Über flächenläufige Bewegungsvorgänge

Von Wilhelm Blaschke, Hamburg

1. *E. Studys Übertragungsprinzip.*

Es sei $\{\mathfrak{o};\, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ ein Cartesisches Achsenkreuz, $\mathfrak{o}$ sein Ursprung, $\mathfrak{e}_j$ die paarweis rechtwinkligen Einheitsvektoren auf den Achsen. Wir betrachten zwei Vektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \overrightarrow{\mathfrak{o}\mathfrak{x}} = \mathfrak{e}_1 x_1 + \mathfrak{e}_2 x_2 + \mathfrak{e}_3 x_3 \,, \\ \mathfrak{y} &= \overrightarrow{\mathfrak{o}\mathfrak{y}} = \mathfrak{e}_1 y_1 + \mathfrak{e}_2 y_2 + \mathfrak{e}_3 y_3 \end{aligned} \tag{1}$$

gleichzeitig als Vertreter ihrer Endpunkte. Diese sollen die Entfernung Eins haben:

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}) = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = 1\,. \tag{2}$$

Wir führen den „*Richtungsvektor*“

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{y} - \mathfrak{x} \tag{3}$$

ein und den „*Momentenvektor*“ um den Ursprung, nämlich

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = \mathfrak{e}_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + \mathfrak{e}_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + \mathfrak{e}_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)\,. \tag{4}$$

Darin bedeutet $\times$ das „*Vektorprodukt*“.

Zwischen $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}$ bestehen die Beziehungen für ihre Skalarprodukte

$$\mathfrak{g}\mathfrak{g} = 1, \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}} = 0\,. \tag{5}$$

Umgekehrt gehört zu jedem Vektorpaar, das diese Bedingungen erfüllt, eine gerichtete Gerade („*Achse*“) $\mathfrak{G}$ unseres Euklidischen R_3.

Die Bedingung dafür, daß $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{G}$ liegt, lautet

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{g}\,. \tag{6}$$

Aus reellen Zahlen $a, \bar{a}$ bauen wir „duale“ auf mittels der dualen Einheit ε:

$$A = a + \varepsilon\bar{a}\,, \tag{7}$$

die der Rechenregel genügt

$$\varepsilon^2 = 1\,. \tag{8}$$

Sonst sollen die gewöhnlichen Rechenregeln ihre Gültigkeit behalten, nur kann ein Produkt Null sein, ohne daß ein Faktor verschwindet. Es gibt nämlich die „Nullteiler“ $\varepsilon\bar{a}$. Entsprechend bilden wir aus dem reellen Vektorpaar $\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}}$ den dualen Vektor

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g} + \varepsilon\bar{\mathfrak{g}} . \tag{9}$$

Dann lassen sich die Bedingungen (5) in die einzige zusammenfassen

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G} = 1 . \tag{10}$$

Damit sind die dualen Einheitsvektoren oder die „Punkte auf der dualen Einheitskugel“ eineindeutig den (reellen, eigentlichen) Achsen des Euklidischen R_3 zugeordnet.

Das Skalarprodukt zweier solcher Vektoren $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ gibt ausführlich

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}' = \mathfrak{g}\mathfrak{g}' + \varepsilon(\bar{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}' + \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}') . \tag{11}$$

Darin ist der Dualteil

$$\bar{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}' + \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}' = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & x_1' & x_2' & x_3' \\ 1 & y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} \tag{12}$$

gleich dem sechsfachen Vierflachinhalt über den 4 Ecken $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}; \mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$. Nennt man φ den Winkel und $\bar{\varphi}$ den kürzesten Abstand der Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, so wird bei geeigneter Vorzeichenwahl demnach

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}' = \cos\Phi$$

mit (13)

$$\Phi = \varphi + \varepsilon\bar{\varphi}, \quad \cos\Phi = \cos\varphi - \varepsilon\bar{\varphi}\sin\varphi .$$

Darin wird eine analytische Funktion einer dualen Veränderlichen durch ihre Potenzreihe erklärt. Insbesondere bedeutet das Verschwinden des Skalarprodukts

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}' = 0 \tag{14}$$

rechtwinkliges Schneiden der Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$.

Wir setzen jetzt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{e}_1 G_1 + \mathfrak{e}_2 G_2 + \mathfrak{e}_3 G_3 \tag{15}$$

und betrachten die Geradenzuordnung $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}^*$, die einer eigentlichen orthogonalen Substitution

$$G_j^* = \Sigma\, C_{jk} G_k \tag{16}$$

mit dualen C_{jk} entspricht. Sie stellen eine stetige Gruppe G_6 mit 3 dualen, also 6 reellen wesentlichen Parametern dar, bei der das Skalarprodukt (13) erhalten bleibt. Die entsprechenden Geradenabbildungen des R_3 sind wegen (13), (14) die *Bewegungen* des R_3. Das ist der Grundgedanke von E. Studys „Übertragungsprinzip" aus seiner „Geometrie der Dynamen", Leipzig 1903.

2. *Flächenläufige Bewegungsvorgänge.* Betrachten wir nun ein Tripel paarweis rechtwinkliger Achsen $\mathfrak{A}_j$; $j = 1, 2, 3$, die sich in einem Punkt $\mathfrak{p}$ schneiden. Dieses „bewegte" Achsenkreuz soll von zwei reellen Parametern u, v abhängen. Dann ist uns durch diese Achsen

$$\mathfrak{A}_j(u, v)\,; \quad \mathfrak{A}_j \mathfrak{A}_k = \delta_{jk}$$

ein zweigliedriger oder „flächenläufiger" Bewegungsvorgang eines starren Körpers $\mathfrak{K}(u, v)$ gegeben, den wir uns an den $\mathfrak{A}_j$ befestigt denken. Dann können wir die vollständigen Differentiale $d\mathfrak{A}_j$ unserer Vektoren aus den $\mathfrak{A}_j$ selbst zusammensetzen und finden so

$$d\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 \Omega_3 - \mathfrak{A}_3 \Omega_2,\; d\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 \Omega_1 - \mathfrak{A}_1 \Omega_3,\; d\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 \Omega_2 - \mathfrak{A}_2 \Omega_1. \quad (1)$$

Darin bedeuten die Ω_j

$$\Omega_j = \omega_j + \varepsilon \overline{\omega}_j \quad (2)$$

duale Pfaffsche Formen in u, v.

Ausführlich sehen die Gleichungen (1) so aus

$$\begin{aligned} d\mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a}_2\omega_3 - \mathfrak{a}_3\omega_2, & d\overline{\mathfrak{a}}_1 &= \mathfrak{a}_2\overline{\omega}_3 - \mathfrak{a}_3\overline{\omega}_2 + \overline{\mathfrak{a}}_2\omega_3 - \overline{\mathfrak{a}}_3\omega_2\,, \\ d\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a}_3\omega_2 - \mathfrak{a}_1\omega_3, & d\overline{\mathfrak{a}}_2 &= \mathfrak{a}_3\overline{\omega}_1 - \mathfrak{a}_1\overline{\omega}_3 + \overline{\mathfrak{a}}_3\omega_1 - \overline{\mathfrak{a}}_1\omega_3\,, \\ d\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{a}_1\omega_2 - \mathfrak{a}_2\omega_1, & d\overline{\mathfrak{a}}_3 &= \mathfrak{a}_1\overline{\omega}_2 - \mathfrak{a}_2\overline{\omega}_1 + \overline{\mathfrak{a}}_1\omega_2 - \overline{\mathfrak{a}}_2\omega_1\,. \end{aligned} \quad (3)$$

Für den Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{A}_j$ gilt nach (1, 6)

$$\overline{\mathfrak{a}}_j = \mathfrak{p} \times \mathfrak{a}_j\,. \quad (4)$$

Setzen wir für den Augenblick

$$d\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1\sigma_1 + \mathfrak{a}_2\sigma_2 + \mathfrak{a}_3\sigma_3\,, \quad (5)$$

so folgt aus (4) durch Ableitung $\sigma_j = \overline{\omega}_j$.

Somit tritt an Stelle von (5)

$$d\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1\overline{\omega}_1 + \mathfrak{a}_2\overline{\omega}_2 + \mathfrak{a}_3\overline{\omega}_3\,. \quad (6)$$

3. *Normalgeraden.* Betrachten wir jetzt eine mit dem Achsenkreuz der $\mathfrak{A}_j$ starr verbundene Gerade $\mathfrak{G}$ mit festen G_j:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 G_1 + \mathfrak{A}_2 G_2 + \mathfrak{A}_3 G_3 \,. \tag{7}$$

Durch Ableitung folgt mittels (2, 1)

$$d\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1(G_3\Omega_2 - G_2\Omega_3) + \mathfrak{A}_2(G_1\Omega_3 - G_3\Omega_1) + \mathfrak{A}_3(G_2\Omega_1 - G_1\Omega_2) \,. \tag{8}$$

Für das vom dualen Punkt $\mathfrak{G}$ auf der Einheitskugel beschriebene duale Flächenelement folgt

$$G_1[\Omega_2\Omega_3] + G_2[\Omega_3\Omega_1] + G_3[\Omega_1\Omega_2] \,. \tag{9}$$

Daraus für seinen Realteil

$$g_1[\omega_2\omega_3] + g_2[\omega_3\omega_1] + g_3[\omega_1\omega_2] \tag{10}$$

und den Dualteil

$$\bar{g}_1[\omega_2\omega_3] + g_1([\bar{\omega}_2\omega_3] + [\omega_2\bar{\omega}_3]) + \cdots \,. \tag{11}$$

Darin bedeuten die Punkte Reih-um-Vertauschung der Marken $1, 2, 3$. Setzen wir den Dualteil gleich Null, so erhalten wir die lineare Gleichung in den Linienzeigern g_j, $\bar{g}_j$

$$\sum_j (\bar{c}_j g_j + c_j \bar{g}_j) = 0 \tag{12}$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= [\omega_2\omega_3], & c_1 &= [\bar{\omega}_2\omega_3] + [\omega_2\bar{\omega}_3] \,, \\ \bar{c}_2 &= [\omega_3\omega_1], & c_2 &= [\bar{\omega}_3\omega_1] + [\omega_3\bar{\omega}_1] \,, \\ \bar{c}_3 &= [\omega_1\omega_2], & c_3 &= [\bar{\omega}_1\omega_2] + [\omega_1\bar{\omega}_2] \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Unter den eckigen Klammern in (9) — (13) verstehen wir dabei alternierende Produkte der Pfaffschen Formen:

$$[a\,du + b\,dv,\, a'du + b'dv] = (ab' - ba')\,[du, dv] \,. \tag{14}$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß die Bedingung (12) folgende einfache geometrische Bedeutung hat: $\mathfrak{G}$ beschreibt im allgemeinen eine zweigliedrige Schar von Geraden und die Realität des zugehörigen dualen Flächenelements besagt, daß die sogenannten „Brennebenen" durch die Gerade $\mathfrak{G}$ in ihrer Schar (Tangentenebenen an die Brennflächen) zueinander rechtwinklig sind. Anders ausgedrückt: Es gibt eine „Normalenschar" (Geraden, die eine Fläche rechtwinklig schneiden), die unsere Schar in $\mathfrak{G}$ in erster Ordnung berührt. Wir sprechen dann von einer „*Normalgeraden*" in ihrer Schar. Besteht eine Schar nur aus Normalgeraden, so ist sie eine Normalenschar. Die lineare Gleichung (12) stellt im allgemeinen einen „linearen Komplex" oder ein „Gewinde" von Geraden dar, das A. Ribaucour (Paris C. R. 1876, S. 1347) in die Kinematik eingeführt hat. Damit ist gezeigt: *Für eine reguläre*[1]) *Stelle u, v eines zweigliedrigen Bewegungsvorganges $\mathfrak{K}(u, v)$ bilden die mit $\mathfrak{K}$ starr verbundenen Geraden $\mathfrak{G}$, die Normalgeraden ihrer Scharen beschreiben, das Gewinde* (13).

Für eine reguläre Stelle[1]) von $\mathfrak{K}(u, v)$ können alle c_j, $\bar{c}_j$ nur dann verschwinden, wenn $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ ist, so daß die unendlich kleinen Bewegungen $\mathfrak{K}(u, v) \rightarrow \mathfrak{K}(u + du, v + dv)$ alle Schiebungen sind. Ein ähnliches Ergebnis gilt auch, wenn man anstelle der „Normalgeraden" die „isotropen Geraden" treten läßt, bei denen die Lote zu den Nachbargeraden der Schar ein Büschel bilden.[2])

Wegen der hier benutzten Hilfsmittel aus der Liniengeometrie vergleiche man auch das letzte Kapitel des ersten Bandes meiner „Vorlesungen über Differentialgeometrie".

---

[1]) d. h. es soll zwischen den Ω_j zwei linear unabhängige geben.

[2]) Vgl. *W. Blaschke,* Archiv für Math. u. Phys. (3) 17 (1911), S. 194—195.

(Eingegangen den 30. Oktober 1944.)