**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 17 (1944-1945)

**Artikel:** Über die Enden diskreter Räume und Gruppen.
**Autor:** Freudenthal, Hans
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-16328

# Über die Enden diskreter Räume und Gruppen

Von Hans Freudenthal, Amsterdam

In meiner Dissertation[1]) habe ich offene Räume durch „Endpunkte" kompaktifiziert; neuerdings habe ich[2]) die Theorie der Enden bis an die Grenzen — wie ich meinte — ihrer Gültigkeit ausgedehnt. Der Sinn der Unternehmungen war es, unter den Kompaktifizierungen eines nicht kompakten Raumes eine zu bevorzugen; die Forderungen, die ich stellte, lauteten:

Das „Unendlichferne" (die zum Raume hinzugefügte Menge) soll möglichst dünn (nulldimensional) sein.
Das Unendlichferne soll möglichst weitgehend aufgespalten sein.

Ich habe dies Kompaktifizierungsproblem in meiner zweiten zitierten Arbeit durch die Methode der Endpunkte gelöst für alle

semikompakten[3]) (a)
separablen Räume (b)
mit kompaktem Quasikomponentenraum[4]), (c)

und ich habe dort auch gezeigt, daß man keine dieser Bedingungen abschwächen kann. Diese Tatsache hat ihre endgültige Formulierung durch J. de Groot erfahren, der in seiner Dissertation[5]) definierte und bewies:

$R^*$ heißt ideale Kompaktifikation des separablen $R$, wenn die Menge $R^* \setminus R$ der „neuen" Punkte nulldimensional und jede andere Kompaktifikation $R'$ stetiges Bild der Kompaktifikation $R^*$ ist (d. h. jede topologische Abbildung von $R$ auf sich selbst zu einer stetigen Abbildung von $R^*$ auf $R'$ erweitert werden kann).

---

[1]) Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. Math. Zeitschr. 33 (1931), 692—713.

[2]) Neuaufbau der Endentheorie. 1941. Vermutlich in den Annals of Mathematics erschienen.

[3]) d. h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung mit kompakter Berandung. — Dieser Begriff in der Endentheorie rührt von *L. Zippin* her: On semicompact spaces. Amer. J. of Math. 57 (1935), 327—341.

[4]) d. h. jede abnehmende Folge nichtleerer offener abgeschlossener Teilmengen von $R$ soll einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.

[5]) Topologische Studiën. Compactificatie, voortzetting van afbeeldingen en samenhang. 1942.

$R$ ist dann und nur dann ideal kompaktifizierbar, wenn es obige drei Eigenschaften (a), (b), (c) besitzt.

Es war jedenfalls über jedem Zweifel erhaben, daß etwa der Raum, der aus abzählbar viel isolierten Punkten besteht, keine ausgezeichnete und gleichzeitig „anständige" Kompaktifizierung besitzt, die Maximalitätsforderungen, wie wir sie gestellt haben, erfüllt.

Hier hat nun eine Arbeit von H. Hopf[6]) ganz neue Gesichtspunkte aufgezeigt und mich zu einer Endentheorie abzählbarer, diskreter Räume veranlaßt. Allerdings muß man das Wort „diskret" nicht zu wörtlich auffassen. Es handelt sich immerhin um Räume mit einer nichttrivialen Topologie. Wir fordern, daß in $R$ ein nichttrivialer, reflexiver Begriff der

Nachbarschaft zweier Punkte[7])

definiert ist (d. h. je zwei Punkte sind Nachbarn oder sind es nicht), wobei jeder Punkt

endlich viel Nachbarn

besitzt. Unter der Hülle eines Punktes in einem solchen Raum verstehen wir die Menge seiner Nachbarn und unter der $(k + 1)$-ten Hülle die Hülle seiner $k$-ten Hülle. Zwei solche Topologien heißen äquivalent, wenn ein $k$ existiert, so daß

$$\mathfrak{H}_1(a) \subset \mathfrak{H}'_k(a) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}'_1(a) \subset \mathfrak{H}_k(a)$$

mit $\mathfrak{H}_n(a)$ als $n$-te Hülle von $a$ in der einen und
$\mathfrak{H}'_n(a)$ „ „ „ „ $a$ „ „ anderen Topologie.

In diskreten Räumen mit Nachbarschaftsbegriff kann man nun in der Tat eine Endentheorie — ganz analog wie früher — entwickeln; äquivalente Räume liefern dabei denselben Endenraum.

Ein anschauliches Modell eines diskreten Raumes $R$ mit Nachbarschaftsbegriff ist ein

Polygon.

---

[6]) Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. Comment. Math. Helvet. 16 (1943), 81—100.

[7]) Ein derartiger topologischer Grundbegriff steht wohl in der Literatur zuerst bei *B. Linfield,* Espaces discrets paramétriques et non-paramétriques. Thèse Strasbourg 1925. Siehe auch: *H. Fréchet,* Fund. Math. 8 (1926), 151—159, wo die Begriffe Linfields auf ältere topologische Begriffe zurückgeführt werden. — Von den tiefergehenden Untersuchungen Alexandroffs u. a. über diskrete Räume werden wir hier nichts brauchen.

Man identifiziere nämlich die Punkte von $R$ mit den Ecken des Polygons $P$ und denke sich je zwei benachbarte Punkte durch eine Kante verbunden. Allerdings gehört dabei zu äquivalenten $R$ nicht notwendig dasselbe Polygon. Aber die Endentheorie von $R$ fällt mit der von $P$ (im alten Sinne) zusammen.

Mein Ausgangspunkt waren ursprünglich die Enden der topologischen Gruppen. Das verschärfte Resultat meiner zweiten zitierten Arbeit lautet:

> Jede separable, semikompakte, zusammenhängende Gruppe besitzt höchstens zwei Endpunkte (ist also im kleinen kompakt).

Auch über die Enden der Wirkungsräume transitiver topologischer Gruppen habe ich in meiner Dissertation etwas ausgesagt, aber H. Hopf hat (l. c.) für ganz andersartige Räume scharfe Aussagen über die Anzahl der Endpunkte machen können, nämlich für offene Räume, in denen eine diskontinuierliche Menge topologischer Selbstabbildungen mit kompaktem Fundamentalbereich agiert. Er bewies, daß solch ein Raum

> einen,
> zwei oder
> eine perfekte Menge von Endpunkten

besitzt[8]).

Es zeigte sich bei Hopf, daß für den Fall einer *Gruppe G* topologischer Selbstabbildungen die Endenzahl nicht von der speziellen Darstellung

---

[8]) *Einen* Endpunkt hat die Ebene (mit der Decktransformationsgruppe des Torus); zwei Endpunkte hat die Gerade (mit der Decktransformationsgruppe des Kreises). Für den Fall unendlich vieler Endpunkte geben wir an Stelle des Hopfschen Beispiels eins aus der Theorie der automorphen Funktionen ohne Grenzkreis: In der funktionentheoretischen Ebene seien drei Kreise $K_1$, $K_2$, $K_3$ gegeben, von denen je zwei in demselben von den zwei Gebieten liegen, die der dritte bestimmt. Die drei Kreise beranden zusammen ein dreifach zusammenhängendes Gebiet $A_1$. Man spiegele $A_1$ an seinen drei Rändern und vereinige die drei Spiegelbilder — so entsteht $A_2$. Die Vereinigung $A_1 \cup A_2$ spiegele man an ihren sechs Randkreisen, vereinige die Spiegelbilder und nenne das Resultat $A_3$. So fahre man fort. Die Vereinigung $A$ aller $A_n$ erfüllt die ganze Ebene bis auf eine nulldimensionale perfekte Menge (die Menge der Endpunkte von $A$). In $A$ herrscht die Gruppe gebrochen linearer Abbildungen, die von den Spiegelungen an $K_1$, $K_2$, $K_3$ erzeugt wird; $A_1$ ist einer ihrer Fundamentalbereiche. Zu der Gruppe gehören automorphe Funktionen, deren Singularitätenmenge mit der Endpunktmenge von $A$ zusammenfällt. — Man kann dieses Schottkysche Beispiel auch durch einen regulären Baum vom Grade 3 ersetzen (bei Hopf ist das einfachste Beispiel ein regulärer Baum vom Grade 4), d. h. durch ein Polygon ohne geschlossenes Teilpolygon und mit drei Strecken bei jeder Ecke. Heißt eine Ecke 0 und sind die benachbarten Ecken 1, 2, 3, so nenne man $S_1$, $S_2$, $S_3$ gewisse Spiegelungen (Automorphismen des Baumes von der Periode 2) die bzw. 0 mit 1, 2, 3 vertauschen. Die $S_i$ erzeugen die gewünschte Gruppe.

der Gruppe abhängt, sondern eine Invariante der abstrakten Gruppe ist, und daß man allgemein von den Enden einer abstrakten Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden sprechen kann. Auf Grund dieser Ergebnisse formulierte Hopf folgende Probleme:

1. eine direkte Endentheorie der abstrakten Gruppen mit endlich viel Erzeugenden zu entwickeln,
2. algebraische Kriterien dafür anzugeben, daß eine Gruppe 1, 2 oder unendlich viel Endpunkte hat.

Das erste Problem (das bei Hopf nicht in Angriff genommen wird) werden wir vollständig lösen. Das zweite, das für den Fall zweier Endpunkte bei Hopf vollständig und befriedigend beantwortet wird, werden wir zwar nicht lösen, aber doch einigermaßen fördern; gleichzeitig werden wir einige feinere Aussagen über die Struktur der Endenmenge diskreter Gruppen machen können.

Der Zusammenhang zwischen diskreten Räumen und diskreten Gruppen wird nahegelegt durch die Dehnschen Gruppenbilder. Sei

$$U = (u_1, \ldots, u_p)$$

eine Teilmenge der Gruppe $G$, derart daß

1. $U$ die Gruppe $G$ erzeugt,
2. die Identität zu $U$ gehört,
3. mit irgendeinem Element auch das Inverse zu $U$ gehört.

Wir machen $G$ zu einem diskreten Raum durch die Festsetzung:

> $a$ und $b$ sind benachbart, wenn $b = au$ für ein geeignetes $u$ aus $U$.

Nun kann man auf die Gruppe unsere Endentheorie für diskrete Räume anwenden. Der Nachbarschaftsbegriff hängt zwar von der — willkürlichen — Wahl des erzeugenden Systems $U$ ab; man sieht aber ohne weiteres, daß man mit einem andern erzeugenden System einfach zu einem äquivalenten Raum kommt, also auch zu einer äquivalenten Endentheorie. Die Abhängigkeit vom erzeugenden System ist also nur scheinbar.

In dieser Topologie ist die Gruppe $G$ von selber zusammenhängend, und man kann nun ungefähr genau so, wie Hopf es tut (oder wie es bei dem entsprechenden Satz in meiner Dissertation geschehen ist), beweisen, daß $G$ endlich ist oder 1,2 oder unendlich viel Endpunkte besitzt. Daß es nicht — wie in meiner Dissertation bei 1 oder 2 Endpunkten bleibt, hat seinen tieferen Grund darin, daß im diskreten Fall die Linksmultiplikationen

$$x' = ax$$

die Endenmenge nicht mehr punktweise festhalten. Der „Abstand" zwischen $x$ und $ax$ braucht nämlich (bei festem $a$ und variablem $x$) nicht mehr beschränkt zu bleiben, und je „freier und nichtkommutativer" die Gruppe ist, desto wahrscheinlicher ist es, daß die Endpunkte in der Tat nicht festbleiben und die Endenmenge unendlich wird.

Wie man das rechte Maß für die Nichtkommutativität genauer formulieren muß — diese Frage können wir, wie gesagt, nur annähernd beantworten; wir verweisen dafür auf die Arbeit selbst.

**Bezeichnungen:**

$$\smile,\ \bigcup \ = \text{Vereinigung},$$
$$\frown,\ \bigcap \ = \text{Durchschnitt},$$
$$a \in M \setminus N \text{ bedeutet: } a \in M,\ a \bar{\in} N,$$
$$0 \text{ ist die leere Menge.}$$

## 1. Diskrete Räume.

1.1. $R$ heißt ein *Nachbarschaftsraum*, wenn für je zwei Punkte von $R$ definiert ist, ob sie *benachbart* sind oder nicht, und zwar auf reflexive und symmetrische Weise: $a$ ist Nachbar von $a$; ist $a$ Nachbar von $b$, so ist $b$ Nachbar von $a$.

1.2. Die Menge der Nachbarn von $a$ heißt seine *Hülle* $\mathfrak{H}(a)$. Unter der *Hülle* einer Menge verstehen wir die Vereinigung der Hüllen ihrer Elemente.

1.3. *Franse* einer Menge $M$ heißt die Menge

$$\mathfrak{F}(M) = \mathfrak{H}(M) \setminus M$$

*der* Elemente der Hülle von $M$, die nicht zu $M$ gehören.

Wir definieren

$$\mathfrak{H}^0(M) = M,$$
$$\mathfrak{H}^{k+1}(M) = \mathfrak{H}(\mathfrak{H}^k(M)).$$

$\mathfrak{H}^k(M)$ heißt die $k$-te Hülle von $M$.

$$\mathfrak{F}^{(k)}(M) = \mathfrak{H}^k(M) \setminus M$$

heißt die $k$-te Franse von $M$.

1.4. Man hat

$$\mathfrak{H}(\bigcup_n M_n) = \bigcup_n \mathfrak{H}(M_n) \qquad 1.4.1$$

und

$$\mathfrak{H}^k(M) = \bigcup_{a \in M} \mathfrak{H}^k(a), \qquad 1.4.2$$

$$\mathfrak{F}^{(k)}(\bigcup_n M_n) \subset \bigcup_n \mathfrak{F}^{(k)}(M_n). \qquad 1.4.3.$$

1.5. Wir ordnen dem Raum $R$ ein Polygon $\breve{R}$ zu: jedem Element von $R$ entspricht eine Ecke von $\breve{R}$; benachbarten Elementen entsprechen Ecken, die durch eine Kante verbunden sind.

1.6. $R$ besitze von nun an die Eigenschaft

(K) $\qquad$ $\mathfrak{H}(a)$ ist für jedes $a$ endlich,

und die Eigenschaft

(S) $\qquad$ $R$ ist abzählbar.

Man sieht ohne weiteres, daß diese Eigenschaften bei $\breve{R}$ die

Kompaktheit im Kleinen

und

Separabilität

nach sich ziehen.

1.7. Die Gesamtheit aller Mengen $M$ mit

$$\mathfrak{F}(M) \quad \text{endlich}$$

heiße $\mathfrak{Q}$. Wegen (K) ist jedes endliche $M$ in $\mathfrak{Q}$.

1.8. Mit $M$ ist auch $\mathfrak{H}(M) \in \mathfrak{Q}$, denn nach 1.4.1 ist

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{H}(M)) \in \mathfrak{F}(M) \cup \mathfrak{F}(\mathfrak{H}(M) \setminus M) = \mathfrak{F}(M) \cup \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(M)),$$

und hier ist der erste Summand nach Voraussetzung und der zweite nach 1.7 endlich.

1.9. Ist $M \in \mathfrak{Q}$, so ist auch $\mathfrak{F}^{(k)}(M)$ endlich. Denn

$$\mathfrak{F}^{(k)}(M) = \mathfrak{H}^k(M) \setminus M = \bigcup_{\kappa=1}^{k} \left(\mathfrak{H}\mathfrak{H}^{\kappa-1}(M) \setminus \mathfrak{H}^{\kappa-1}(M)\right) = \bigcup_{\kappa=1}^{k} \mathfrak{F}\mathfrak{H}^{\kappa-1}(M),$$

und hier ist nach 1.8 jeder Summand endlich.

1.10. Wir nennen zwei Nachbarschaftsbegriffe (in derselben Menge) äquivalent[9]), wenn für die zugehörigen Hüllenbegriffe $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ gilt:

Es gibt ein $k$, so daß für alle $a$

$$\mathfrak{H}'(a) \subset \mathfrak{H}^k(a) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}(a) \subset \mathfrak{H}'^k(a)$$

erfüllt ist.

1.11. Für äquivalente Nachbarschaftsbegriffe sind $\mathfrak{F}(M)$ und $\mathfrak{F}'(M)$ nur gleichzeitig endlich oder unendlich; die Gesamtheit $\mathfrak{Q}$ ist für äquivalente Nachbarschaftsbegriffe also dieselbe.

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus 1.9.

## 2. Die Endpunkte.

2.1. Eine Teilmenge $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{Q}$ heißt

Endpunkt von $R$,

wenn

1. $Q \neq 0$ für alle $Q \in \mathfrak{e}$,
2. mit $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{e}$ auch $Q_1 \cap Q_2 \in \mathfrak{e}$ (also $\neq 0$),
3. $R \setminus M \in \mathfrak{e}$ für jedes endliche $M$,
4. $\mathfrak{e}$ maximal ist.

Die Menge aller Endpunkte von $R$ heißt $\mathfrak{E}$.

2.2. Statt $Q \in \mathfrak{e}$ sagen wir auch $\mathfrak{e} \prec Q$. Wir definieren:

$\{Q\}$ ist die Vereinigung aller $a \in Q$ und aller $\mathfrak{e} \prec Q$.

Wir nennen $\{Q\}$ auch Umgebung jedes in ihm enthaltenen Endpunktes. Umgebung eines $a \in R$ heißt die einpunktige Menge $a$ selbst.

Durch diese Festsetzungen wird $R \cup \mathfrak{E} = R^*$ zu einem Umgebungsraum.

---

[9]) Man nennt das vielleicht besser: gleichmäßig äquivalent.

2.3. In $R^*$ gilt das Trennungsaxiom: zwei Punkte lassen sich durch Umgebungen voneinander trennen. Und zwar ist es trivial für zwei Punkte aus $R$, und es folgt aus 2.1.3 für einen Punkt aus $R$ und den anderen aus $\mathfrak{E}$. Für zwei Endpunkte $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}'$ beweist man es so: Aus $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}'$ folgt die Existenz eines $Q \in \mathfrak{e}, \bar{\in}\, \mathfrak{e}'$. Also muß ein $Q' \in \mathfrak{e}'$ mit $Q \frown Q' = \mathrm{o}$ existieren, da man $Q$ sonst noch zu $\mathfrak{e}'$ hinzufügen könnte (im Widerspruch zu 2.1.4). Aus $Q \frown Q' = \mathrm{o}$ folgt $\{Q\} \frown \{Q'\} = \mathrm{o}$, und zwar ist das trivial hinsichtlich der Punkte von $R$ und folgt für Endpunkte daraus, daß $\mathfrak{e}'' \in \{Q\} \frown \{Q'\}$ $Q \prec \mathfrak{e}''$ und $Q' \prec \mathfrak{e}''$ nach sich zöge, was nach 2.1.2 unmöglich ist. $\{Q\}$ und $\{Q'\}$ sind also die gewünschten zueinander fremden Umgebungen von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$.

2.4. Wir notieren noch die soeben bewiesene Tatsache:

Mit $Q_1 \frown Q_2$ ist auch $\{Q_1\} \frown \{Q_2\}$ nicht leer.

2.5. Die Berandung jedes $\{Q\}$ ist leer. Denn wäre $\mathfrak{e}$ Randpunkt von $Q$, so wäre $\{Q\} \frown \{Q'\} \neq \mathrm{o}$ für jede Umgebung $\{Q'\}$ von $\mathfrak{e}$, also $Q \frown Q' \neq \mathrm{o}$ im Widerspruch zu 2.1.4.

2.6. $R^*$ ist regulär und separabel. Denn aus 2.5 folgt das Trennungsaxiom in seiner schärfsten Form.

## 3. Zusammenhang.

3.1. Ist $\mathfrak{H}(M) \frown N \neq \mathrm{o}$, so ist auch $\mathfrak{H}(N) \frown M \neq \mathrm{o}$. (Klar.) Speziell:

Ist $\mathfrak{H}(N) = N$, so ist $\mathfrak{H}(R \setminus N) = R \setminus N$.

3.2. $N$ abgeschlossen — bedeutet: $\mathfrak{F}(N) = \mathrm{o}$.

Aus 3.1 folgt:

Mit $N$ ist auch $R \setminus N$ abgeschlossen. 3.2.1.

Aus 1.4.3 folgt:

Die Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. 3.2.2.

Und hieraus durch Übergang zum Komplement:

Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. 3.2.3.

3.3. Durch Relativierung entsteht die Definition:

$N \subset M$ abgeschlossen rel $M$ — bedeute:

$$F(N) \subset F(M)\,. \tag{3.3.1.}$$

Oder $F(N) \cap M = \circ\,.$ 3.3.2.

Die Sätze aus 3.1—2 gelten auch für die relative Abgeschlossenheit.

3.4. Minimale rel $M$ abgeschlossene Teilmengen von $M$ heißen Komponenten. Mengen mit nur einer Komponente heißen zusammenhängend.

3.5. Jede rel $M$ abgeschlossene Menge zerfällt in disjunkte Komponenten von $M$. Denn nach 3.2.3 ist der Durchschnitt aller das Element $a$ enthaltenden (rel $M$) abgeschlossenen Mengen abgeschlossen (rel $M$), also minimal abgeschlossen, also eine Komponente. Ebenfalls nach 3.2.3 können zwei Komponenten nur einen leeren Durchschnitt besitzen.

3.6. Ist $P \subset N \subset M$ und $P$ abgeschlossen rel $N$, $N$ abgeschlossen rel $M$, so ist $P$ abgeschlossen rel $M$. Denn $F(P) \subset F(N) \subset F(M)$.

3.7. Ist $N$ abgeschlossen rel $M$ und $N \subset M_0 \subset M$, so ist $N$ abgeschlossen rel $M$. Denn $F(N) \cap M = \circ$, also $(FN) \cap M_0 = \circ$.

3.8. Die Komponenten von $M$ sind zusammenhängend. Denn nach 3.6 wäre eine rel $M$ abgeschlossene Teilmenge einer Komponente von $M$ auch in $M$ abgeschlossen, im Widerspruch zur Minimalität der Komponenten.

3.9. Die Komponenten von $M$ sind maximale zusammenhängende Teilmengen von $M$. Denn nach 3.7 ist jede Komponente $N$ von $M$ auch Komponente jedes $M_0$ mit $N \subset M_0 \subset M$, so daß keine Menge, die $N$ echt enthält, noch zusammenhängend sein kann.

3.10. Kette heißt eine endliche Elementfolge, wenn jedes ihrer Elemente dem folgenden benachbart ist.

Je zwei benachbarte Elemente von $M$ gehören zur selben Komponente von $M$. Also auch je zwei Elemente von $M$, die sich in $M$ durch eine Kette verbinden lassen. Andererseits ist die Menge der Elemente, die sich in $M$ mit einem Element durch eine Kette verbinden lassen, abgeschlossen, also nach 3.5 aus Komponenten von $M$ zusammengesetzt. Hieraus folgt:

Komponenten von $M$ sind die Teilmengen der Elemente, die sich mit einem festen Element durch eine Kette verbinden lassen.

3.11. Von nun an besitze $R$ immer die Eigenschaft:

(Z) $R$ ist zusammenhängend.

3.12. Jede Komponente von $M$ besitzt Punkte in $\mathfrak{F}(M)$. Sonst hätte sie nämlich wegen 3.3.1 eine leere Franse, wäre also eine Komponente von $R$, das doch zusammenhängend sein soll.

3.13. Jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ besitzt nur endlich viel Komponenten. Denn nach 3.12 gibt es in der Franse $\mathfrak{F}(K)$ jeder Komponente $K$ von $Q$ einen Punkt von $\mathfrak{F}(Q)$. Also gibt es in jeder Komponente $K$ von $Q$ ein Element von $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(Q))$. $Q$ besitzt also höchstens soviel Komponenten wie $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(Q))$ Elemente. Nach 1.9 sind das endlich viele.

3.14. Für jedes $a$ ist $\bigcup\limits_n \mathfrak{H}^n(a) = R$. (Folgt aus 3.10—11.)

3.15. (Z) bleibt gültig beim Übergang zu einem äquivalenten Nachbarschaftsbegriff. (Folgt aus 3.14.)

## 4. Die Kompaktheit von R*.

4.1. $a$ sei fest gewählt. Die unendlichen Komponenten von $R \setminus \mathfrak{H}^k(a)$ nennen wir

$$P_1^{(k)}, \ldots, P_{s_k}^{(k)} .$$

Da ihre Fransen in $\mathfrak{H}^k(a)$ liegen, gehören sie zu $\mathfrak{Q}$.

4.2. Sei $\mathfrak{e}$ ein Endpunkt. Zu jedem $k$ gibt es ein $P_{\sigma_k}^{(k)} \in \mathfrak{e}$, und diese bilden eine absteigende Folge.

Denn wegen 2.1.3 ist $R \setminus H^k(a) \in \mathfrak{e}$. Wäre für ein gewisses $k$ kein $P_{\sigma_k}^{(k)} \in \mathfrak{e}$, so gäbe es (für dieses feste $k$) zu jedem $\sigma = 1, \ldots, s_k$ ein $Q_\sigma \in \mathfrak{e}$ mit

$$P_\sigma^{(k)} \frown Q_\sigma = \circ .$$

Wir setzen

$$Q = \bigcap_{\sigma=1}^{s} Q_\sigma \; (\neq \circ)$$

und haben

$$P_\sigma^{(k)} \frown Q = \circ ,$$

also

$$\bigcup_{\sigma=1}^{s} P_\sigma^{(k)} \frown Q = \circ .$$

$Q$ hätte also mit $R \setminus \mathfrak{H}^k(a)$ einen endlichen, mit einem geeigneten $R \setminus \mathfrak{H}^l(a)$ nach 3.14 sogar einen leeren Durchschnitt, im Widerspruch zu 2.1.3. Daher muß es zu jedem $k$ das gewünschte $P_{\sigma_k}^{(k)} \in \mathfrak{e}$ geben. Daß diese bei wachsendem $k$ abnehmen, ist klar.

4.3. Zu jeder absteigenden Folge $P_{\sigma_k}^{(k)}$ gibt es genau ein $\mathfrak{e}$, das sie enthält.

Daß es solch ein $\mathfrak{e}$ gibt, ist klar: man braucht die Folge der $P_{\sigma_k}^{(k)}$ nur zu einer maximalen Menge mit den Eigenschaften 2.1.1—3 zu ergänzen. Gäbe es zwei solche Endpunkte, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$, so gäbe es nach 2.3 $Q \in \mathfrak{e}$, $Q' \in \mathfrak{e}'$, $Q \cap Q' = \circ$. Man wähle dann $k$ so groß, daß $\mathfrak{F}(Q) \cup \mathfrak{F}(Q') \subset \mathfrak{H}^k(a)$ liegt. Die Mengen

$$Q_0 = Q \setminus \mathfrak{H}^k(a) ,$$

$$Q_0' = Q' \setminus \mathfrak{H}^k(a)$$

gehören nach 2.1.2—3 immer noch zu $\mathfrak{e}$ resp. $\mathfrak{e}'$, und man hat

$$Q_0 \cap Q_0' = \circ .$$

Nach 3.5 setzen sich die in $R \setminus \mathfrak{H}^k(a)$ abgeschlossenen Mengen $Q_\circ$ und $Q_\circ'$ aus Komponenten von $R \setminus \mathfrak{H}^k(a)$ zusammen, also aus Mengen $P_{\sigma_k}^{(k)}$. Wegen 2.1.2 hat man

$$P_{\sigma_k}^k \cap Q_0 \neq \circ , \quad \text{also} \quad P_{\sigma_k}^k \subset Q_0$$

$$P_{\sigma_k}^k \cap Q_0' \neq \circ , \quad \text{,,} \quad P_{\sigma_k}^k \subset Q_0' ,$$

im Widerspruch zum Vorigen. — Es kann also nur einen Endpunkt zu der Folge $P_{\sigma_k}^{(k)}$ geben, und damit ist die Behauptung bewiesen.

4.4. Nach 4.2 und 4.3 kann man die Endpunkte einfach mit Hilfe der absteigenden Folgen der Mengen $P$ erzeugen. Hieraus folgt, daß $R^*$ ein Kompaktum ist. 2.5 lehrt weiter, daß $R^*$ nulldimensional ist. Wir fassen das Ergebnis folgendermaßen zusammen:

> Satz 1: Jeder Nachbarschaftsraum $R$, der (K), (S) und (Z) genügt, läßt sich durch seine Endpunkte zu einem nulldimensionalen Kompaktum $R^*$ abschließen, dessen einzige Häufungspunkte die Endpunkte sind. Jeder Endpunkt besitzt beliebig kleine Umgebungen, die im Sinne des Nachbarschaftsbegriffes zusammenhängend sind und eine endliche Franse haben. Äquivalente $R$ liefern dasselbe $R^*$.

(Die letzte Bemerkung folgt aus 1.11.)

4.5. Die in 1.5 definierte Zuordnung eines Polygons zu einem Nachbarschaftsraum $R$ verallgemeinern wir folgendermaßen:

$\breve{R}$ sei ein im kleinen kompakter, im kleinen zusammenhängender, zusammenhängender Raum mit 2. Abzählbarkeitsaxiom. $\mathfrak{V}$ sei ein System von

kompakten Gebieten $V$ aus $R$

mit den Eigenschaften

(K′) Jedes $\overline{V}$ mit $V$ aus $\mathfrak{V}$ hat mit fast allen Gebieten aus $\mathfrak{V}$ einen leeren Durchschnitt.

(S′) $\mathfrak{V}$ ist abzählbar.

(Z′) Zu je zwei $V \in \mathfrak{V}$ gibt es eine Kette von $V \in \mathfrak{V}$, in der jedes $V$ mit dem folgenden einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Wegen der Existenz eines Systems $\mathfrak{V}$ unter unsern Voraussetzungen siehe[1]), Hilfssatz 2, wo (K′) und (S′) gezeigt werden. (Z′) ergibt sich aus dem Zusammenhang von $R$: Die Vereinigung der $V$, die sich mit einem festen $V$ durch eine Kette verbinden lassen, heiße $T$. Ein etwaiger Randpunkt von $T$ läge in einem neuen $V \in \mathfrak{V}$, das mit einem der in $T$ enthaltenen einen nichtleeren Durchschnitt hätte. Also muß der Rand von $T$ leer sein, also $T$ eine Komponente von $R$, also $= R$.

$\breve{R}$ und $\mathfrak{V}$ definieren einen Nachbarschaftsraum $R$: Elemente von $R$ sind die $V \in \mathfrak{V}$,

$V_1$, $V_2$ heißen benachbart, wenn $V_1 \frown V_2 \neq 0$.

$R$ besitzt auf Grund von (K′), (S′), (Z′) die Eigenschaften (K), (S), (Z).

Ist $\breve{R}$ ein Polygon und ordnet man einer Ecke $a$ von $R$ die Vereinigung von $a$ mit den von $a$ ausgehenden offenen Kanten zu, so kommt man zu einem System $\mathfrak{V}$, das der in 1.5 definierten Zuordnung für Polygone entspricht.

4.6. Zwischen der Endentheorie von $R$ und der von $\breve{R}$ (im Sinne meiner Dissertation[1])) besteht ein einfacher Zusammenhang, der beschrieben wird durch

Satz 2: Die Beziehung zwischen $R$ und $\breve{R}$ gemäß 4.5 läßt sich stetig fortsetzen zu einer topologischen Abbildung der zugehörigen Endenmengen $E$ und $\breve{E}$, und zwar stetig in dem Sinne, daß $\lim V_{\nu_n} = \mathfrak{e}$ im Sinne von $\breve{R}$ dann und nur dann gilt, wenn es im Sinne von $R$ gilt. Insbesondere haben also $R$ und $\breve{R}$ ebenso viel Endpunkte.

Die Zuordnung geschieht so: Sei

$$Q \in \mathfrak{Q} \quad (\text{in } R).$$

Wir setzen in $\breve{R}$:

$$\breve{Q} = g(Q) = \bigcup_{V \in Q} V .$$

$Q$ ist offen. Ist $\breve{a}$ Randpunkt von $\breve{Q}$, so ist $\breve{a}$ in einem gewissen $V_0 \in \mathfrak{B}$, das mit $Q$, also mit einem der $V \in Q$ einen nichtleeren Durchschnitt hat. Also

$$\breve{a} \in \bigcup_{V \in \mathfrak{H}(Q)} V .$$

Andererseits ist $a$ als Randpunkt von $\breve{Q}$

$$\bar{\in} \bigcup_{V \in Q} V .$$

Also ist

$$\text{Rand}\,(\breve{Q}) \subset \bigcup_{V \in \mathfrak{F}(Q)} V ,$$

also kompakt.

Ist umgekehrt

$\breve{Q}$ eine offene Menge von $\breve{R}$ mit kompaktem Rand,

so setzen wir

$$Q = g'(\breve{Q}) = \text{Gesamtheit der } V \subset \breve{Q} .$$

Da die $V \in \mathfrak{B}$ Gebiete sind, muß jedes, das Punkte von $\breve{Q}$ enthält, ohne in $\breve{Q}$ enthalten zu sein, Punkte von Rand $(\breve{Q})$ enthalten, d. h.

$$\text{aus } V \in \mathfrak{F}(Q) \text{ folgt } V \cap \text{Rand}\,(\breve{Q}) \neq 0 .$$

Rand $(Q)$ ist in endlich viel $V$ zusammen enthalten, $V_1, \ldots, V_s$. Also:

$$\text{Ist } V \in \mathfrak{F}(Q), \text{ so ist } V \in \mathfrak{H}(V_1) \cup \cdots \cup \mathfrak{H}(V_p) .$$

Also ist

$$\mathfrak{F}(Q) \text{ endlich, also } Q \in \mathfrak{Q} .$$

$g'g(Q)$ ist in $\mathfrak{H}(Q)$ enthalten, unterscheidet sich also von $Q$ nur in einer endlichen Menge. Ebenso unterscheidet sich $gg'(\breve{Q})$ von $\breve{Q}$ höchstens in der Vereinigung der $V$, die den Rand von $Q$ überdecken, also in einer kompakten Menge. Für die Bildung der Endpunkte sind zwei $Q$ bzw. $\breve{Q}$, die sich nur in einer endlichen bzw. kompakten Menge unterscheiden, nicht wesentlich verschieden. In diesem Sinne ist die durch $g$ und $g'$ vermittelte Beziehung zwischen den $Q$ und den $\breve{Q}$ eineindeutig.

Man erhält nun aus einem Endpunkt $\mathfrak{e}$ von $R$ einen Endpunkt $\mathfrak{e}'$ von $\breve{R}$, indem man jedes $Q \in \mathfrak{e}$ durch das zugehörige $g(Q)$ ersetzt. Es ist klar, daß $\mathfrak{E}$ und $\breve{\mathfrak{E}}$ dann topologisch aufeinander bezogen sind, und daß diese Beziehung stetige Forsetzung der zwischen $R$ und $\breve{R}$ gegebenen ist.

## 5. Gruppen.

5.1. $R$ sei von nun an eine

Gruppe $G$ mit endlich vielen Erzeugenden.

Wir machen $G$ durch folgende Festsetzungen zu einem Nachbarschaftsraum:

Sei $U$ eine Teilmenge von $G$ mit den Eigenschaften:

1. $U$ ist endlich,
2. $U$ enthält die Identität,
3. $U$ enthält mit jedem Element das inverse,
4. die kleinste Untergruppe von $G$, die $U$ enthält, ist mit $G$ identisch.

Wir nennen zwei Elemente

$a, b$ benachbart, wenn $a^{-1}b \in U$ [10]).

5.2. Wegen 5.1.2—3, ist der Nachbarschaftsbegriff symmetrisch und reflexiv. Die Hülle von $a$ wird

$$\mathfrak{H}(a) = aU\,, \qquad 5.2.1$$

die $k$-te Hülle

$$\mathfrak{H}^k(a) = aU^k \text{ [11])}. \qquad 5.2.2$$

---

[10]) Man könnte natürlich ebensogut festsetzen: $a, b$ benachbart, wenn $ab^{-1} \in U$. Statt der „Rechtsnachbarschaft" als Grundbegriff erhielte man dann eine „Linksnachbarschaft" als Grundbegriff. Beide dürfen nicht durcheinander geworfen werden, obschon sie natürlich isomorphe Theorien liefern.

[11]) In Gruppen bedeutet $MN$ die Menge aller $mn$ mit $m \in M$, $n \in N$. $M^p$ bedeutet hier die Menge $M \cdot M \cdot \cdots \cdot M$ ($p$-mal).

Hieraus folgt:

$G$ ist ein Nachbarschaftsraum mit Gültigkeit von (K), (S), (Z).

Wir können alles, was wir in § 1—4 entwickelt haben, anwenden.

5.3. Ersetzt man das System $U$ durch ein anderes, $U'$, das auch die Eigenschaften 5.1.1—4 besitze, so gelangt man nur zu einem äquivalenten Nachbarschaftsbegriff.

Wegen 5.1.4 gibt es nämlich ein $k$ mit

$$U' \subset U^k, \quad U \subset U'^k .$$

Setzt man das in 5.2.2 ein und berücksichtigt man die Definition aus 1.10, so ist man fertig.

## 6. Endpunkte von Gruppen.

6.1. Rechtsmultiplikation und Linksmultiplikation mit einem festen Element sind eineindeutige Abbildungen von $G$ auf sich.

> Rechtsmultiplikationen und Linksmultiplikationen lassen sich topologisch bis in die Endpunkte hinein fortsetzen. Die Rechtsmultiplikationen lassen jeden Endpunkt invariant; die Linksmultiplikationen lassen die Begriffe „Nachbar", „Hülle", „Franse" invariant. (Dagegen werden die Linksmultiplikationen im allgemeinen die Endpunkte nicht punktweise festlassen, und die Rechtsmultiplikationen werden die Struktur von $R$ zerstören.)

Die Beweise stehen in 6.2—3.

6.2. Rechtsmultiplikationen: Sei $\lim a_n = \mathfrak{e}$. Wir beweisen, daß dann auch $\lim a_n c = \mathfrak{e}$. Wir brauchen das nur für den Fall $c \in U$ zu beweisen — durch endlichfache Wiederholung ergibt es sich hieraus allgemein. Sei also $c \in U$. Sei $\{Q\}$ irgendeine Umgebung von $\mathfrak{e}$ mit $Q \in \mathfrak{Q}$. Fast alle

$$a_n \in Q ,$$

also fast alle

$$a_n c \in Qc \subset H(Q) = Q \cup \mathfrak{F}(Q) .$$

Da $\mathfrak{F}(Q)$ endlich ist, sind also fast alle

$$a_n c \in Q\,.$$

Das gilt für jede Umgebung $\{Q\}$ von $\mathfrak{e}$, und damit ist $\lim a_n c = \mathfrak{e}$ bewiesen — also alles, was wir über die Rechtsmultiplikationen aussagten.

6.3. Linksmultiplikationen: Bei der Linksmultiplikation mit $a$ geht $x$ in $a\,x$ und $y$ in $a\,y$ über.

$$(a\,x)^{-1}(a\,y) = x^{-1}y\,.$$

Also gilt: sind $x$, $y$ benachbart, so sind $a\,x$, $a\,y$ benachbart. Daher sind „Hülle" und „Franse" linksinvariant,

$$\mathfrak{H}(aM) = a\mathfrak{H}(M)\,,\quad \mathfrak{F}(aM) = a\mathfrak{F}(M)\,.$$

Hieraus folgt:

Ist $Q \in \mathfrak{Q}$, so ist auch $aQ \in \mathfrak{Q}$.
Ist $\mathfrak{e}$ ein Endpunkt, so auch $a\mathfrak{e}$.
Ist $\{Q\}$ Umgebung von $\mathfrak{e}$, so ist $\{aQ\}$ Umgebung von $a\mathfrak{e}$.

Hieraus ergeben sich alle zu beweisenden Aussagen über die Linksmultiplikationen.

6.4. Ist $\lim a_n = \mathfrak{e}$ und $M$ endlich, ist ferner $\{Q\}$ eine Umgebung von $\mathfrak{e}$, so gilt für fast alle $n$

$$a_n M \subset Q\,.$$

Denn nach 6.2 ist $\qquad a_n c \in Q$

für fast alle $n$. Angewandt auf die endlich vielen $c$ von $M$ folgt hieraus die Behauptung.

6.5. Seien $\{Q_1\}$ bzw. $\{Q_2\}$ Umgebungen der (evtl. zusammenfallenden) Endpunkte $\mathfrak{e}_1$ bzw. $\mathfrak{e}_2$; $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$. Sei $\lim a_n = \mathfrak{e}_1$. Dann gilt für fast alle $n$:

$$a_n Q_2 \subset Q_1 \quad \text{oder} \tag{1}$$

$$a_n Q_2 \supset R \setminus Q_1\,. \tag{2}$$

Zum Beweise bestimmen wir nach 6.4 $n$ so groß, daß

$$a_n \mathfrak{F}(Q_2) \subset Q_1\,. \tag{3}$$

Wir lassen den Index $n$ von nun an weg. Wir nehmen an, daß

$$R \setminus Q_1 \not\subset aQ_2 \tag{4}$$

sei. Dann ist entweder

$$(R \setminus Q_1) \cap aQ_2 = 0\,,$$

also

$$aQ_2 \subset Q_1\,,$$

also (1) erfüllt, oder

$$(R \setminus Q_1) \cap aQ_2 = Q_3 \tag{5}$$

eine

$$\text{nichtleere echte Teilmenge von } R \setminus Q_1\,. \tag{6}$$

Wir dürfen annehmen, daß

$$R \setminus Q_1$$

zusammenhängend ist (evtl. verkleinern wir $Q_1$ um endlich viel Elemente, um das zu erreichen). Wegen (5) und der Definition 3.4 ist

$$\mathfrak{F}(Q_3) \cap (R \setminus Q_1) \neq 0\,, \tag{7}$$

da $Q_3$ sonst Komponente von $R \setminus Q_1$ also $= R \setminus Q_1$ wäre im Widerspruch zu (6). Andererseits ist nach (5)

$$\mathfrak{F}(Q_3) \subset \mathfrak{H}(R \setminus Q_1) \cap \mathfrak{H}(aQ_2)\,,$$

also $\subset [(R \setminus Q_1) \cap aQ_2] \cup \mathfrak{F}(R \setminus Q_1) \cup \mathfrak{F}(aQ_2)\,,$

also $\subset \mathfrak{F}(R \setminus Q_1) \cup \mathfrak{F}(aQ_2)$

also $\subset Q_1 \cup \mathfrak{F}(aQ_2)$

(nach 6.3) $= Q_1 \cup a\mathfrak{F}(Q_2)$

(nach (3)) $= Q_1\,.$

Das steht im Widerspruch zu (7). Von den beiden Alternativschlüssen, die wir aus der Annahme (4) zogen, war also (5)—(6) unzulässig und nur (1) zulässig. Es gilt also: (1) richtig oder (4) falsch. Oder: (1) oder (2) richtig, w.z.b.w.

6.6. $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ seien zwei (evtl. zusammenfallende) Endpunkte, und $\lim a_n = \mathfrak{e}_1$. Dann ist

entweder $\lim a_n \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_1$ (1)

oder $\mathfrak{e}_2$ Häufungspunkt der $a_n^{-1}$ (2)

(aber nicht beides zugleich).

Denn seien $\{Q_1\}, \{Q_2\}$ Umgebungen von bzw. $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$. Tritt für fast alle $n$ der Fall 6.5.1 ein, so hat man für fast alle $n$

$$a_n \mathfrak{e}_2 \in \{Q_1\} ,$$

also

$$\lim a_n \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_1 .$$

Tritt dagegen für unendlich viele $n$ der Fall 6.5.2 ein, so hat man unendlich oft

$$c \in a_n Q_2 ,$$

wo $c$ ein (festes) Element von $R \setminus Q_1$ ist, also unendlich oft

$$a_n^{-1} c \in Q_2 .$$

Das gilt für jede Umgebung $Q_2$ von $\mathfrak{e}_2$, also ist $\mathfrak{e}_2$ Häufungspunkt der $a_n^{-1} c$, also nach 6.2 auch

$$\mathfrak{e}_2 \text{ Häufungspunkt der } a_n^{-1} ,$$

w.z.b.w.

6.7. Seien $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ drei verschiedene Endpunkte und $\lim a_n = \mathfrak{e}_1$. Die $a_n^{-1}$ können sich an und für sich bei allen drei Endpunkten $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ häufen; durch Auswahl kann man aber erreichen, daß sie sich bei höchstens einem, etwa $\mathfrak{e}'$ häufen ($\mathfrak{e}'$ kann mit $\mathfrak{e}_1$ zusammenfallen); die beiden anderen nennen wir $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$. Nach 6.6 ist

$$\lim a_n \mathfrak{e}'' = \lim a_n \mathfrak{e}''' = \mathfrak{e}_1 ,$$

also: in jeder Umgebung von $\mathfrak{e}_1$ liegen mindestens zwei Endpunkte. Also:

> Gibt es mehr als zwei Endpunkte, so ist die Menge $\mathfrak{E}$ der Endpunkte perfekt[12]).

6.8. Die Endpunkte $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ heißen einander invers, wenn eine Folge $a_n$ existiert mit

$$\lim a_n = \mathfrak{e} , \quad \lim a_n^{-1} = \mathfrak{e}' .$$

Die Vereinigung aller zu $\mathfrak{e}$ inversen Endpunkte heiße $\mathfrak{e}^{-1}$.

---

[12]) Satz von *Hopf*, l. c., S. 82.

6.9. $\mathfrak{e}^{-1}$ ist abgeschlossen.

Denn seien alle $\mathfrak{e}_n$ invers zu $\mathfrak{e}$ und $\lim \mathfrak{e}_n = \mathfrak{e}_0$. Seien $\{Q\}$ und $\{Q_0\}$ bzw. Umgebungen von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_0$. In jeder Umgebung von $\mathfrak{e}_n$, also auch in $\{Q_0\}$ gibt es Elemente $a_n$ mit $a_n^{-1} \in Q$. Das gilt für jedes Paar $\{Q\}$, $\{Q_0\}$ von Umgebungen von $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{e}_0$. Also ist $\mathfrak{e}_0$ auch invers zu $\mathfrak{e}$, w.z.b.w.

6.10. Sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ einander invers, so sind auch $a\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ einander invers.

Denn es sei etwa $\lim c_n = \mathfrak{e}$, $\lim c_n^{-1} = \mathfrak{e}'$. Dann ist nach 6.2:

$$\lim c_n^{-1} a^{-1} = \mathfrak{e}' .$$

Andererseits $$\lim a c_n = a\mathfrak{e} .$$

Das bedeutet, daß $\mathfrak{e}'$ und $a\mathfrak{e}$ invers sind.

6.11. Wir verstehen unter

$$R\mathfrak{e} \text{ die Menge aller } a\mathfrak{e},\ a \in R .$$

Wir nennen

$$\mathfrak{e} \text{ linksinvariant, wenn } R\mathfrak{e} = \mathfrak{e} \text{ ist.}$$

Jede Gruppe befindet sich in einem der beiden folgenden Fälle:

Entweder für jedes $\mathfrak{e}$

$$\overline{R\mathfrak{e}} = \mathfrak{E} \qquad 6.11.1$$

und $$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{E} . \qquad 6.11.2$$

Oder: es gibt einen linksinvarianten Endpunkt, und jeder linksinvariante Endpunkt $\mathfrak{e}_0$ erfüllt 6.11.3

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0 \text{ für jedes } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0 . \qquad 6.11.4$$

Zum Beweise nennen wir

$$V(\mathfrak{e}_0) \text{ die Menge aller } \mathfrak{e} \text{ mit } \mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0 ,$$

wenn $\mathfrak{e}_0$ irgendein Endpunkt ist. $V(\mathfrak{e}_0)$ kann natürlich leer sein; im allgemeinen besteht ja $\mathfrak{e}^{-1}$ aus mehr als einem Endpunkt.

Wir haben

$$\mathfrak{E} = V(\mathfrak{e}_0) \cup \overline{R\mathfrak{e}_0} \qquad 6.11.5$$

für jedes $\mathfrak{e}_0$, denn ist

$$\mathfrak{e} \,\bar{\epsilon}\, V(\mathfrak{e}_0)\,,$$

so ist

$$\mathfrak{e}^{-1} \neq \mathfrak{e}_0\,;$$

es gibt dann eine Folge $a_n$ mit

$$\lim a_n = \mathfrak{e}$$

und

$$\mathfrak{e}_0 \text{ nicht Häufungspunkt von } a_n^{-1}\,;$$

also ist nach 6.6

$$\lim a_n \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}$$

in $\overline{R\mathfrak{e}_0}$ enthalten. Also gilt 6.11.5 in der Tat.

Wir haben nun zwei Fälle:

a) $V(\mathfrak{e}) = 0$ für jedes $\mathfrak{e}$. Dann ist nach 6.11.5

$$\overline{R\mathfrak{e}} = \mathfrak{E}$$

für jedes $\mathfrak{e}$, also 6.11.1 gültig. Ist weiter $\mathfrak{e}_1$ ein Endpunkt in $\mathfrak{e}^{-1}$, so ist nach 6.10

$$a\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}^{-1}\,,$$

$$R\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}^{-1}$$

und nach 6.9

$$\overline{R\mathfrak{e}_1} \subset \mathfrak{e}^{-1}\,,$$

also nach 6.11.1

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{E}\,,$$

so daß auch 6.11.2 gilt.

b) Für ein gewisses $\mathfrak{e}_0$ ist $V(\mathfrak{e}_0) \neq 0$. Dann ist für ein gewisses $\mathfrak{e}$

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0\,. \qquad (6.11.6)$$

Nach 6.10 sind dann aber auch $\mathfrak{e}$ und $a\mathfrak{e}_0$ invers, also wegen 6.11.6

$$a\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0\,,$$

womit 6.11.3 bewiesen ist. Man hat also

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0 ,$$

also nach 6.11.5

$$\mathfrak{e} \in V(\mathfrak{e}_0) \text{ für alle } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0 ,$$

d. h.

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0 \text{ für jedes } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0 ,$$

und damit ist zum Schluß auch 6.11.4 bewiesen.

6.12. Hat $G$ zwei linksinvariante Endpunkte, so hat es genau zwei Endpunkte.

Denn nach 6.11 gilt, wenn $\mathfrak{e}_0$ linksinvariant ist,

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0 \text{ für jedes } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0 .$$

Ebenso, wenn auch $\mathfrak{e}_1$ linksinvariant ist,

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_1 \text{ für jedes } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_1 .$$

Es kann also kein $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0$ und $\neq \mathfrak{e}_1$ geben.

6.12a. Hat $G$ genau zwei Endpunkte, so sind sie zueinander invers. Sind sie obendrein invariant, so ist keiner zu sich selbst invers. (Folgt aus 6.11.2 und 6.11.4.)

6.13. Sind $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ zwei verschiedene einander inverse Endpunkte und $\{Q\}, \{Q'\}$ bzw. (fremde) Umgebungen, so gibt es ein $c$ derart, daß

$$cQ \text{ echt in } Q ,$$
$$c^{-1}Q' \text{ echt in } Q'$$

enthalten ist.

Da $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ invers sind, gibt es nämlich eine Folge $a_n$,

$$\lim a_n = \mathfrak{e}$$
$$\lim a_n^{-1} = \mathfrak{e}' .$$

Nach 6.5 gilt also für ein $a_n$ (das wir auch $c$ nennen dürfen)

$$cQ \subset Q_1 ,$$
$$c^{-1}Q' \subset Q_1' ,$$

wo $Q_1$ und $Q_1'$ irgendwelche echte Teilumgebungen von $Q$ und $Q'$ seien. Daraus folgt die Behauptung.

6.14. Eine Gruppe mit genau zwei Endpunkten besitzt eine unendliche zyklische Untergruppe von endlichem Index[13]).

Zum Beweise wähle man ein $c$ gemäß 6.13. (Wegen 6.12a ist das möglich.) Dann bilden die Mengen

$$c^n Q$$

eine absteigende Folge. Der Durchschnitt ist leer, da $Q$ sonst eine Folge

$$c^{-n} b$$

enthielte, was nach 6.13 nicht möglich ist. Jedes Element von $Q$ liegt also in einer der Mengen

$$\begin{aligned} c^n Q \setminus c^{n+1} Q & \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ = c^n (Q \setminus cQ) \,. \end{aligned}$$

Ebenso liegt jedes Element von $Q'$ in einer der Mengen

$$c^{-n} (Q' \setminus c^{-1} Q') \,.$$

$Q \setminus cQ$ und $Q' \setminus c^{-1} Q'$ sind endlich.
Jedes Element von $G$ ist also darstellbar in der Form

$$c^n a_1, \ldots, c^n a_k \,,$$

mit geeigneten (aber festen) $a_1, \ldots, a_k$ und ganzem $n$.
$c$ erzeugt also die gesuchte zyklische Untergruppe von endlichem Index.

6.15. Eine Gruppe, die eine unendliche zyklische Untergruppe von endlichem Index besitzt, besitzt genau zwei Endpunkte[13]).
Jedes Element von $G$ ist nämlich in der Form

$$c^n a_1, \ldots, c^n a_k$$

darstellbar. Die von $c$ erzeugte Untergruppe besitzt die Endpunkte

$$\mathfrak{e} = \lim c^n \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{e}' = \lim c^{-n} \,.$$

---

[13]) Auch dieser Satz ist von *Hopf*, l. c., S. 97.

Jede unendliche Folge aus $G$ läßt sich in Folgen

$$c^n a_\kappa \quad \text{und } c^{-n} a_\kappa$$

mit festem $\kappa$ zerlegen. Nach 6.2 konvergieren diese gegen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$. Also sind das die einzigen Endpunkte von $G$. $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}'$ in $G$, da $n > 0$ bzw. $n < 0$ zueinander fremde Umgebungen von $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{e}'$ sind.

6.16. Satz 3:

1. Die Kompaktisierung einer Gruppe $G$ von endlich vielen Erzeugenden durch ihre Endpunktmenge $\mathfrak{E}$ ist eindeutig bestimmt.
2. $\mathfrak{E}$ besteht aus 0, 1, 2 Punkten, oder ist perfekt[12]).
3. 0 Endpunkte besitzen die endlichen Gruppen und nur diese.
4. 2 Endpunkte besitzen die Gruppen mit unendlicher zyklischer Untergruppe von endlichem Index und nur diese[13]).
5. $\mathfrak{E}$ ist invariant bei Linksmultiplikationen und punktweise invariant bei Rechtsmultiplikationen.
6. Die $a\,\mathfrak{e}$ liegen entweder überall dicht oder $\mathfrak{e}$ ist linksinvariant.
7. Es kann

   0, 1 oder 2

   linksinvariante Endpunkte geben — wir sprechen dann von

   elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen

   Gruppen.
8. Gruppen mit 0 Endpunkten sind elliptisch.
9. Gruppen mit 1 Endpunkt sind parabolisch.
10. Gruppen mit 2 Endpunkten sind elliptisch oder hyperbolisch.
11. Gruppen mit $\infty$ viel Endpunkten sind elliptisch oder (?) parabolisch. (Ob hier der parabolische Fall wirklich eintreten kann, ist unsicher.)
12. Bei elliptischen Gruppen ist $\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{E}$ für jedes $\mathfrak{e}$.
13. Bei parabolischen Gruppen mit dem linksinvarianten Endpunkt $\mathfrak{e}_0$ ist $\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0$ für alle $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{e}_0^{-1} \doteq \mathfrak{E}$.
14. Bei hyperbolischen Gruppen sind die beiden (invarianten) Endpunkte zueinander invers, aber keiner zu sich selbst invers.

[12]) Satz von *Hopf*, l. c., S. 82.
[13]) Auch dieser Satz ist von *Hopf*, l. c., S. 97.

Wir geben zu jeder Nummer an, wo sie bewiesen ist. 1. in 5.2—3. 2. in 6.7. 3. trivial. 4. in 6.14—15. 5. in 6.1—3. 6. in 6.11.1 und 6.11.3. 7. in 6.12 (Beispiele folgen). 8. trivial. 9. trivial. 10. trivial (Beispiele folgen). 11. in 6.12. 12. in 6.11.2. 13. Die erste Aussage steht in 6.11.4, die andere ergibt sich so: $\mathfrak{e}_0^{-1} \supset \mathfrak{E} \setminus \mathfrak{e}_0$, also $= \mathfrak{E}$ wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{e}^{-1}$ und der Perfektheit von $\mathfrak{E}$. 14. in 6.12a.

6.17. Beispiele:

1. Gruppe mit einem Endpunkt: abelsche Gruppe von 2 Erzeugenden.
2. Hyperbolische Gruppe: zyklische unendliche Gruppe.
3. Elliptische Gruppe mit 2 Endpunkten: die Gruppe mit den 2 Erzeugenden $s$ und $t$ und den Relationen

$$s^2 = stst = \text{Identität}.$$

4. Elliptische Gruppe mit $\infty$ vielen Endpunkten: freie Gruppe von 2 Erzeugenden.

1. $\mathfrak{H}^n(1)$ besteht aus $u^i v^j$ mit $|i| + |j| \leqq n$, wenn $u, v$ die Erzeugenden sind. $R \setminus \mathfrak{H}^n(1)$ ist also zusammenhängend.

2. $\mathfrak{H}^n(1)$ besteht aus den $u^i$, $|i| \leqq n$, wenn $u$ die Erzeugende ist. $R \setminus \mathfrak{H}^n(1)$ besitzt die Komponenten $u^i, i > n$ und $i < -n$. $u \cdot u^i = u^{i+1}$, d. h. die Endpunkte bleiben fest.

3. Man zieht aus den beiden Relationen:

$$st = t^{-1}s,$$

also

$$st^i = t^{-i}s.$$

Man kann mit dieser Relation alle Elemente von $G$ auf die Gestalt

$$t^i s^{0,1}$$

bringen. Man erhält für

$$\mathfrak{H}^n(1): t^i, \quad |i| \leqq n$$
$$t^i s, \quad |i| \leqq n-1.$$

Die Komplementärmenge besitzt also wieder zwei Komponenten $P, P'$.

Bei den $\quad t^i s^{0,1} \in P \quad$ ist $\quad i > 0,$

$\qquad\qquad \in P' \qquad\qquad i < 0.$

Linksmultiplikation mit $s$ liefert

$$st^i s^{0,1} = t^{-i} s^{1,0} ,$$

also Vertauschung der beiden Endpunkte.

4. Die Erzeugenden seien $u$ und $v$. Die „Worte“

$$w = u^i v^j \cdots u^k v^l =$$

verteilen sich auf vier Mengen:

$$U_+ : i > 0 \cdot U_- : i < 0 .$$

$$V_+ : i = 0,\ j > 0 \cdot V_- : i = 0,\ j < 0 .$$

Alle haben die Franse 1, gehören also zu $\mathfrak{Q}$, sind unendlich und paarweise elementefremd. Jede enthält mindestens einen Endpunkt; es gibt also vier, also $\infty$ viel Endpunkte. Der Automorphismus

$$u \longleftrightarrow v$$

vertauscht die linksinvarianten Endpunkte untereinander, aber auch $U_+$ mit $V_+$ und $U_-$ mit $V_-$. Gibt es einen linksinvarianten Endpunkt, so gibt es zwei, was nicht möglich ist.

Die Gruppe ist demnach nicht parabolisch, also elliptisch.

Problem: Gibt es überhaupt parabolische Gruppen mit unendlich vielen Endpunkten?

## 7. Untergruppen.

7.1. Wir nennen

$S_\mathfrak{e}$ die Untergruppe aller $a$ mit $a\mathfrak{e} = \mathfrak{e}$.

7.2. $$S_{c\mathfrak{e}} = cS_\mathfrak{e}c^{-1} .$$

7.3. Sei $a_n$ eine Folge aus $S_\mathfrak{e}$. Dann ist

entweder $\lim a_n = \mathfrak{e}$ 7.3.1

oder $\mathfrak{e}$ Häufungspunkt der $a_n^{-1}$. 7.3.2

Denn sei 7.3.2 falsch und $a_{n'}$ eine Teilfolge mit

$$\lim a_{n'} = \mathfrak{e}' \neq \mathfrak{e} . \qquad 7.3.3$$

Dann ist nach 6.6

$$\lim a_{n'} \mathfrak{e} = \mathfrak{e}' ,$$

also wegen $a_{n'} \mathfrak{e} = \mathfrak{e}$

$$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}$$

im Widerspruch zu 7.3.3. Also muß entweder 7.3.1 oder 7.3.2 gelten.

7.4. Ist $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$ unendlich, so sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ gleich oder invers.

Denn sei $a_n$ eine Teilfolge von $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$. Dann gibt es auch eine Teilfolge $b_n$ mit

$$\lim b_n = \mathfrak{e}$$

(nämlich entweder $a_n$ selbst oder — nach 7.3 — eine Teilfolge von $a_n^{-1}$). Nun ist

$$\lim b_n = \mathfrak{e}' \neq \mathfrak{e}$$

ausgeschlossen, also nach 6.6

$$\mathfrak{e}' \text{ Häufungspunkt von } b_n^{-1} .$$

Es gibt also eine Teilfolge $c_n$ mit

$$\lim c_n = \mathfrak{e} , \quad \lim c_n^{-1} = \mathfrak{e}' ,$$

w.z.b.w.

7.5. Sind $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ drei verschiedene Endpunkte, so ist

$$S_{\mathfrak{e}_1} \frown S_{\mathfrak{e}_2} \frown S_{\mathfrak{e}_3}$$

endlich.

Denn nach 7.4 gibt es eine Folge $c_n$ mit

$$\lim c_n = \mathfrak{e}_1, \quad \lim c_n^{-1} = \mathfrak{e}_2$$

im Widerspruch zu 7.3, angewandt auf $\mathfrak{e}_3$.

7.6. Wir führen den Gedankengang von 6.13 weiter: $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ sind zueinander inverse Endpunkte mit den im Sinne von $R$ zusammenhängenden Umgebungen $\{Q\}$, $\{Q'\}$. Man findet ein $c$ so, daß die

$$c^n Q$$

und die

$$c^{-n} Q'$$

absteigende Folgen bilden.

$$\bigcap_n c^n Q = \bigcap_n c^{-n} Q' = \circ\,,$$

da sonst z. B. $Q$ eine Folge $c^{-n}b$ enthielte, was nicht möglich ist. $c^n Q$ ist zusammenhängend. Es gibt also (siehe 4.1—3) zu jedem $k$ ein $n$, so daß

$$c^n Q \text{ in genau einem } P^{k\,13\text{a})}$$

enthalten ist.

$$\bigcap_n c^n\{Q\} \quad (\text{ebenso } \bigcap_n c^{-n}\{Q'\})$$

besteht also aus genau einem Endpunkt

$$\mathfrak{e}_1 = \lim c^n \quad (\text{bzw. } \mathfrak{e}_1' = \lim c^{-n})\,.$$

Man hat

$$c\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1\,, \quad c\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1'\,,$$

$$c^i\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1\,, \quad c^i\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1'\,,$$

d. h.

$S_{\mathfrak{e}_1} \frown S'_{\mathfrak{e}_1}$ enthält ein Element unendlicher Ordnung.

Wir haben demnach bewiesen:

Zu jedem Paar verschiedener, zueinander inverser Endpunkte $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ gibt es in beliebiger Nähe ein Paar inverser Endpunkte $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1'$ mit unendlichem

$$S_{\mathfrak{e}_1} \frown S'_{\mathfrak{e}_1}\,.$$

Sowie:

Jede Gruppe mit mehr als einem Endpunkt besitzt Elemente unendlicher Ordnung. (Dieser Satz gilt aber allgemeiner.)

7.7. Ist $T$ eine unendliche Untergruppe von $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$ und $cTc^{-1}$ ebenfalls in $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$ enthalten, so ist

$$c\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\,, \quad c\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'$$

$$\text{oder} \quad c\mathfrak{e} = \mathfrak{e}'\,, \quad c\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}\,,$$

$$c^2 \in S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}\,.$$

Sei nämlich

$$a_n \in T \subset S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$$

eine unendliche Folge. Man darf auf Grund von 7.3 (nach evtl. Übergang zur inversen und Auswahl) voraussetzen, daß

$$\lim a_n = \mathfrak{e}\,, \quad \lim a_n^{-1} = \mathfrak{e}'\,. \tag{1}$$

13a) $k$ ist hier natürlich nicht Exponent.

Nun ist auch

$$ca_n c^{-1} \in cTc^{-1} \subset S_{\mathfrak{e}} \cap S_{\mathfrak{e}'} \;;$$

man darf also nach 7.3 wiederum voraussetzen, daß

$$\begin{array}{lll} \text{entweder} & \lim ca_n c^{-1} = \mathfrak{e}\,, & \lim ca_n^{-1} c^{-1} = \mathfrak{e}' \\ \text{oder} & \lim ca_n c^{-1} = \mathfrak{e}', & \lim ca_n^{-1} c^{-1} = \mathfrak{e} \end{array}$$

ist, also nach 6.2

$$\begin{array}{lll} \text{entweder} & \text{lin } ca_n = \mathfrak{e}\,, & \lim ca_n^{-1} = \mathfrak{e}' \\ \text{oder} & \lim ca_n = \mathfrak{e}', & \lim ca_n^{-1} = \mathfrak{e}\,, \end{array}$$

d. h. wegen (1)

$$\begin{array}{ll} \text{entweder} & c\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\,, \quad c\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}' \\ \text{oder} & c\mathfrak{e} = \mathfrak{e}', \quad c\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}\,, \end{array}$$

jedenfalls aber

$$c^2\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\,, \quad c^2\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'\,,$$

also

$$c^2 \in S_{\mathfrak{e}} \cap S_{\mathfrak{e}'}\,,$$

w.z.b.w.

7.8. Wir fassen die Ergebnisse zusammen in

Satz 4: 1. Die Untergruppen $S_{\mathfrak{e}}$ der Elemente von $R$, die die Endpunkte $\mathfrak{e}$ bei Linksmultiplikation festlassen, haben zu je dreien einen endlichen Durchschnitt und zu je zweien höchstens dann einen unendlichen Durchschnitt, wenn die zugehörigen Endpunkte zueinander invers sind; in jeder Umgebung jedes inversen Endpunktpaares kann man ein Endpunktpaar finden, für das der Durchschnitt in der Tat unendlich ist.

2. Ist

$$T \text{ unendlich}, \quad T \subset S_{\mathfrak{e}} \cap S_{\mathfrak{e}'}\,, \quad cTc^{-1} \in S_{\mathfrak{e}} \cap S_{\mathfrak{e}'}\,,$$

so ist

$$c\mathfrak{e} = \mathfrak{e}\,, \quad c\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'$$

oder

$$c\mathfrak{e} = \mathfrak{e}', \quad c\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}$$

und

$$c^2 \in S_{\mathfrak{e}} \cap S_{\mathfrak{e}'}\,.$$

7.9. Man kann Satz 4 zu einem abstrakten notwendigen Kriterium für die Existenz unendlich vieler Endpunkte ausgestalten, indem man von der zwischen $S_{\mathfrak{e}}$ und seinem Endpunkt $\mathfrak{e}$ bestehenden Beziehung abstrahiert.

Satz 5: Zu einer Gruppe $G$ mit unendlich vielen Endpunkten gibt es ein System $\Sigma$ von Untergruppen $S$ mit folgender Eigenschaft:

1. $\Sigma$ enthält mit jeder Gruppe alle konjugierten.
2. Jedes Tripel von $\Sigma$ hat einen endlichen Durchschnitt.
3. Es gibt unendlich viel Paare von $\Sigma$ mit unendlichem Durchschnitt.
4. Ist $S_1$, $S_2$ ein Paar von $\Sigma$, $T$ unendlich, $T \subset S_1 \cap S_2$, $cTc^{-1} \subset S_1 \cap S_2$, so ist $c^2 \in S_1 \cap S_2$ und $cS_1c^{-1} = S_1$ oder $S_2$.

Ist die Gruppe obendrein parabolisch, so fällt genau eine der Gruppen $S$ von $\Sigma$ mit $G$ zusammen.

Man nehme natürlich für $\Sigma$ das System aller unendlichen Gruppen $S_e$. Die im parabolischen Fall mit $G$ zusammenfallende Gruppe gehört zum linksinvarianten Endpunkt.

7.10. Als Anwendungsbeispiel beweise ich:

Das direkte Produkt zweier unendlicher Gruppen $G$ und $H$ besitzt genau einen Endpunkt.

(Allerdings kann man diesen Satz mit anderen Methoden einfacher beweisen — siehe die zweite zitierte Arbeit des Verf.[2]), Satz 8 — aber darauf soll es uns hier nicht ankommen.)

Nach Satz 3, (3)—(4) sind die Möglichkeiten „0 und 2 Endpunkte" ausgeschlossen. Wir schließen nun die Möglichkeit „$\infty$ viel Endpunkte" aus.

Seien $\infty$ viel Endpunkte vorhanden. Nach 7.6 gibt es ein Element unendlicher Ordnung

$$c = a \times b\,, \quad a \in G\,, \quad b \in H\,,$$

$$\lim c^n = \mathfrak{e}\,, \quad \lim c^{-n} = \mathfrak{e}'\,.$$

$c$ erzeugt eine unendliche zyklische Gruppe $T \subset S_{\mathfrak{e}} \cap S_{\mathfrak{e}'}$. Nun ist

$$c_0 = 1 \times b$$

mit $T$ elementweise vertauschbar, also nach Satz 4

$$c_0^2 = 1 \times b^2 \in S_{\mathfrak{e}} \cap S_{\mathfrak{e}'}\,.$$

Wegen der Gruppeneigenschaft ist

$$c_{00}^2 = (c_0^{-1}c)^2 = a^2 \times 1' \in S_{\mathfrak{e}} \cap S_{\mathfrak{e}'}\,.$$

$c_0^2$ oder $c_{\infty}^2$ ist von unendlicher Ordnung und erzeugt eine unendliche zyklische Gruppe $T' \subset S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$. Entweder jedes Element von $G$ oder jedes Element von $H$ ist mit $T'$ elementweise vertauschbar. Also nach 7.7:

$$\text{Alle} \quad c \in G \times 1'$$

$$\text{oder alle} \quad c \in 1 \times H$$

vertauschen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ untereinander. Da $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$ in der Gruppe der $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ vertauschenden Linksmultiplikationen vom Index 2 ist, gilt:

$$\text{Unendlich viel} \quad c \in G \times 1'$$

$$\text{oder unendlich viel} \quad c \in 1 \times H$$

liegen in $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$. Durch nochmalige Anwendung von 7.7 folgt hieraus:

$$\text{alle} \quad c \in G \times 1'$$

$$\text{und alle} \quad c \in 1 \times H\,,$$

vertauschen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$, also auch

$$\text{alle} \quad c \in G \times H\,.$$

$S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$ ist also vom Index 2 in $G \times H$,

was der Annahme der Existenz von mehr als einem Endpunkt widerspricht.

## 8. Normalteiler.

8.1. Die Rechtsnebengruppen $Ha$ und $Hb$ von $H$ in $G$ heißen benachbart, wenn $a$ und $b$ benachbart sind. Gilt das für $Ha$ und $Hb$, so gilt sogar: Zu jedem $a' \in Ha$ gibt es ein benachbartes $b' \in Hb$. Man nehme nämlich $a'a^{-1}b$.

8.2. Benachbarte Nebengruppen häufen sich gegen dieselben Endpunkte. Denn sei $\lim a_n = \mathfrak{e}$, $a_n \in Ha$, und sei $Hb$ benachbart zu $Ha$. Dann gibt es zu $a_n$ einen Nachbar $b_n$ in $Hb$: $b_n = a_n u_n$, $u_n \in U$. Da $U$ endlich ist, zerfällt die Folge der $b_n$ in endlich viel Teilfolgen, die nach 6.2 den Limes $\mathfrak{e}$ besitzen. Daraus folgt die Behauptung.

8.3. Je zwei Rechtsnebengruppen von $H$ in $G$ häufen sich gegen dieselben Endpunkte. Man kann ja irgend zwei Elemente, also auch zwei Rechtsnebengruppen von $H$ in $G$ durch eine Kette benachbarter verbinen. Nach 8.2 folgt hieraus die Behauptung.

8.4. $H$ sei eine feste Untergruppe von $G$. $Q$ sei $\in \mathfrak{Q}$. Gilt für *ein* $Ha$

$$Q \cap Ha \quad \text{endlich,}$$

so gilt es für alle $Ha$.

Denn ist $Q \cap Ha$ endlich, so gibt es in $Q$ keinen Endpunkt $\mathfrak{e}$, der Häufungspunkt von $Ha$ ist. Nach 8.3 gilt dieselbe Aussage hinsichtlich eines jeden $Ha$, und da $Q$ Umgebung des etwaigen $\mathfrak{e}$ ist, muß dann auch wieder bzw. $Q \cap Ha$ endlich sein.

8.5. Ist $N$ Normalteiler von $G$, so haben natürlich auch alle Linksnebengruppen von $N$ in $G$ dieselben Häufungspunkte. Andererseits ist nach 6.3, wenn $\mathfrak{e}$ Häufungspunkt von $N$ ist, auch $a\mathfrak{e}$ Häufungspunkt von $aN$. Hieraus folgt:

Mit $\mathfrak{e}$ sind alle $a\mathfrak{e}$ Häufungspunkte von $N$.

Nach 6.11 ergeben sich also zwei Möglichkeiten:

> Satz 5. Ist $N$ Normalteiler von $G$, so häuft sich $N$ entweder gegen alle Endpunkte von $G$, oder es häuft sich gegen genau einen, nämlich den invarianten Endpunkt von $G$.

8.6. Ist $H$ Untergruppe von $G$ und $Q \in Q$ (also $F(Q)$ endlich), so ist für fast alle Rechtsnebengruppen $Ha$

$$Q \cap Ha \quad \text{abgeschlossen in } Ha$$

(also nach 3.5 aus Komponenten von $Ha$ zusammengesetzt).

Denn man hat

$$\mathfrak{F}(Q \cap Ha) \cap Ha \subset \mathfrak{H}(Q \cap Ha) \cap Ha \subset \mathfrak{H}(Q) \cap Ha,$$

also

$$\mathfrak{F}(Q \cap Ha) \cap Ha \subset (\mathfrak{H}(Q) \cap Ha) \setminus (Q \cap Ha) = \mathfrak{F}(Q) \setminus Ha.$$

Die Vereinigung aller

$$\mathfrak{F}(Q \cap Ha) \cap Ha$$

ist also endlich, also sind fast alle leer, d. h. fast alle $Q \cap Ha$ abgeschlossen in ihrem $Ha$.

8.7. Satz 6. Besitzt $G$ einen zusammenhängenden unendlichen Normalteiler mit unendlicher Faktorgruppe, so besitzt $G$ genau einen Endpunkt.

Zum Beweise wenden wir 8.6 auf den zusammenhängenden Normalteiler $N$ an:

Ist $Q \in \mathfrak{Q}$, so gilt für fast alle $aN$:

$$Q \frown aN = 0$$

oder $$= aN\,. \tag{1}$$

Anders formuliert:

$$Q \frown aN \text{ oder } (R \setminus Q) \frown aN = 0 \text{ für fast alle } aN\,, \tag{1'}$$

und da es unendlich viel $aN$ gibt, auch für mindestens eines. Also gilt nach 8.4

$$Q \frown aN \text{ oder } (R \setminus Q) \frown aN \text{ endlich für alle } aN\,. \tag{2}$$

Einer dieser beiden Fälle kann nur eintreten, z. B.

$$Q \frown aN \text{ endlich für alle } aN\,. \tag{2'}$$

Dann muß in (1) auch der Fall

$$Q \frown aN = 0 \text{ für fast alle } aN \tag{1'}$$

eintreten, da $aN$ ja unendlich ist. Die Ausnahme-$aN$, für die hier

$$Q \frown aN \neq 0$$

ist, werden nun durch (2′) erfaßt. Also ist

$$Q \text{ endlich.} \tag{3'}$$

Hat man hingegen statt (2′)

$$(R \setminus Q) \frown aN \text{ endlich für fast alle } aN, \tag{2''}$$

so schließt man analog:

$$R \setminus Q \text{ endlich.} \tag{3''}$$

Alle $Q \in \mathfrak{Q}$ befinden sich also im Falle (3′) oder im Falle (3″), d. h. sie sind bis auf endlich viel Elemente mit $0$ oder $G$ identisch. Es kann daher keine zwei Endpunkte geben (die ja disjunkte Umgebungen $Q$ haben müßten). Da $G$ unendlich ist, gibt es demnach genau einen Endpunkt.

8.7. Zusatz zu Satz 6: Besitzt $G$ einen unendlichen Normalteiler von endlich viel Erzeugenden mit unendlicher Faktorgruppe, so besitzt $G$ genau einen Endpunkt.

Wählt man nämlich, wenn eine Gruppe $G$ von endlich vielen Erzeugenden und eine Untergruppe $H$ gegeben sind, das System $U$ für $G$ (gemäß 5.1) so, daß es ein Erzeugendensystem von $H$ als Teilmenge enthält, so stimmt der Nachbarschaftsbegriff in $H$ mit dem von $G$ induzierten überein und $H$ wird zusammenhängend. Daraus ergibt sich der Zusatz.

Daraus folgt insbesondere: Eine freie Gruppe von endlich vielen Erzeugenden besitzt keine Normalteiler von endlich vielen Erzeugenden und unendlichem Index. — Jedoch kann man das leicht auch direkt beweisen.

Bemerkung zu Satz 5: Der Satz erinnert an Satz 18 meiner Dissertation[1]): Besitzt die abgeschlossene Untergruppe von $G$ genau einen Endpunkt, so besitzt auch $G$ genau einen Endpunkt. Etwas Derartiges gilt bei diskreten Gruppen nicht; man kann die Forderung, daß $N$ ein Normalteiler sein soll, nicht fallen lassen, wenn man den Satz aufrecht erhalten will. Beispiel: Die Gruppe von 4 Erzeugenden $u_1, u_2, v_1, v_2$ und den Relationen $u_1u_2 = u_2u_1$, $v_1v_2 = v_2v_1$, von der man genau wie von der Gruppe 6.17.4 beweist, daß sie unendlich viel Endpunkte besitzt. Man sieht ohne weiteres, daß sie eine — sogar abgeschlossene — Untergruppe mit genau einem Endpunkt besitzt, z. B. die von $u_1$, $u_2$ erzeugte.

Bemerkung zu Satz 6: Dieser Satz erinnert an Satz 8 meiner Dissertation: Das kartesische Produkt zweier nichtkompakter Räume hat genau einen Endpunkt. Er ist mit diesem Satz auch begrifflich verwandt. Übrigens ist natürlich auch 7.10 als einfache Folge von Satz 6 einzusehen.

Die Frage liegt nahe, ob auch für die in meiner Dissertation behandelten Gruppen ein Analogon des Satzes 6 gilt. Die Frage ist zu bejahen, selbst unter den weiteren Voraussetzungen meiner unter[2]) zitierten Arbeit. Wir zeigen das im Anhang.

## 9. Darstellungen diskreter Gruppen.

9.1. $\breve{R}$ sei ein im kleinen kompakter, im kleinen zusammenhängender, zusammenhängender Raum mit 2. Abzählbarkeitsaxiom. Die diskrete Gruppe $G$ sei dargestellt durch topologische Selbstabbildungen von $\breve{R}$. $a \in G$ entspricht $f_a(\breve{R}) = \breve{R}$.

Die Darstellung sei stark diskontinuierlich[14]), d. h.:

> Sind $A$ und $B$ kompakt in $R$, so ist $f_a(A) \frown B = 0$ für fast alle $a$.

Die Darstellung besitze eine kompakte Fundamentalmenge[14]) $M$, d. h.:

$$\bigcup_{a \in G} f_a(M) = R .$$

9.2. In $\breve{R}$ existiert eine Folge kompakter Gebiete $V_1, V_2, \ldots$ die $\breve{R}$ überdeckt, und je zwei der $V$ lassen sich durch eine Kette von $V$ verbinden, in der jedes mit dem folgenden einen Punkt gemeinsam hat. (Siehe 4.5.)

Nach dem bekannten Überdeckungssatz gibt es ein $p$, so daß die kompakte Fundamentalmenge

$$M \subset V_1 \smile \cdots \smile V_p$$

liegt. Wegen der Ketteneigenschaft gibt es ein $q \geqq p$, so daß

$$M^* = V_1 \smile \cdots \smile V_q$$

zusammenhängend ist. $M^*$ ist also ein kompaktes Fundamental*gebiet*.

9.3. Die Transformierten $f_a(M^*)$ sind ebenfalls kompakte Gebiete und überdecken ganz $\breve{R}$. Sie bilden ein System $\mathfrak{V}$ im Sinne von 4.5. (Zusammenfallende $V$ werden mehrfach gezählt.) Insbesondere ist (K′) erfüllt wegen der starken Diskontinuität von $G$. Wir können also die $f_a(M^*)$ als Elemente eines Nachbarschaftsraumes $R$ auffassen, mit

$$\overline{f_a(M^*)} \frown \overline{f_b(M^*)} \neq 0$$

als Nachbarschaftsbegriff. Nach 4.5 sind dann (K), (S), (Z) erfüllt.

9.4. Die Teilmenge $U$ von $G$ werde so definiert:

$$a \in U, \quad \text{wenn} \quad f_a(M^*) \frown M^* \neq 0 .$$

Zu jedem

$$f_c(M^*)$$

gibt es eine Kette

---

[14]) Beide Definitionen bei *Hopf*, l. c., S. 88, 90.

$$f_{b_1}(M^*), f_{b_2}(M^*), \ldots, f_{b_t}(M^*)$$

mit

$$b_1 = 1, \quad b_t = c$$

$$\overline{f_{b_i}(M^*)} \cap \overline{f_{b_{i+1}}(M^*)} \neq 0,$$

also

$$\overline{f_{b_i^{-1} b_{i+1}}(M^*)} \cap \overline{M^*} \neq 0,$$

also

$$b_i^{-1} b_{i+1} \in U.$$

Hieraus folgt

$$c = b_1^{-1} b_2 \cdot b_2^{-1} b_3 \cdots b_{t-1}^{-1} b_t,$$

d. h. ein Produkt von Elementen aus $U$. $U$ ist demnach ein erzeugendes System.

9.5. Es ist klar, daß die Nachbarschaftsbegriffe von $G$ (siehe 9.4) und $R$ (siehe 9.3) zusammenfallen, sobald man $a$ mit $f_a(M^*)$ identifiziert. Dasselbe gilt dann auch für die Endentheorien. Nach 4.6 kann man weiter die Endentheorien von $R$ und $\breve{R}$ identifizieren, und damit gelangt man zu dem

Satz 7: Die Gruppe $G$ von endlich vielen Erzeugenden sei dargestellt in einem Raum $\breve{R}$ (siehe 9.1); die Darstellung sei stark diskontinuierlich und besitze eine kompakte Fundamentalmenge. Die Endentheorien von $G$ und $\breve{R}$ fallen zusammen, wenn man eine Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ von $G$ identifiziert mit

$$\bigcup_{a \in Q} f_a(M^*),$$

wo $M^*$ irgendein Fundamental*gebiet* ist. Insbesondere haben $G$ und $\breve{R}$ gleichviel Endpunkte[15]).

## 10. Anhang.

10.1. Wir beschäftigen uns noch mit den im Kleinen kompakten, zusammenhängenden Gruppen $G$ mit 2. Abzählbarkeitsaxiom. (Siehe [2]).) Wir beweisen

[15]) Bei Hopf sind die Endpunkte von $\breve{R}$ primär. Die Tatsache, daß zwei Räume $\breve{R}$ mit demselben $G$ dieselbe Anzahl Endpunkte haben, wies auf die Möglichkeit einer Endpunkttheorie von $G$ hin (Hopf, l. c., S. 96).

Satz 8 $G$ besitze einen zusammenhängenden, abgeschlossenen nichtkompakten Normalteiler mit nichtkompakter Faktorgruppe[16]). Dann besitzt $G$ genau einen Endpunkt.

10.2. $\mathfrak{R}$ bezeichne die Randbildung in $R$. $Q$ sei eine offene Menge mit kompaktem Rand.

Wir sagen, daß eine Eigenschaft gilt für „nahezu alle" Elemente einer Menge, wenn sie nur in einer kompakten Teilmenge nicht gilt.

Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{R}(Q)$ bilden die $aN$ mit

$$\mathfrak{R}(Q) \frown aN \neq 0$$

eine kompakte Teilmenge der Faktorgruppe $G/N$. Für nahezu alle $aN$ gilt demnach

$$\mathfrak{R}(Q) \frown aN = 0\,,$$

und da mit $N$ auch $aN$ zusammenhängend ist:

$$Q \frown aN = 0$$

oder

$$= aN\,.$$

Anders formuliert

$$Q \frown aN = 0$$

für nahezu alle $aN$. (1)

oder

$$(R \setminus \overline{Q}) \frown aN = 0$$

Je zwei Nebengruppen $aN$ häufen sich (wegen der Invarianz der Endpunkte bei Multiplikationen[17])) gegen dieselben Endpunkte. Ist $Q \frown a_0 N$ kompakt, so muß darum auch jedes $Q \frown aN$ kompakt sein; andernfalls gäbe es ja in $Q$ einen Endpunkt, gegen den $aN$, aber nicht $a_0 N$ sich häufte.

Da $G/N$ nicht kompakt ist, folgt aus (1) die Existenz eines $a_0$ mit

$$Q \frown a_0 N = 0 \quad \text{(also kompakt)}$$

oder

$$(R \setminus \overline{Q}) \frown a_0 N = 0 \quad \text{(also kompakt)};$$

also gilt

$$Q \frown a_0 N \quad \text{oder } (R \setminus \overline{Q}) \frown aN \text{ kompakt für alle } aN. \tag{2}$$

---

[16]) Das Nötige über Normalteiler und Faktorgruppen findet man bei Verf., Einige Sätze über topologische Gruppen, Annals of Math. 37 (1936), 46—56, oder bei *D. van Dantzig*, Zur topologischen Algebra, I, Math. Annalen 107 (1932), 587—626.

[17]) Siehe [3]), Satz 8. Man kann sich aber auch mit [1]), Satz 9, begnügen.

Einer der beiden Fälle kann nur eintreten, z. B.

$$Q \frown aN \quad \text{kompakt für alle } aN. \tag{2'}$$

Dann muß in (1) auch notwendigerweise der Fall

$$Q \frown aN = 0 \quad \text{für nahezu alle } aN \tag{1'}$$

eintreten.

Sei nun irgendeine Folge

$$a_n \in Q$$

gegeben. Nach (1′) bilden die $a_nN$ eine kompakte Menge in $G/N$, und wir dürfen — nach Auswahl — die Existenz von

$$\lim a_nN = aN$$

annehmen, d. h. die Existenz von

$$b_n \in N\,, \quad b \in N \tag{3}$$

mit

$$\lim a_n b_n = ab\,. \tag{4}$$

Aus (3) folgt, daß die Folgen

$$a_n \quad \text{und} \quad b_n^{-1}$$

sich gegen dieselben Endpunkte häufen; da $Q$ eine Umgebung dieser Endpunkte ist, gilt

$$b_n^{-1} \in Q$$

für fast alle $n$. (3) und (5) liefern (5)

$$b_n^{-1} \in Q \frown N\,,$$

also ist nach (2′) die Folge

$$b_n^{-1} \quad \text{kompakt.} \tag{6}$$

(4) und (6) zusammen liefern, daß

$$a_n \quad \text{kompakt}$$

ist, daß man also aus jeder Folge von $Q$ eine kompakte auswählen kann, d. h.

$$Q \quad \text{kompakt.} \tag{7'}$$

Hätte man nun statt (2′)

$$(R \setminus Q) \frown aN \quad \text{kompakt für alle } aN, \tag{2″}$$

so schlösse man genau so auf

$$R \setminus \overline{Q} \quad \text{kompakt.} \tag{7″}$$

Alle $Q$ befinden sich also im Falle (7′) oder (7″). Sie sind alle nahezu $= 0$ oder nahezu $= G$. Es kann daher keine zwei verschiedenen Endpunkte geben (die ja disjunkte Umgebungen haben müßten). Da $G$ nicht kompakt ist, besitzt es also genau einen Endpunkt.

(Eingegangen den 1. März 1944.)