Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1944-1945)

Artikel: Ein Beispiel zum Randwertproblem der Variationrechnung.
Autor: Bieri, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16342

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Beispiel zum Randwertproblem der Variationsrechnung [1]

Von Hans Bieri, Herzogenbuchsee

Das obgenannte Problem besteht in einem einfachen Spezialfalle darin, durch zwei Punkte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ einer (x_1, x_2)-Ebene eine Kurve zu legen mit der Eigenschaft, daß das Kurvenintegral $\int_{\overline{P}}^{\overline{Q}} F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)\, dt$ ein relatives starkes Minimum liefert.

Es hält sehr schwer, Beispiele zu finden, die man vollständig durchrechnen kann, was bei der Fülle von Bedingungen nicht verwunderlich ist. Der Wert solcher Bemühungen liegt darin, daß die höchst verwickelten Phänomene der allgemeinen Theorie ihre konkrete Verwirklichung finden und sogar die Möglichkeit besteht, neuartige Erscheinungen festzustellen.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit drei verwandten Variationsproblemen, von denen das interessanteste den Kneserschen Ausnahmefall[2]) illustriert und zeigt, daß trotz der Abwesenheit singulärer Linienelemente beim Randwertproblem Komplikationen auftreten können. Die direkte Lösungsmethode unseres Problems besitzt den Nachteil, daß Extremalenbögen, die a priori kein Minimum liefern, nicht sofort ausgeschieden werden[3]). Dies kann vermieden werden, wenn man die Gleichungen der ausgezeichneten Extremalenschar $x_i = x_i(t, \varkappa, \xi, \eta)$ als Abbildung deutet. Die Halbgeraden $\varkappa =$ konst; $0 \leqslant t < \infty$, Originale der Extremalenbögen in einer $(t, \varkappa)$-Ebene, bedecken diese einfach und lückenlos. Durch passende Beschneidung der genannten Ebene (was einer Einschränkung der Abbildung gleichkommt) sucht man zu erreichen, daß mindestens ein gewisses Gebiet $\overline{G}$ der (x_1, x_2)-Ebene durch die Bilder in gleicher Weise ausgefüllt wird, so daß der Anschluß an den

---

[1]) Hauptliteratur: *C. Carathéodory*, Variationsrechnung, wird künftig unter *C* zitiert. *H. Bieri*, Beispiele zum Randwertproblem der Variationsrechnung, Diss. 1941, wird mit *D* zitiert. *C* sind die allgemeinen Bezeichnungen entnommen; die spezielleren stammen vorwiegend aus *D*. Insbesonders bedeuten: t den Kurvenparameter, τ seinen Wert im Berührungspunkt mit der Enveloppe, T_i sonstige t-Werte, $\varkappa$ den Scharparameter, der mit der Richtung der Extremalen im Knotenpunkte verknüpft ist, ξ und η Rationalisierungsgrößen. Alle Größen der Bildebene werden, sobald der Abbildungssatz im Spiele ist, überstrichen. Sin, Cos, Tg bedeuten die bekannten hyperbolischen Funktionen.

[2]) *C*: 356, S. 294—295.

[3]) *C*: 360, S. 297—302.

Idealfall der Variationsrechnung erreicht ist[4]). Diese Methode fußt auf einem Satz über die umkehrbar-eindeutige Abbildung zweier einfach-zusammenhängender Gebiete aufeinander[5]).

Im ersten Abschnitt unserer Arbeit verallgemeinern wir ein bekanntes Beispiel[6]) und gelangen sodann durch Spezialisation zu neuen Problemen, die der Berechnung zugänglich sind. Im zweiten Abschnitt wird die ausgezeichnete Extremalenschar eines dieser Probleme diskutiert. Abschnitt 3 enthält die Analyse der Enveloppenbedingung. Es gelingt durch Einführung passender Hilfsgrößen, die lästige Auflösung einer Gleichung dritten Grades zu umgehen. Viertens folgt die Diskussion der Enveloppe. Kernstück derselben ist der Nachweis ihrer Einfachheit im Sinne der geometrischen Mengenlehre. Hier leistet der Abbildungssatz vorzügliche Dienste. Der fünfte Teil bringt die vollständige Lösung des Randwertproblems. Zum Schluß werden zwei verwandte Beispiele gestreift und einige Ergänzungen beigefügt.

Es soll noch erwähnt werden, daß unser Beispiel physikalische Bedeutung hat. Deutet man nämlich Φ als elektrostatisches Potential und $\mathfrak{A}$ als magnetisches Vektorpotential, so sind die Eulerschen Differentialgleichungen (6^a) identisch mit den Bewegungsgleichungen eines Elektrons.

1. Nach einer naheliegenden Verallgemeinerung der Grundfunktion des schon erwähnten Ausgangsproblems erhält man das neue, sehr reichhaltige Variationsproblem

$$\int (\mathfrak{A}\dot{\mathfrak{x}} + \sqrt{\Phi \cdot \dot{\mathfrak{x}}^2})\, dt = \text{Extremum}. \tag{1}$$

Φ ist ein Skalar, der Vektor $\mathfrak{A}$ darf kein Gradient sein[7]). Unter Berücksichtigung von

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A} + \Phi^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\dot{\mathfrak{x}}}{|\dot{\mathfrak{x}}|} \text{ [8])} \tag{2}$$

findet man als einfachste Hamiltonsche Funktion:

$$2H \equiv (\mathfrak{y} - \mathfrak{A})^2 - \Phi \text{ [8])}. \tag{3}$$

Aus 3 berechnen wir bequem die Legendresche Funktion:

$$F_1 = \Phi^{\frac{1}{2}}. \text{ [8])} \tag{4}$$

---

[4]) *C:* 358, S. 296.

[5]) *D:* § 2, S. 6—7, § 6, S. 10.

[6]) *C:* 274, S. 232—233.

[7]) Wäre etwa $\mathfrak{A} = \operatorname{grad} \Phi_1$, so würde $\int \mathfrak{A}\dot{\mathfrak{x}}\, dt = \int \dot{\Phi}_1\, dt$ vom Integrationsweg unabhängig sein und deshalb kein Extremum liefern. 6^a reduzierte sich auf $\ddot{\mathfrak{x}} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \Phi$.

[8]) *C:* 253—270, S. 216—229.

Ist demnach Φ positiv semidefinit, so gibt es singuläre Linienelemente. Endlich ist auch die Weierstraßsche Funktion leicht zu gewinnen:

$$\mathcal{E} = \Phi^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\mathfrak{x}'^2}(1 - \cos \nu) \text{ [8]} . \tag{5}$$

Das Extremum ist also ein Minimum. Komplikationen stellen sich nur dann ein, wenn Φ verschwindet.

(3) gestattet nach den Vorschriften der allgemeinen Theorie die Ableitung der Differentialgleichungen für die Extremalen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i - A_i \; ; \quad \dot{y}_i = \left[(y_\lambda - A_\lambda)\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right] \text{ [8]} \\ \ddot{x}_i &= \dot{y}_i - \dot{A}_i = (y_\lambda - A_\lambda)\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_\lambda} \cdot \dot{x}_\lambda + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ \ddot{x}_i &= \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_\lambda}\right)\dot{x}_\lambda + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Das System (6) kann vektoriell geschrieben werden:

$$\boxed{\ddot{\mathfrak{x}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\Phi + [\dot{\mathfrak{x}}\,,\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]} \; . \tag{6a}$$

Es besitzt das Integral:

$$\dot{\mathfrak{x}}^2 = \Phi \; . \text{ [9]} \tag{7}$$

Dieses wird für die folgenden Ausführungen von ausschlaggebender Bedeutung sein.

Nun gehen wir vom allgemeinen Problem zu den spezialisierten über. Für $\mathfrak{A}$ wählen wir den allgemeinsten Vektor mit linearen Komponenten in den x_i, für Φ den allgemeinsten quadratischen Ausdruck in den gleichen Variablen. Auf die Vorteile von Schiebung und Drehung zu verzichten, wäre unangebracht. Von den 4 kanonischen Formen, welche Φ annehmen kann, verfolgen wir nur die Hauptform $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + c$ weiter[10]). Wegen rot $\mathfrak{A} = (0, 0, a)$ erhält man aus (6^a):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= a_{11}\,x_1 \qquad\qquad + a\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 &= \qquad a_{22}\,x_2 - a\dot{x}_1 \end{aligned} \tag{6b}$$

---

[8]) *C*: 253—270, S. 216—229.

[9]) (6*a*) wird skalar mit $\dot{\mathfrak{x}}$ multipliziert. Hernach läßt sich eine Integration ausführen. Die dabei auftretende Konstante muß mit Rücksicht auf (3) den Wert Null besitzen.

[10]) Die Nebenformen $\Phi = a_{11}x_1^2 + 2b_2x_2$ und $\Phi = 2b_1x_1$ führen wegen der Inhomogenität auf Probleme, die wesentlich schwieriger zu berechnen sind. Die Nebenform $\Phi =$ konst endlich leitet auf das Integral $\dot{\mathfrak{x}}^2 =$ konst gemäß (7).

Dieses System besitzt das charakteristische Polynom

$$\mathfrak{P}(r) = r^4 - r^2(a_{11} + a_{22} - a^2) + a_{11}\, a_{22} \ .$$ [11]

Es ist klar, daß die Verhältnisse dann besonders einfach werden, wenn die x_i nur als Polynome in t auftreten. Dies aber läßt sich erzwingen. Man braucht bloß zu verlangen, daß $r = 0$ vierfache Wurzel von $\mathfrak{P}(r) = 0$ sein soll. Hernach sind die hierfür hinreichenden Bedingungen

$$a_{22} = 0 \ ; \qquad a_{11} = a^2 > 0 \tag{8}$$

zu beachten. Nach Anwendung der perspektivischen Transformation $\mathfrak{x} = \left|\frac{\sqrt{c}}{a}\right| \cdot \bar{\mathfrak{x}}$ sowie nach Abspaltung des für das Minimum bedeutungslosen Faktors $\left|\frac{\sqrt{c}}{a}\right|$ wird die Grundfunktion auf die vereinfachte Form

$$\begin{gathered} \overline{F} = \overline{\mathfrak{A}}(\bar{x}_i) \cdot (\dot{\bar{\mathfrak{x}}} + \sqrt{(\bar{x}_1^2 + \varepsilon)}\,\dot{\bar{\mathfrak{x}}}^2 \\ [\,\varepsilon = -1,\ 0 \text{ oder } +1\,;\ \text{rot}\ \overline{\mathfrak{A}} = (0,\,0,\,\pm 1)\,] \end{gathered} \quad {}^{12)} \tag{9}$$

gebracht.

Mit dem Ansatz

$$x_1 = At^3 + Bt^2 + Ct + D \ ; \quad x_2 = Et^3 + Ft^2 + Gt + E$$

geht man in das gemäß (8) und (9) modifizierte System (6b) ein und erhält:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(D \pm G)}{2}\, t^2 + Ct + D \\ x_2 &= \mp \frac{(D \pm G)}{6}\, t^3 \mp \frac{Ct^2}{2} + Gt + H \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Φ hängt jetzt also nur von x_1 ab. Demzufolge ist der Knotenpunkt $\overline{P}(x_1^0, 0)$ in allgemeiner Lage. Der Parameter t wird so normiert, daß $\overline{P}$ für $t = 0$ passiert wird. (7) entnehmen wir

$$\dot{x}_1^0 = \Phi_0^{1/2} \cdot \sin \varkappa \ ; \quad \dot{x}_2^0 = \Phi_0^{1/2} \cdot -\cos \varkappa \ .$$

Es folgt:

$$H = 0 \ ; \quad D = x_1^0 \ ; \quad C = \Phi_0^{1/2} \cdot \sin \varkappa \ ; \quad G = -\Phi_0^{1/2} \cdot \cos \varkappa \ .$$

---

[11]) Vergleiche *E. Kamke*, Differentialgleichungen I, Lösungsmethoden, Lösungen. Leipzig 1942, 8, 32, S. 614—615.

[12]) Die Querstriche sind in der Folge weggelassen.

Schließlich ist leicht zu sehen, daß die neuen Extremalen Spiegelbilder der alten bezüglich der x_1-Achse sind, wenn man in (10) die untern Vorzeichen nimmt und zugleich $\varkappa$ durch $\pi - \varkappa$ ersetzt. Es bedeutet also keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit, wenn nur der Fall rot $\mathfrak{A} = (0, 0, +1)$ behandelt wird. Wir verlegen nun noch den Nullpunkt des Koordinatensystems nach $\overline{P}$ und erhalten endgültig[12]):

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \Phi_0^{1/2} \cdot \sin \varkappa \cdot t + \frac{(x_1^0 - \Phi_0^{1/2} \cdot \cos \varkappa)}{2} t^2 \\ x_2 &= -\Phi_0^{1/2} \cdot \cos \varkappa \cdot t - \frac{\Phi_0^{1/2} \cdot \sin \varkappa}{2} t^2 - \frac{(x_1^0 - \Phi_0^{1/2} \cdot \cos \varkappa)}{6} t^3 \end{aligned}} \tag{11}$$

2. Wir wenden uns jetzt dem Variationsproblem

$$\int (\mathfrak{A}\dot{\mathfrak{x}} + \sqrt{(x_1^2 + 1)\,\dot{\mathfrak{x}}^2}\,)\, dt = \text{Minimum}$$

zu. Existenzgebiet ist die ganze (x_1, x_2)-Ebene. Gemäß 4 sind alle Linienelemente positiv regulär, und nach 5 verschwindet $\mathcal{E}$ nur ordentlich. Vermittelst der Substitution $x_1^0 = \mathfrak{Sin}\ \xi$ gelingt die wurzelfreie Darstellung der ausgezeichneten Extremalenschar[13]). Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{Cos}\ \xi \cdot \sin \varkappa \cdot t + \frac{(\mathfrak{Sin}\ \xi - \mathfrak{Cos}\ \xi \cos \varkappa)}{2} t^2 \\ x_2 &= -\mathfrak{Cos}\ \xi \cos \varkappa \cdot t - \frac{\mathfrak{Cos}\ \xi \sin \varkappa}{2} \cdot t^2 - \frac{(\mathfrak{Sin}\ \xi - \mathfrak{Cos}\ \xi \cos \varkappa)}{6} t^3 \\ &(t \geqslant 0 \quad \xi \geqslant 0\,!) \quad \text{(Abb. 1)} \end{aligned}} \tag{11a}$$

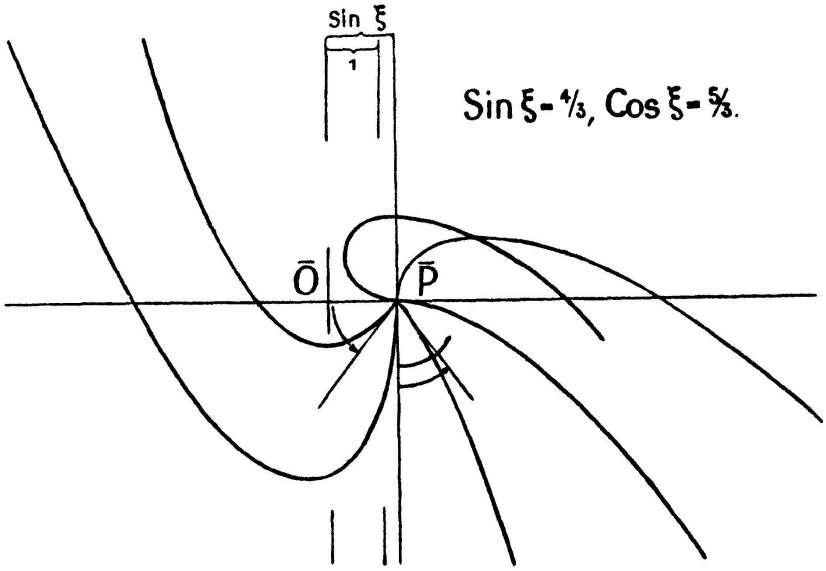

Abb. 1

[12]) Die Querstriche sind in der Folge weggelassen.
[13]) *C*: 266, S. 226.

(11^a) stellt Teilbögen von Kubiken dar. Faßt man den Gesamtverlauf der gefundenen Kurven ins Auge, so ergeben sich nach elementaren Rechnungen ein Scheitel in bezug auf die (x_2)-Achse, zwei solche bezüglich der x_1-Achse sowie ein Doppelpunkt. Die zugehörigen t-Werte lauten der Reihe nach:

$$T_1 = -\frac{\mathfrak{Cof}\,\xi \cdot \sin\varkappa}{\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa}\;;\quad T_2 = T_1 \pm \frac{\sqrt{1+(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa)^2}}{\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa}$$

$$T_d = T_1 \pm \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{1+(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa)^2}}{\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa}\;. \tag{12}$$

Reelle Wendestellen sind keine vorhanden, denn der entsprechende Parameterwert lautet

$$T_w = T_1 \pm \frac{\sqrt{-[1+(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa)^2]}}{\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa}.$$

Von ganz besonderer Bedeutung für das Randwertproblem sind die speziellen Extremalenbögen mit $\sin\varkappa = 0$ sowie $\cos\varkappa = \mathfrak{Tg}\,\xi$ (Abb. 1).

3. In der allgemeinen Theorie wird die fundamentale Bedeutung der Größe $\Delta(t,\varkappa) = \dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t,\varkappa)}$ festgestellt[13]). Bekanntlich sind die Nullstellen von $\Delta = 0$ mit dem Aufhören des Extrems verknüpft. Unser Beispiel liefert:

$$12\,\Delta(t,\varkappa) = \mathfrak{Cof}\,\xi \cdot t \cdot \Delta_1(t,\varkappa)\;; \tag{13}$$

$$\Delta_1 = \sin\varkappa\,(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa)\,t^3 + 4\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin^2\varkappa \cdot t^2 + \\ + 12\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\varkappa \cdot t + 12\,\mathfrak{Cof}\,\xi\,.$$

Wir beweisen den wichtigen

Hilfssatz 1: Zu jedem $\varkappa$ aus den Intervallen

$$0 < \varkappa < \arccos(\mathfrak{Tg}\,\xi):\quad \pi < \varkappa < \arccos(\mathfrak{Tg}\,\xi)$$

gibt es genau eine von Null verschiedene, positive und endliche Wurzel $t = \tau$ von $\Delta = 0$ (Abb. 2).

Zunächst sieht man, daß $\sin\varkappa$ und $(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa)$ verschiedene Vorzeichen aufweisen müssen; denn die quadratische Gleichung

[13]) *C*: 266, S. 226.

$\Delta_1 - \sin\varkappa\,(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cos}\,\xi\cos\varkappa)\,t^3 = 0$ besitzt keine positiven Wurzeln. Hernach benützen wir die beiden Substitutionen

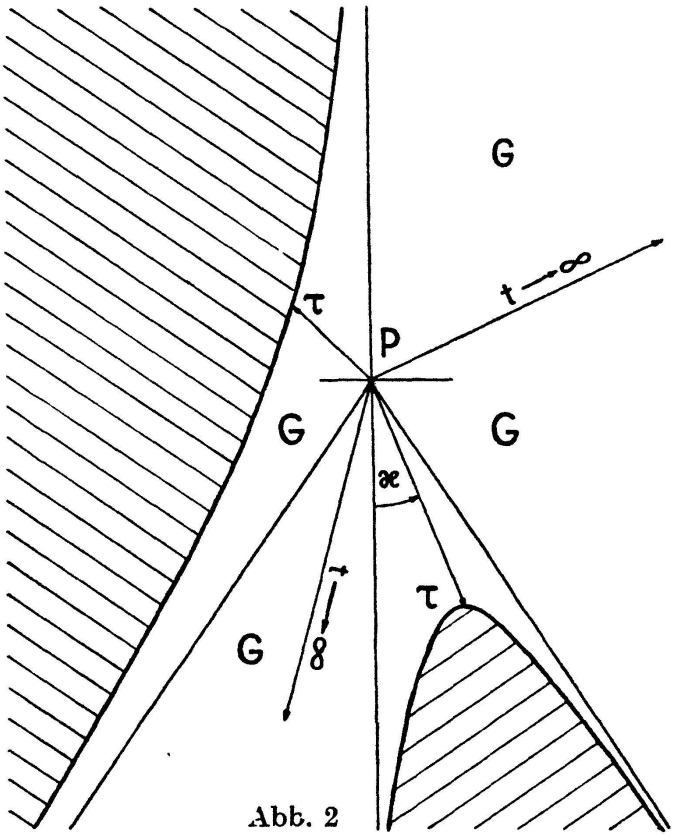

Abb. 2

$$\boxed{\tau = \frac{k(\varkappa)}{\sin\varkappa}\,;\quad \frac{k^3}{\mathfrak{Cos}\,\xi k^2 + 3\,\mathfrak{Sin}\,\xi k + 3\,\mathfrak{Cos}\,\xi} = 8m\,. \quad (\sin\varkappa \neq 0)} \tag{14}$$

Sie transformieren $\Delta_1 = 0$ in die weit bequemere Form

$$\cos^2\varkappa + 2\,\mathfrak{Cos}\,\xi\cdot m\cdot\cos\varkappa - (2\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cdot m + 1) = 0\,. \tag{15}$$

Es folgen zwei Auflösungen von (15):

$$\cos\varkappa = -\,\mathfrak{Cos}\,\xi\cdot m \pm \sqrt{\mathfrak{Cos}^2\,\xi m^2 + 2\,\mathfrak{Sin}\,\xi m + 1} \tag{16}$$

$$m = -\frac{\sin^2\varkappa}{2\,(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cos}\,\xi\cos\varkappa)}\,, \tag{17}$$

ergänzt durch

$$\frac{dm}{d\varkappa} = \frac{\sin\varkappa}{2}\;\frac{[\mathfrak{Cos}\,\xi\cos^2\varkappa - 2\,\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\varkappa + \mathfrak{Cos}\,\xi]}{2\,(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cos}\,\xi\cos\varkappa)^2} \tag{18}$$

$$\frac{dm}{dk} = \frac{k^2}{8}\cdot\frac{[\mathfrak{Cos}\,\xi k^2 + 6\,\mathfrak{Sin}\,\xi k + 9\,\mathfrak{Cos}\,\xi]}{(\mathfrak{Cos}\,\xi k^2 + 3\,\mathfrak{Sin}\,\xi k + 3\,\mathfrak{Cos}\,\xi)^2}\,. \tag{19}$$

m ist eine eindeutige Funktion von $\varkappa$. Gemäß (18) ist sie sogar monoton. Nach (14) ist m auch eindeutige Funktion von k. Gemäß (19) ist Monotonie auch in bezug auf k vorhanden, was zur Folge hat, daß eine eindeutige und monotone Umkehrfunktion $k = k\,(m)$ existiert. Dann aber ist auch die Funktion $k = k(\varkappa)$ eindeutig und monoton. Damit ist der Beweis fertig.

Aus (13) gewinnt man durch Übergang zur Grenze:

$$\lim_{\sin \varkappa = 0} \tau = \lim_{\cos \varkappa = \mathfrak{Tg}\, \xi} \tau \to +\infty \,.$$

Zusammenfassend stellen wir fest:

Durchläuft $\varkappa$ das erste Intervall des Hilfssatzes, so wachsen m und k monoton von 0 auf $+\infty$. Durchläuft aber $\varkappa$ das zweite Intervall, so sinken m und k monoton von Null auf $-\infty$. Im ersten Fall ist in (16) das obere Vorzeichen gültig, im zweiten das untere. Wie verhält sich $\tau = \tau(\varkappa)$? Für den Gebrauch des Abbildungssatzes ist die Eindeutigkeit ausreichend, und auch die vorbereitende Enveloppendiskussion gelingt ohne weitere Daten.

4. (14) und (17) gestatten nun eine überraschend einfache Darstellung der Enveloppe in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{(\mathfrak{Cof}\, \xi k^2 + 6\, \mathfrak{Sin}\, \xi k + 6\, \mathfrak{Cof}\, \xi)}{k} \\ x_2 &= \tau \left[-\mathfrak{Cof}\, \xi \cdot \cos \varkappa + \frac{(\mathfrak{Cof}\, \xi k^2 + 12\, \mathfrak{Sin}\, \xi k + 12\, \mathfrak{Cof}\, \xi)}{6k} \right] \end{aligned}} \,. \tag{20}$$

Besonders x_1 ist leicht zu diskutieren. Nach der Kettenregel

$$\frac{d}{d\varkappa} = \frac{d}{dk} \cdot \frac{dk}{dm} \cdot \frac{dm}{d\varkappa}$$

folgt:

$$\frac{dx_1}{d\varkappa} = \frac{\mathfrak{Cof}\, \xi\, (6 - k^2)}{k^2} \cdot \psi \;\; ; \;\; \psi = \frac{dk}{dm} \cdot \frac{dm}{d\varkappa} \,. \tag{21}$$

Die Stelle $k^2 = 6$ ist kritisch. Gemäß (16) sind 2 Werte von $\varkappa$ zugeordnet, die wir mit $\varkappa_i^*$ bezeichnen. Es gilt (Abb. 3):

Im Intervall $0 < \varkappa < \varkappa_1^*$ mit $0 < k < \sqrt{6}$ ist $\frac{dx_1}{d\varkappa} > 0$

„ $\varkappa_1^* < \varkappa < \arccos(\mathfrak{Tg}\,\xi)$ „ $\sqrt{6} < k < \infty$ „ $\frac{dx_1}{d\varkappa} < 0$

„ $\pi < \varkappa < \varkappa_2^*$ „ $0 > k > -\sqrt{6}$ „ $\frac{dx_1}{d\varkappa} < 0$

„ $\varkappa_2^* < \varkappa < \arccos(\mathfrak{Tg}\,\xi)$ „ $-\sqrt{6} > k > -\infty$ „ $\frac{dx_1}{d\varkappa} > 0$.

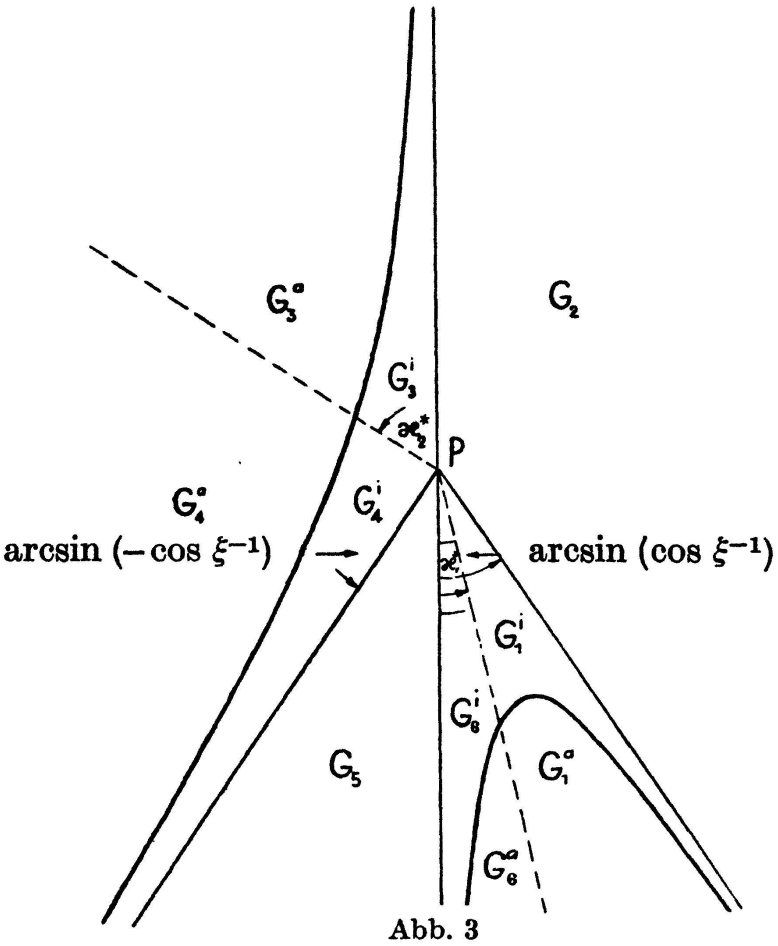

Abb. 3

$$\lim_{k=\pm 0} x_1 \to \mp\infty \; ; \quad \lim_{k\to\pm\infty} x_1 \to \mp\infty \; ;$$

$$\lim_{\sin x=0} \frac{dx_1}{d\varkappa} = \lim_{\cos x=\mathfrak{Tg}\,\xi} \frac{dx_1}{d\varkappa} \to \infty \; .$$

In allen Intervallen ist demnach x_1 eine monotone Funktion von $\varkappa$. Dies reicht hin zur Behauptung, daß die Enveloppe aus 4 einfachen Teilbögen besteht.

(20) entnimmt man noch: $\lim_{\tau\to\infty} |x_2| \to \infty$. Für die weitere Diskussion aber ist diese Form nicht zu gebrauchen.

Im Berührungspunkt mit der Enveloppe berechnet sich die Steigung der betreffenden Extremalen zu $\left.\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}\right|_{t=\tau}$, die Steigung der Enveloppe zu $\frac{dx_2}{dx_1}$. Zwischen $\dot{x}_i/_{t=\tau}$ und $\frac{dx_i}{d\varkappa}$ besteht Proportionalität. Der Proportionalitätsfaktor läßt sich ermitteln, weil $\frac{dx_1}{d\varkappa}$ bekannt ist. Man findet:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{3\sin\varkappa\,(\mathfrak{Cof}\,\xi k^2 + 4\,\mathfrak{Sin}\,\xi k + 4\,\mathfrak{Cof}\,\xi)}{k^2} \\
\dot{x}_2 &= -\,(\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa + x_1) \\
\frac{dx_1}{d\varkappa} &= \dot{x}_1/_{t=\tau}\cdot\psi\cdot\chi\ ;\quad \chi = \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi\,(k^2-6)}{3\sin\varkappa\,(\mathfrak{Cof}\,\xi k^2 + 4\,\mathfrak{Sin}\,\xi k + 4\,\mathfrak{Cof}\,\xi} \\
\frac{dx_2}{d\varkappa} &= \dot{x}_2/_{t=\tau}\cdot\psi\cdot\chi\ .
\end{aligned} \tag{22}$$

Unter Benützung von (21) und (22) folgt mühelos, daß der Ausdruck $\psi\cdot\chi$ nur gerade für $k^2 = 6$ verschwindet. *Die Enveloppe besitzt also Spitzen.* Daß es die einzigen sind, kann aus

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\tau}{3}\cdot\frac{k}{\mathfrak{Cof}\,\xi k^2 + 4\,\mathfrak{Sin}\,\xi k + 4\,\mathfrak{Cof}\,\xi}\cdot(\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa + x_1) \tag{23}$$

abgelesen werden. Diese Spitzen wenden sich dem Knotenpunkte zu. Die mit den obgenannten singulären Punkten behafteten Extremalen nennen wir Spitzenträger ($\mathfrak{E}^*$).

Im Spezialfalle $\mathfrak{Sin}\,\xi = 0$ gelingt nach erheblichem Rechenaufwand mit elementaren Hilfsmitteln der Nachweis, daß je zwei zusammengehörige Bögen außer der Spitze keinen gemeinsamen Punkt besitzen und die Enveloppe somit einfach ist[14]). Zwecks Bewältigung des allgemeinen Falles nützen wir nun den Abbildungssatz aus. Man benötigt verschiedene Hilfssätze.

Hilfssatz 2: Das Bild (11^a) ist unberandet.

Beweis: Es muß gezeigt werden, daß die ganze (x_1, x_2)-Ebene von den Extremalen (11^a) lückenlos überdeckt wird. Bei festem $x_1 = x_1^1$ gilt:

---

[14]) Man führt einen Schnitt parallel zur x_2-Achse. Dadurch werden 2 k-Werte festgelegt mit der Eigenschaft $k_1\cdot k_2 = 6$. Man setzt: $k_1 = \sqrt{6}\cdot k$; $k_2 = \sqrt{6}\cdot k^{-1}$ $(0 \leq k \leq 1)$. Die vollständige Diskussion von $\frac{dx_2}{dx_1}$ ermöglicht den Nachweis, daß die Enveloppe als Ganzes einfach ist.

$$t_{12} = \frac{-\mathfrak{Cof}\,\xi \sin\varkappa \pm \sqrt{R}}{\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi \cos\varkappa}\,; \tag{24}$$

$$R = \mathfrak{Cof}^2\,\xi \sin^2\varkappa + 2\,x_1^1(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi \cos\varkappa)$$

$$x_1(T_1) = \frac{-\mathfrak{Cof}^2\,\xi \sin^2\varkappa}{2(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi \cos\varkappa)} \tag{25}$$

$$x_2 = t\left[-\mathfrak{Cof}\,\xi \cos\varkappa - \frac{x_1}{3} + \frac{\mathfrak{Cof}^2\,\xi \cdot \sin^2\varkappa}{6(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi \cos\varkappa)} \mp \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi \sin\varkappa \cdot R^{1/2}}{6(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi \cos\varkappa)}\right]. \tag{26}$$

Für jedes $\varkappa$ aus dem Intervall $\arcsin(\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1}) \leqslant \varkappa \leqslant \pi$ ist x_1 positiv-definit, für jedes $\varkappa$ aus dem Intervall $\arcsin(-\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1}) \leqslant \varkappa \leqslant 2\pi$ negativ-definit. Positive x_1-Werte liefern ferner die Intervalle $0 < \varkappa < \arcsin(\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1})$ sowie $\pi < \varkappa < \arcsin(-\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1})$. Bei geeigneter Wahl von t liefern die gleichen Intervalle aber auch negative x_1-Werte. Eine obere Schranke für $|x_1|$ existiert nicht. Also dürfen wir in (24) x_1 als unabhängigen und unbeschränkten Parameter einführen.

In der Folge muß darauf geachtet werden, daß in (24) weder t noch R negativ ausfallen[15]).

α. $x_1^1 \geqslant 0$.

Im Intervall $\arcsin(\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1}) > \varkappa \geqslant \varkappa^{**}$ ist x_2, mit dem untern Vorzeichen versehen, eine eindeutige und stetige Funktion von $\varkappa$ mit dem Randwert x_2^{**}. Im Intervall $\varkappa^{**} < \varkappa < \arcsin(-\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1})$ ist x_2, mit dem obern Vorzeichen versehen, eindeutig und stetig.[16])

β. $x_1^1 \leqslant 0$.

Im Intervall $\arcsin(-\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1}) > \varkappa \geqslant \varkappa^{***}$ ist x_2, wenn man nur das obere Vorzeichen berücksichtigt, eindeutig und stetig mit dem Randwert x_2^{***}. Im Intervall $\varkappa^{***} < \varkappa < 2\pi + \arcsin(\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1})$ ist x_2 mit dem untern Vorzeichen eindeutig und stetig[17]).

Ferner ist
$$\lim_{\substack{\cos\varkappa = \mathfrak{Tg}\,\xi \\ x_1^1 \text{ beliebig}}} |x_2| \to \infty\,.$$

x_2 kann demnach bei beliebigem x_1^1 jeden Wert annehmen, w. z. b. w.

---

[15]) Genaue Analyse aller Teilintervalle zwecks Klarstellung der Vorzeichenfrage ist notwendig.

[16]) $\varkappa^{**}$ ist diejenige Wurzel von $R = 0$, die sich für $x_1^1 = 0$ auf 0 reduziert.

[17]) $\varkappa^{***}$ ist diejenige Wurzel von $R = 0$, die sich für $x_1^1 = 0$ auf π reduziert.

Hilfssatz 3: Die Enveloppe besitzt keinen *Selbstberührungspunkt.*

Wäre nämlich ein solcher vorhanden, so müßten sich zwei Extremalen berühren. Im Berührungspunkt mit der Abszisse x_1^1 fände man eine gemeinsame Tangente vor. Die Steigung derselben, die wir mit p bezeichnen, nähme für zwei verschiedene $\varkappa$ denselben Wert an. Nun aber beweisen wir, daß p in den allein in Frage kommenden Intervallen des Hilfssatzes 1 eine monotone Funktion von $\varkappa$ ist. (11^a) wird entnommen:

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{[\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa + \mathfrak{Cof}\,\xi\sin\varkappa\cdot t + \frac{1}{2}(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa)\,t^2]}{\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\varkappa + (\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa)\,t}$$

$$(\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa)\,t^2 = 2\,(x_1^1 - \mathfrak{Cof}\,\xi\sin\varkappa\cdot t)\,.$$

Auch (24) wird noch benützt, und man erhält den einfachen Ausdruck

$$p = \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\varkappa + x_1}{\mp R^{1/2}} \tag{27}$$

der noch durch

$$\frac{dp}{d\varkappa} = \frac{\pm\,\mathfrak{Cof}\,\xi\sin\varkappa\,[(x_1^1 + \mathfrak{Sin}\,\xi)^2 + 1]}{R^{3/2}} \tag{28}$$

ergänzt wird. In den kritischen Intervallen wechselt $\frac{dp}{d\varkappa}$ sein Vorzeichen nicht, w. z. b. w.

Hilfssatz 4: Die Enveloppe besitzt keinen *Knotenpunkt.*

Beweis: Wir nehmen folgende Zerlegung der $(t, \varkappa)$-Ebene vor (Abb. 3):

$$\begin{array}{lll}
G_1 \begin{cases} G_1^i : \varkappa_1^* \leq \varkappa \leq \arcsin(\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1}) \\ G_1^a : \qquad ,, \end{cases} & \begin{array}{l} ; \quad 0 \leq t \leq \tau \\ ; \quad \tau \leq t < \infty \end{array} \\
G_2 \quad : \arcsin(\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1}) \leq \varkappa \leq \pi & ; \quad 0 \leq t < \infty \\
G_3 \begin{cases} G_3^i : \pi \leq \varkappa \leq \varkappa_2^* \\ G_3^a : \qquad ,, \end{cases} & \begin{array}{l} ; \quad 0 \leq t \leq \tau \\ ; \quad \tau \leq t < \infty \end{array} \\
G_4 \begin{cases} G_4^i : \varkappa_2^* \leq \varkappa \leq \arcsin(-\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1}) \\ G_4^a : \qquad ,, \end{cases} & \begin{array}{l} ; \quad 0 \leq t \leq \tau \\ ; \quad \tau \leq t < \infty \end{array} \\
G_5 \quad : \arcsin(-\mathfrak{Cof}\,\xi^{-1}) \leq \varkappa \leq 2\pi & ; \quad 0 \leq t < \infty \\
G_6 \begin{cases} G_6^i : 0 \leq \varkappa \leq \varkappa_1^* \\ G_6^a : \qquad ,, \end{cases} & \begin{array}{l} ; \quad 0 \leq t \leq \tau \\ ; \quad \tau \leq t < \infty \end{array}
\end{array}$$

Sodann wird der Abbildungssatz auf jedes einzelne Gebiet angewendet[18]).

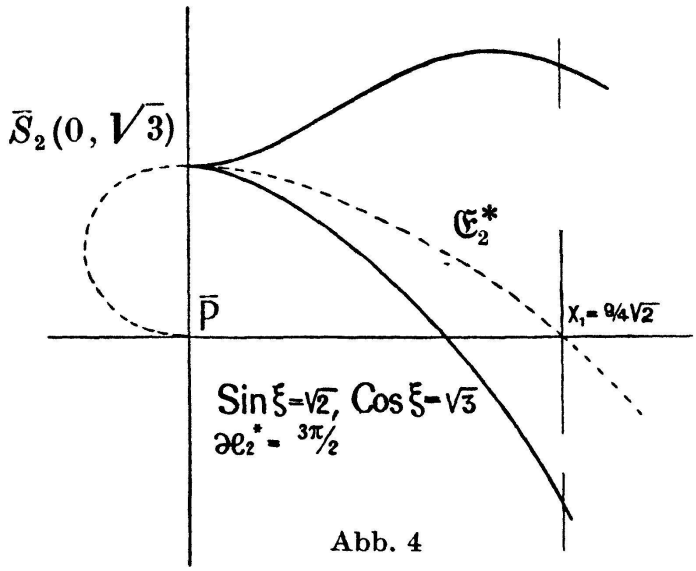

Abb. 4

Sämtliche Gebiete sind einfach-zusammenhängend; denn die Ränder setzen sich aus Teilstücken von Halbgeraden $\varkappa =$ konst sowie Teilbögen der Kurve $\Delta(t, \varkappa) = 0$ zusammen, welch letztere nach Hilfssatz 1 einfach ist.

$\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t, \varkappa)}$ verschwindet nur auf den krummlinigen Rändern.

Es lassen sich immer Punkte angeben, die nicht Bilder von Punkten aus irgend einem Gebiet G_λ sein können. Solche „Nichtbilder" sind z. B. alle Punkte mit negativer Abszisse für G_2, alle Punkte mit positiver Abszisse für G_5, alle Punkte rechts von $\bar{S}_1$ für G_1^a und G_6^a, alle Punkte links von $\bar{S}_2$ für G_3^a und G_4^a. Vermittelst eines Beweisverfahrens, das in meiner Dissertation ausführlich dargestellt ist, läßt sich zeigen, daß alle Bilder von Rändern zu den Rändern der zugeordneten Bilder gehören[19]).

Wir führen jetzt noch Schnitte parallel zur x_2-Achse im Abstand $x_1 = x_1^1$. Sie definieren in den Intervallen des Hilfssatzes 1 je 2 $\varkappa$-Werte, die mit Hilfe von (20), (14) und (16) berechnet werden können. In beiden Intervallen ist $\dfrac{dp}{d\varkappa}$ negativ definit, und p nimmt somit monoton ab (vergleiche (28)). Die Krümmung der in Betracht fallenden Extremalenbögen bezüglich der x_1-Achse ist genau bekannt (vergleiche (12)). Würde jetzt x_2 als Funktion von $\varkappa$ in einem Teilintervall von $0 < \varkappa <$ arcsin $(\mathfrak{Cof}\, \xi^{-1})$ abnehmen oder in einem Teilintervall von $\pi < \varkappa <$ arcsin $(-\mathfrak{Cof}\, \xi^{-1})$ zunehmen, so müßten sich benachbarte Kurven schneiden. Dies stünde aber im Widerspruch zum Verhalten der Funktion $\Delta(t, \varkappa)$

[18]) Vergleiche *D:* § 6, S. 58—59.
[19]) *D:* § 6, S. 26—28.

im Innern der Gebiete G_λ^a und auf den Rändern $\varkappa = \varkappa_i^*$. Diese Tatsache erlaubt den Schluß, daß Enveloppe und Spitzenträger außer den Spitzen keine gemeinsamen Punkte besitzen.

Alle Voraussetzungen des Abbildungssatzes sind also erfüllt, so daß jedes Teilgebiet G_λ^a in der (x_1, x_2)-Ebene sein einfach-zusammenhängendes und umkehrbar-eindeutiges Abbild besitzt[20]).

Nachdem die Eigenschaften aller Ränder erkannt sind, dürfen wir behaupten, daß $\overline{G}_\lambda^i$ und $\overline{G}_\lambda^a$ jeweilen auf derselben Seite der Enveloppe liegen und daß die Gebietskomplexe $(G_1^a + G_6^a)$ sowie $(G_3^a + G_4^a)$ eineindeutig auf einfach-zusammenhängende Gebiete $\overline{G}_{16}^a$ und $\overline{G}_{34}^a$ abgebildet werden. Je zwei zugeordnete Enveloppenbögen spielen dabei die Rolle des einfachen Randes.

Es ist noch ersichtlich, daß die beiden Enveloppenteile mit $k \geqslant 0$ beziehungsweise $k \leqslant 0$ punktfremd sind; denn die Abszisse von $\overline{S}_1$ ist

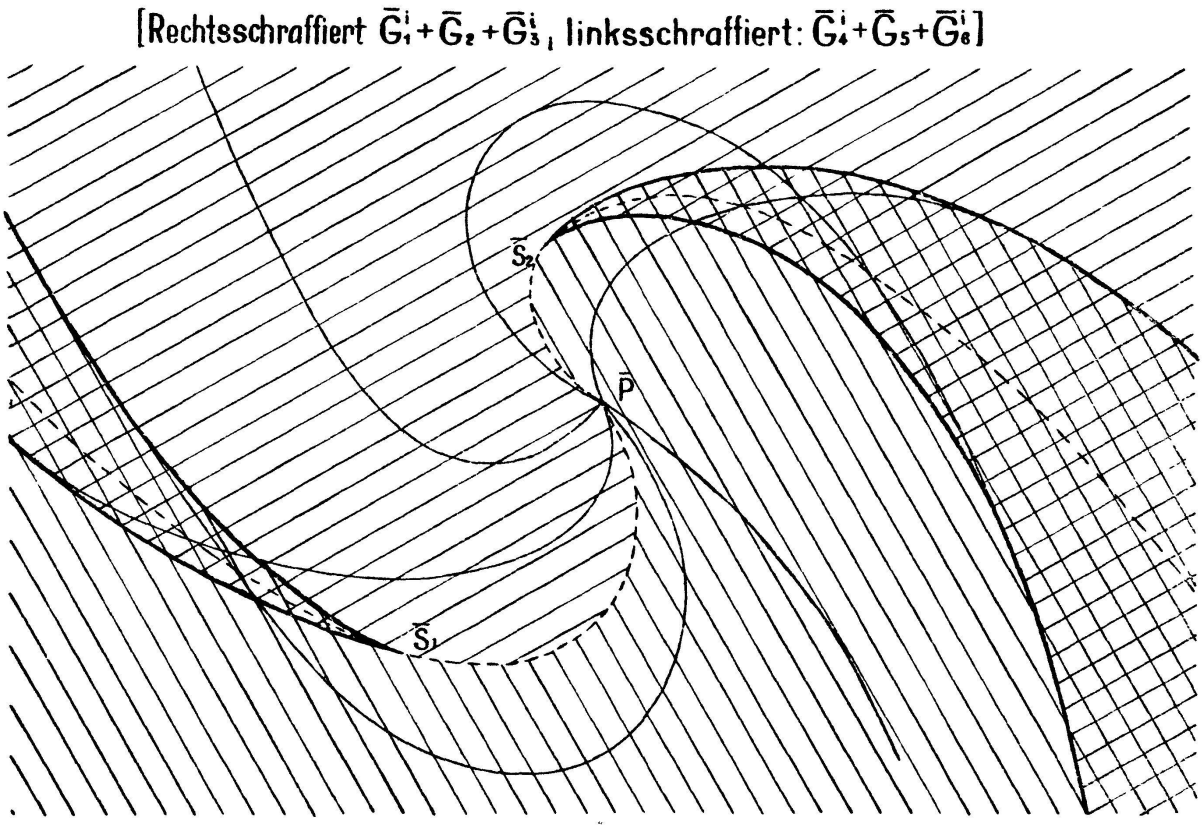

Abb. 5

---

[20]) Dasselbe gilt natürlich auch für alle Gebiete G_λ^i sowie für G_2 und G_5. Es ist bemerkenswert, daß ausgerechnet die Verwendung aller Extremalenbögen mit $t > \tau$, die für das eigentliche Randwertproblem ausfallen, die vollständige Diskussion der Enveloppe gestattet.

die obere Schranke aller x_1-Werte mit $k \geqslant 0$, die Abszisse von $\overline{S}_2$ untere Schranke aller x_1-Werte mit $k \leqslant 0$, und $\overline{S}_1$ liegt links von $\overline{S}_2$ [21]).

Damit ist der Beweis vollständig.[22])

5. Nach umständlicher Vorarbeit können wir nun den folgenden Satz formulieren:

Satz: Das zur Grundfunktion $F = \mathfrak{A}\dot{\mathfrak{x}} + \sqrt{(x_1^2 + 1)\,\dot{\mathfrak{x}}^2}$ gehörige Randwertproblem hat in der ganzen (x_1, x_2)-Ebene Lösungen und zwar im Innern zweier Spitzen genau 2, auf deren Rand und im gesamten Restgebiet genau 1 (Abb. 5).

Für gewöhnliche Punkte ist ein Kommentar überflüssig. Was die Spitzen betrifft, muß man wissen, daß im Kneserschen Ausnahmefall, der hier eben vorliegt, die Minimumseigenschaft in zu $\overline{P}$ konjugierten Punkten erhalten bleibt[2]).

Will man den Abbildungssatz nur einmal anwenden, so ist das ursprüngliche Gebiet G zu beschneiden. Zur tatsächlichen Lösung des Randwertproblems ist aber die Kenntnis des neu auftretenden Randes nicht nötig[23]).

Die gestaltlichen Verhältnisse unseres Problems sind weitgehend von der Lage des Knotenpunktes abhängig. Neben dem trivialen Spezialfalle $\mathfrak{Sin}\,\xi = 0$ ist der andere mit $\mathfrak{Sin}\,\xi = \sqrt{2}$, $\mathfrak{Cos}\,\xi = \sqrt{3}$, $k \leqslant 0$ der Berechung zugänglich. Abb. 4 vermittelt eine ungefähre Vorstellung.

6. Es ist naheliegend, unter der Wurzel auch $x_1^2 - 1$ und x_1^2 zu setzen. Die zwei neuen Beispiele sind von der Variationsrechnung aus gesehen nicht besonders interessant [24]), weisen aber doch einige Feinheiten auf. Bezüglich des ersten sind in allen Formeln $\mathfrak{Sin}\,\xi$ und $\mathfrak{Cos}\,\xi$ zu vertauschen. Sowohl m als auch k sind nach oben beschränkt, was fortwährend ausgenützt wird. Schnitte parallel zur x_2-Achse definieren nur einen Wert von k, der unterhalb der Schranke liegt. Dieser glückliche Umstand ermöglicht direkte und vollständige Diskussion der Enveloppe. Diese Kurve weist mindestens eine Wendestelle auf. Im zweiten Beispiel löst man $\Delta_1(t, \varkappa) = 0$ mit der Substitution $\tau = k \cdot T_1$. Hier bietet auch die Berechnung von $\dfrac{d^2 x_2}{dx_1^2}$ keine unüberwindbaren Schwierigkeiten. Man findet, daß die Enveloppe immer nach derselben Seite gekrümmt ist[25]).

---

[21]) Vergleiche (20) und die Monotonie von x_1.

[22]) Die Singularität in P kann durch Einführung neuer Parameter beseitigt werden (Vergleiche D, § 6, S. 27. (29)).

[23]) Bei gegebener Abszisse hat man einfach die Ordinate mit (20) zu vergleichen.

[24]) Es liegen die gleichen Verhältnisse vor wie beim Problem der Rotationsfläche kleinster Oberfläche.

[25]) Sie ist in bezug auf $\overline{P}$ geodätisch konvex.

Was geschieht, wenn $\Phi^{1/2}$ durch $-\Phi^{1/2}$ ersetzt wird? Gemäß (5) wird das Extremum zu einem Maximum. Es ist deshalb einfacher, mit $F = \Phi^{1/2} \cdot \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2} - \mathfrak{A}\dot{\mathfrak{x}}$ zu beginnen. Man berechnet:

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \tfrac{1}{2} \operatorname{grad} \Phi - [\dot{\mathfrak{x}}\,,\ \operatorname{rot} \mathfrak{A}]\,.$$

Dieses System entsteht aus (6a) durch die Parametertransformation $\bar{t} = -t$, und nach der Ersetzung von $\varkappa$ durch $-\varkappa$ bleibt in (11) x_1 unverändert, während x_2 das Vorzeichen wechselt.

Es müßte interessant sein, Beispiele durchzurechnen, wo der Vektor rot $\mathfrak{A}$ sowohl nach oben als auch nach unten zeigt. Vermutlich entdeckte man theoretisch interessante Erscheinungen.

(Eingegangen den 22. Oktober 1944.)