)$,

$S(z)$ der Durchschnitt von $K(z)$ und R ,

$d\Sigma = d\sigma \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$; hier bedeutet $d\sigma$ das $(n-2)$ -dimensionale Hyperflächenelement auf S und η_j sind die Komponenten der von z wegweisenden Einheitsnormalen auf S , die in K liegt.

Die Konstante C wird durch (22) definiert.

Zurückführung der Randwertaufgabe auf eine lineare Integralgleichung

Wir kehren zu der am Anfang gestellten Randwertaufgabe zurück:

Es seien die stetigen Randwerte

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \psi_1, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = \psi_n$$

eines Integrals u der Differentialgleichung (1):

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad \begin{aligned} (\kappa_j = +1 \quad \text{für } j = 1, \dots, \nu \\ = -1 \quad \text{für } j = \nu + 1, \dots, n) \end{aligned}$$

auf einer $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperfläche R vorgeschrieben. Von R setzen wir voraus, daß es mit einem Gebiet \mathfrak{U} zusammen die Bedingungen 1. und 2. von Hauptsatz 7 erfüllt. Wir wollen die Bedingungen angeben, welche die Randwerte erfüllen müssen, wenn das Problem eine Lösung haben soll, und, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, eine lineare Integralgleichung angeben, mit deren Lösung u auf eine einfache Weise zusammenhängt.

Auf R definieren wir die Funktion

$$\psi = \sum_{j=1}^n e_j \psi_j \quad .$$

Setzen wir dann für jeden Punkt z aus \mathfrak{U} :

$$J(z) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{C} \int_{S(z)} \frac{f(\zeta) d\Sigma(\overline{\zeta - z})}{|\zeta - z|^{n-1}},$$

so ist nach Hauptsatz 7 und Satz 1, wenn das Problem lösbar ist, auch die Integralgleichung

$$f(z) = J(z) - \frac{(n-2) 2^{\frac{n-4}{2}}}{C} \int_{K(z)} d\sigma f(\zeta) \frac{(\zeta - z)(\overline{\zeta - z}) - |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^{n+1}} \quad (30)$$

durch eine Funktion $f(z)$ von der Form

$$f(z) = \sum_{j=1}^n e_j f_j(x_1, \dots, x_n)$$

lösbar, und das gesuchte Integral u ist durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = f_j(x_1, \dots, x_n) \quad (j = 1, \dots, n) .$$

Diese Gleichungen sind im Falle der Lösbarkeit des Problems integrierbar; denn in diesem Falle ist die Funktion $f(z)$ regulär und die Integrierbarkeit folgt aus den Regularitätsbedingungen (4). Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe ist also die Lösbarkeit der Integralgleichung (30). Sie ist aber nicht hinreichend. Denn dafür, daß die Randwertbedingung erfüllt ist, ist offenbar notwendig, daß die Lösung $f(z)$ von (30) auf R mit ψ übereinstimmt. Ich behaupte, daß diese beiden Bedingungen zusammen hinreichend sind. Sind sie nämlich erfüllt, so ist die Lösung $f(z)$ von (30) auch eine Lösung von (29) und die Behauptung folgt aus:

Satz 8. *Ist eine Funktion $f(z)$ in einem Gebiet \mathfrak{U} eine Lösung der Integralgleichung (29):*

$$f(z) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{C} \int_{S(z)} \frac{f(\zeta) d\Sigma(\overline{\zeta-z})}{|\zeta-z|^{n-1}} + \frac{(n-2) \cdot 2^{\frac{n-4}{2}}}{C} \int_{K(z)} d\sigma f(\zeta) \frac{(\zeta-z)(\overline{\zeta-z}) - |\zeta-z|^2}{|\zeta-z|^{n+1}},$$

so ist $f(z)$ in \mathfrak{U} regulär.

Beweis: Unser Beweis zu Hauptsatz 7 läßt sich wie folgt zusammenfassen:

1. Es ist

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{C} \int_{S(z)} \frac{f(\zeta) d\Sigma(\overline{\zeta-z})}{|\zeta-z|^{n-1}} - \frac{(n-2) 2^{\frac{n-3}{2}}}{C} \int_{K(z)} d\sigma f(\zeta) \frac{(\zeta-z)(\overline{\zeta-z}) - |\zeta-z|^2}{|\zeta-z|^{n+1}} = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{\varphi(\alpha)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma(\alpha, \epsilon)} - \int_{R(\alpha)} - \int_{K(\alpha, \epsilon)} f(\zeta) dZ Q(\zeta-z) \right] \right\}, \end{aligned}$$

wo dZ wie in (12) definiert ist. Diese Formel gilt für jede, auch nicht reguläre, Funktion $f(z)$.

2. Ist $f(z)$ regulär, so ist nach Hauptsatz 6:

$$\int_{\Gamma(\alpha, \epsilon)} - \int_{R(\alpha)} - \int_{K(\alpha, \epsilon)} f(\zeta) dZ Q(\zeta-z) = 0 .$$

Daraus folgt Hauptsatz 7. Ist nun $f(z)$ irgendeine (nicht notwendig reguläre) Funktion, so ist nach unserem Beweis zu Hauptsatz 6:

$$\int_{I'(\alpha, \varrho)} - \int_{R(\alpha)} - \int_{K(\alpha, \varrho)} f(\zeta) dZ Q(\zeta - z) = \int_{\mathfrak{H}(\alpha, \varrho)} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} e_j \right] Q(\zeta - z) dh$$

(denn $Q(\zeta - z)$ ist in $\mathfrak{H}(\alpha, \varrho)$ regulär). Genügt nun $f(z)$ der Integralgleichung (29), so folgt:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{\varphi(\alpha)} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left[\int_{\mathfrak{H}(\alpha, \varrho)} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} e_j \right) Q(\zeta - z) dh \right] \right\} = 0 .$$

Wir wollen den Grenzwert auf der linken Seite ausrechnen: Ist $\mathfrak{H}(\alpha)$ das aus den Punkten bestehende Gebiet, die für irgendeinen Wert von ϱ zu $\mathfrak{H}(\alpha, \varrho)$ gehören, so ist

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{H}(\alpha, \varrho)} = \int_{\mathfrak{H}(\alpha)} ,$$

also

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{\mathfrak{H}(\alpha)} \Delta(\zeta) Q(\zeta - z) dh = 0 ,$$

wo wir

$$\Delta(\zeta) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} e_j$$

gesetzt haben. In unseren früheren Koordinaten wird:

$$dh = \varrho^{n-1} \cos^{\nu-1} \tau \sin^{n-\nu-1} \tau \cos \vartheta_2 \dots \cos \vartheta_{\nu-1} \cos \lambda_2 \dots \cos \lambda_{n-\nu-1} \\ d\vartheta_1 \dots d\lambda_{n-\nu-1} d\tau d\varrho .$$

Ferner wird wie in (18):

$$Q(\zeta - z) = \frac{(\overline{\zeta - z})}{\varrho^n |\cos 2\tau|^{\frac{n}{2}}} .$$

Um das Gebiet $\mathfrak{H}(\alpha)$ zu erzeugen, muß τ von 0 bis $\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}$ laufen, $\vartheta_1, \dots, \lambda_{n-\nu-1}$ durchlaufen alle nach (15) zulässigen Werte und ϱ läuft von 0 bis zu einem Wert ϱ^* , der eine Funktion von $\tau, \vartheta_1, \dots, \lambda_{n-\nu-1}$ ist. Also wird:

$$\int_{\mathfrak{H}(\alpha)} \Delta(\zeta) Q(\zeta - z) dh = \\ = \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}} d\tau \frac{\cos^{\nu-1} \tau \sin^{n-\nu-1} \tau}{|\cos 2\tau|^{\frac{n}{2}}} \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \dots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\lambda_{n-\nu-1} \cos \lambda_{n-\nu-1} \int_0^{\varrho^*} d\varrho \Delta(\zeta) \frac{(\overline{\zeta - z})}{\varrho}$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \int_{\mathfrak{H}} \Delta(\zeta) Q(\zeta - z) dh = \\ &= - \frac{\alpha^{\nu-1}}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{2\pi} d\vartheta_1 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\lambda_{n-\nu-1} \cos \lambda_{n-\nu-1} \int_0^{e^*} d\rho \Delta(\zeta) \frac{(\overline{\zeta - z})}{\rho} \Big|_{\tau = \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Da ferner

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = -C \frac{\alpha^{\nu-1}}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{n}{2}}}$$

ist, folgt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_{\mathfrak{H}(\alpha)} \Delta(\zeta) Q(\zeta - z) dh = \frac{1}{C} \int_{K(z)} \frac{d\rho}{\rho^{n-2}} \Delta(\zeta) \frac{(\overline{\zeta - z})}{\rho}.$$

Ist also in \mathfrak{U} die Funktion $f(z)$ eine Lösung der Integralgleichung (29), so gilt für jeden Punkt z aus \mathfrak{U} :

$$\int_{K(z)} \frac{d\rho}{\rho^{n-2}} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} e_j \right] \frac{(\overline{\zeta - z})}{\rho} = 0.$$

Ich ziehe daraus den Schluß, daß in \mathfrak{U} gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} e_j = 0,$$

daß also $f(z)$ regulär ist, bin aber nicht imstande, diese letzte Folgerung zu beweisen. Ein solcher Beweis würde besondere Untersuchungen über die hier auftretenden Integralgleichungen verlangen, die von etwas anderem Typus sind, als die gewöhnlich behandelten. Satz 8 ist damit bewiesen bis auf den letzten Schritt des Beweises, der nicht bewiesen ist. Die letzten Resultate fassen wir zusammen in

Hauptsatz 9. Um in \mathfrak{U} das Integral u der Differentialgleichung (1) zu finden, das auf R die Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \psi_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

erfüllt, bilde man in \mathfrak{U} die Funktion

$$J(z) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{C} \int_{S(z)} \frac{\psi(\zeta) d\Sigma(\overline{\zeta-z})}{|\zeta-z|^{n-1}},$$

wo

$$\psi = \sum_{j=1}^n \psi_j e_j$$

ist, und stelle die Integralgleichung

$$f(z) = J(z) + \frac{(n-2) 2^{\frac{n-4}{2}}}{C} \int_{K(z)} d\sigma f(\zeta) \frac{(\zeta-z)(\overline{\zeta-z}) - |\zeta-z|^2}{|\zeta-z|^{n+1}} \quad (30)$$

auf. Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des Problems sind die beiden Bedingungen:

a) Die Integralgleichung (30) ist durch eine Funktion von der Form

$$f(z) = \sum_{j=1}^n e_j f_j(x_1, \dots, x_n) \quad (f_j \text{ reell}) \text{ lösbar.}$$

b) Die Lösung $f(z)$ von (30) stimmt auf R mit der Funktion ψ überein.

Die gesuchte Lösung u ist dann durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = f_j(x_1, \dots, x_n) \quad (j = 1, \dots, n),$$

welche integrierbar sind.

(Eingegangen den 19. Mai 1944.)