Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1944-1945)

Artikel: Über Punktverteilungen auf der Kugelfläche.
Autor: Rutishauser, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16346

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über Punktverteilungen auf der Kugelfläche

Von H. Rutishauser, Bern

Mit V_n sei eine Verteilung von n Punkten auf der Oberfläche der Einheitskugel bezeichnet, mit $\Delta(V_n)$ die kleinste sphärische Distanz, welche durch die $\binom{n}{2}$ Punktepaare von V_n geliefert wird. Es ist anschaulich klar, daß $\Delta(V_n)$ für ein fest vorgegebenes n $(n \geqq 2)$ nicht zu groß sein kann, und es wird von Interesse sein, den genauen Wert von

$$\Delta_n = \text{fin sup } \Delta(V_n) \tag{1}$$

zu kennen[1]). Δ_n bedeutet also den größten Wert, den die kleinste Distanz bei einer Verteilung von n Punkten auf der Einheitskugel annehmen kann. Daß wirklich Punktverteilungen existieren, die diesen extremalen Wert der kleinsten Distanz liefern, kann leicht aus der Kompaktheit und Abgeschlossenheit der Kugelfläche gefolgert werden; solche Verteilungen sollen als „extremale Punktverteilungen" bezeichnet werden. Bei der Ermittlung des exakten Wertes von Δ_n scheint man jedoch, abgesehen von einigen Ausnahmewerten für n, auf erhebliche Schwierigkeiten zu stoßen; man hat sich daher vorläufig mit Abschätzungsformeln zu begnügen. So hat *L. Fejes*[2]) kürzlich eine Abschätzungsformel

$$\cos \Delta_n \geqq \frac{1}{2}\left\{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6}\right) - 1\right\} \qquad (n \geqq 3) \tag{2}$$

gefunden, die bemerkenswerterweise für $n = 3, 4, 6$ und 12 scharf ist. Diese Formel liefert also für die angegebenen n die exakten Werte von Δ_n.

Es ist zu erwarten, daß diejenigen n, welche regelmäßige Punktverteilungen V_n, insbesondere Eckpunktsverteilungen regulärer Polyeder gestatten, innerhalb unseres Fragenkreises eine ausgezeichnete Rolle spielen werden. Für $n = 2$ und $n = 3$ sind die extremalen Verteilungen durch ein antipodisches Punktepaar und durch die Eckpunkte eines

---

[1]) Unter fin sup $\Delta(V_n)$ verstehen wir die obere Grenze aller Werte $\Delta(V_n)$.

[2]) *L. Fejes*, Über eine Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. Jahresbericht der D. M. V. 53 (1943), 66—68. Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn die n Punkte die Ecken eines regulären Dreieckspolyeders bilden.

einem Großkreis einbeschriebenen regulären Dreiecks gegeben. In diesen trivialen Fällen findet man für die entsprechenden Δ_n

$$\begin{aligned} \cos \Delta_2 &= -1 \\ \cos \Delta_3 &= -\tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Für $n = 4, 6, 8, 12$ und 20 liegt ein Vergleich mit den Eckpunktsverteilungen der 5 regulären Polyeder sehr nahe. Nach den Untersuchungen von *L. Fejes*[3]) ergibt dieser Vergleich

$$\left.\begin{aligned} \cos \Delta_4 &= -\frac{1}{3} = -0{,}3333\ldots && \text{(Tetraeder)} \\ \cos \Delta_6 &= 0 = 0{,}0000\ldots && \text{(Oktaeder)} \\ \cos \Delta_8 &< \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots && \text{(Hexaeder)} \\ \cos \Delta_{12} &= \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472\ldots && \text{(Ikosaeder)} \\ \cos \Delta_{20} &< \frac{\sqrt{5}}{3} = 0{,}7454\ldots && \text{(Dodekaeder)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Darstellung zeigt uns, daß das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder Punktverteilungen liefern, die in unserm Sinne extremal sind; für das Hexaeder und das Dodekaeder trifft dies dagegen nicht zu. Für $n = 8$ und $n = 20$ ergeben sich aus der Abschätzung (2) und unter Verwendung der Werte (4) folgende Schranken für Δ_n:

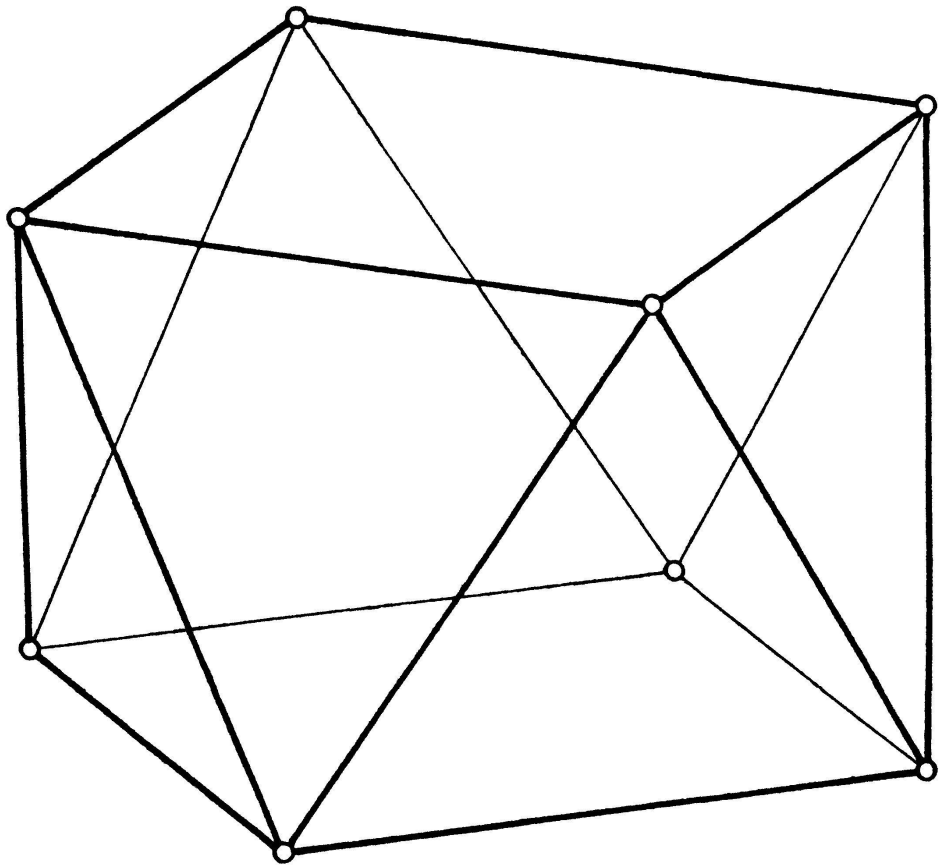
$$\begin{aligned} 0{,}2101\ldots < \cos \Delta_8 &< 0{,}3333\ldots \\ 0{,}6558\ldots < \cos \Delta_{20} &< 0{,}7454\ldots. \end{aligned} \tag{5}$$

Es erhebt sich nun die Frage nach solchen Punktverteilungen (Polyedern), die in bezug auf die von uns aufgestellte Extremalforderung das Hexaeder und das Dodekaeder zu ersetzen oder wenigstens zu verbessern vermögen. Es sollen im folgenden zwei Polyeder beschrieben werden, die in unserer Fragestellung eine Verbesserung des Hexaeders und des Dodekaeders darstellen, d. h. die bei diesen zwei neuen Verteilungen auftretenden kleinsten Distanzen sind größer als die durch die entsprechenden regulären Polyeder realisierten Distanzen[4]).

[3]) *L. Fejes*, Die regulären Polyeder als Lösungen von Extremalaufgaben. Matematikai és Természettudományi Értesitö LXI (1942), 471—477.

[4]) Diese Untersuchungen wurden im Winter 1942/43 bei Herrn Prof. *H. Hadwiger* im Math. Seminar der Universität Bern durchgeführt.

Das Polyeder A, eine V_8, entsteht aus dem Würfel, indem zuerst die Deckfläche um $\frac{\pi}{4}$ um die z-Achse gedreht wird; hierauf werden 4 neue Kanten gezogen, so daß längs des Äquators eine Zone aus 8 gleichschenkligen Dreiecken entsteht, schließlich werden Grund- und Deckfläche so weit gegen den Äquator zusammengeschoben, bis die Dreiecke gleichseitig sind. Das Polyeder besitzt also 8 Ecken, 10 Flächen und 16 Kanten (vgl. Figur A).

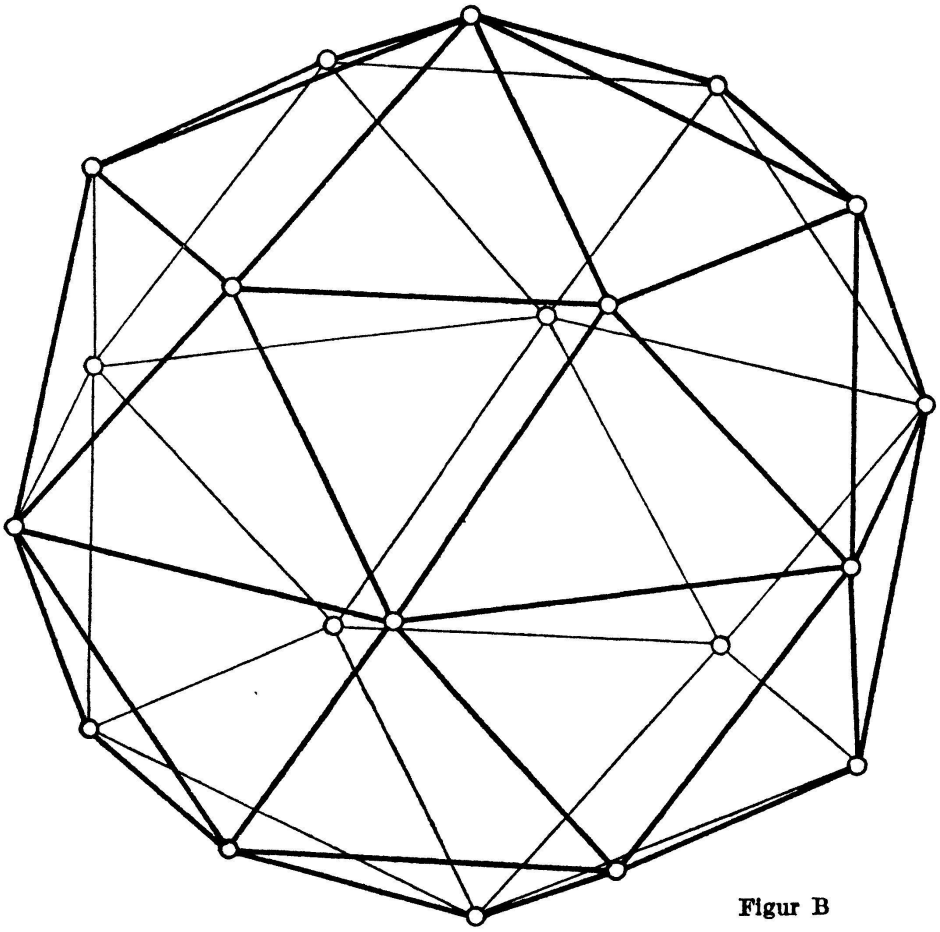


Figur A

Der Körper B, eine V_{20}, ist ein Dreieckspolyeder mit der Äquatorebene als Symmetrie-Ebene. Jede der beiden symmetrischen Hälften setzt sich zusammen aus 6 gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis im Äquator und einer Zone von 6 gleichseitigen Dreiecken mit der Spitze im Äquator; abgeschlossen wird der Körper an den beiden Polen durch Kappen von je 6 gleichschenkligen Dreiecken. Dieses Polyeder enthält also 20 Ecken, 36 Flächen und 54 Kanten (vgl. Figur B).

Zur Festlegung dieser beiden, der Einheitskugel einbeschriebenen, Polyeder A und B geben wir die Koordinaten x, y, z ihrer Eckpunkte,

bezogen auf ein rechtwinkliges System. In der unten folgenden Tabelle sind alle sich aus den doppelsinnigen Vorzeichen ergebenden Möglichkeiten zu berücksichtigen.



Figur B

Polyeder A		
x	y	z
$\pm\sqrt{2}\,u$	0	a
0	$\pm\sqrt{2}\,u$	a
$\pm u$	$\pm u$	$-a$
Polyeder B		
x	y	z
0	0	± 1
$\pm\sqrt{3}\,v$	$\pm v$	$\pm b$
0	$\pm 2v$	$\pm b$
± 1	0	0
$\pm w$	$\pm\sqrt{3}\,w$	0

$$a = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{8}}}$$

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{8}}}$$

$$b = \sqrt{\frac{\sqrt{33}-5}{2}}$$

$$v = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{4}$$

$$w = \tfrac{1}{2}$$

Für die kleinsten Punktdistanzen ergibt eine elementar durchführbare Musterung

$$\cos \Delta(A) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}$$
$$\cos \Delta(B) = \frac{\sqrt{33} - 3}{4} \quad . \tag{6}$$

Auf Grund der beiden Resultate (6) können die in der Tabelle (5) angeführten Ungleichungen wesentlich verschärft werden, indem nun

$$\cos \Delta_8 \leqq \frac{2\sqrt{2} - 1}{7} = 0{,}2612\ldots$$
$$\cos \Delta_{20} \leqq \frac{\sqrt{33} - 3}{4} = 0{,}6861\ldots$$

gilt. Ob hierbei das Gleichheitszeichen in Betracht fällt, d. h. ob diese beiden Polyeder extremal sind oder nicht, konnte bisher noch nicht entschieden werden. Würde dies zutreffen, so könnte der Nachweis etwa durch eine Abschätzungsformel, die für $n = 8$ und $n = 20$ ebenfalls scharf ist (nicht der Fall bei der *Fejes*schen Formel (2)) geliefert werden.

(Eingegangen den 24. Mai 1945.)