Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1944-1945)

Artikel: Einige Bemerkungen über die dichteste Lagerung inkongruenter Kreise.
Autor: Fejes, László
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16341

Einige Bemerkungen über die dichteste Lagerung inkongruenter Kreise

Von László Fejes, Budapest

Es sei $\{k_i\}$ ein ebenes System von Kreisscheiben, T ein konvexer Bereich und $F(T)$ der Gesamtinhalt der in T liegenden Kreise. Betrachten wir eine beliebige Folge $T_1, T_2, \ldots$ von zu T ähnlichen Bereichen, deren Flächeninhalt unbegrenzt zunimmt und setzen voraus, daß der Quotient[1]) $F(T_n)/T_n$ für $n \to \infty$ unabhängig von der Gestalt des Bereiches T und der Wahl der Folge $T_1, T_2, \ldots$ einem Grenzwert

$$D = \lim_{T \to \infty} F(T)/T \quad ,$$

der *Dichtigkeit* des Systems $\{k_i\}$, zustrebt[2]).

Für kongruente Kreise erheben sich nun zwei grundlegende Probleme, und zwar das Problem der dichtesten und das Problem der — die Ebene lückenlos bedeckenden — dünnsten Kreislagerung. Die Lösungen kommen in folgenden Aussagen zum Ausdruck:

Die Dichtigkeit eines Systems von einander nicht überdeckenden kongruenten Kreisscheiben ist[3])

$$D \leqslant \sqrt{3}\pi/6 \approx 0 \cdot 907\ldots \quad . \tag{1}$$

Die Dichte eines Systems kongruenter Kreisscheiben, das die Ebene völlig bedeckt ist[4])

$$D \geqslant 2\sqrt{3}\pi/9 \approx 1 \cdot 209\ldots \quad . \tag{2}$$

Diese Schranken sind genau; sie werden von demjenigen System erreicht bei dem jeder Kreis von den übrigen Kreisen in den Ecken eines regulären einbeschriebenen Sechsecks berührt bzw. geschnitten wird. In beiden extremalen Systemen bilden also die Kreismittelpunkte ein gleichseitiges Dreiecksgitter[5]).

---

1) Im folgenden bezeichnen wir einen Bereich und seinen Flächeninhalt mit demselben Symbol.

2) Im weiteren wollen wir den Übergang zum Grenzwert $T \to \infty$ stets in diesem Sinn verstehen.

3) Einen einfachen Beweis s. *Fejes, L.*, Über einen geometrischen Satz, Math. Zeitschrift 46 (1940), 83—85; Über die dichteste Kugellagerung, Math. Zeitschrift 48 (1943), 676—684.

4) *Kershner, R.*, The number of circles covering a set, Amer. J. Math. 61 (1939), 665—671.

5) Dagegen führen die beiden analogen räumlichen Extremalaufgaben zu ganz verschiedenartigen Punktanordnungen.

Diese Ergebnisse sind einer Anzahl verschiedenartiger Verallgemeinerungen fähig. Bemerkenswerterweise lassen sich z. B. (1) und (2) in einem allgemeinen Satz zusammenfassen, der etwa so ausgesprochen werden kann: Unter den Systemen kongruenter Kreisscheiben mit vorgegebener Dichtigkeit $\sqrt{3}\,\pi/6 \leqslant D \leqslant 2\sqrt{3}\,\pi/9$ wird die Ebene von demjenigen System „am besten bedeckt", bei der die Kreismittelpunkte ein gleichseitiges Dreiecksgitter bilden[6]).

In diesem Aufsatz versuchen wir das Problem der dichtesten Kreislagerung in einer anderen Richtung zu erweitern, indem wir inkongruente Kreise in Betracht ziehen. Dabei lassen sich einige der hier folgenden Überlegungen auch auf das Problem der dünnsten Kreislagerung anwenden.

1. Für inkongruente Kreise geht die Gültigkeit von (1) im allgemeinen verloren, da die Dichte in diesem Fall alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. *Es gibt* jedoch *eine positive Größe* $\delta < 1$, *so, daß die Dichte* D *eines Systems* $\{k_i\}$ *von einander nicht überdeckenden Kreisscheiben, bei der für ein beliebiges Kreisscheibenpaar* k_i, k_j $\delta \leqslant k_i/k_j \leqslant 1/\delta$ *gilt,* $D \leqslant \sqrt{3}\pi/6$ *ausfällt*[7]).

Greifen wir zum Beweis unserer Aussage einen Kreis k_i des Systems heraus und fassen die Potenzlinien in bezug auf sämtlichen übrigen Kreise ins Auge. Der Durchschnitt der durch diese Potenzlinien bestimmten Halbebenen, die den Kreis k_i enthalten, ist ein konvexes Polygon p_i. Die Ebene wird durch die Gesamtheit der Polygone p_i schlicht und lückenlos bedeckt.

Für kongruente Kreise ist (1) eine unmittelbare Folgerung der Ungleichung

$$k_i/p_i \leqslant \sqrt{3}\pi/6 \ , \tag{3}$$

die besagt, daß schon „die Dichtigkeit der Kreislagerung bezüglich eines beliebigen Polygons" $\leqslant \sqrt{3}\,\pi/6$ ausfällt. Wir wollen den Beweis der Ungleichung (3) für $\delta = 1$ — d. h. im Falle kongruenter Kreise — kurz auseinandersetzen, um uns zu überzeugen, daß sie ihre Gültigkeit auch für einen genügend kleinen Wert von $1 - \delta$ behält. Damit wird alles bewiesen sein.

---

[6]) S. *Fejes, L.*, Extremale Punktsysteme in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum (ungarisch), Acta Sci. Math. et Nat. 23 (1944) Kolozsvár, wo sich noch zahlreiche Verallgemeinerungen befinden. Bezüglich einer Verschärfung von (1) für endliche Gebiete s. *Hadwiger, H.*, Über extremale Punktverteilungen in ebenen Gebieten, Math. Zeitschrift 49 (1944), 370—373.

[7]) Die Bestimmung der kleinsten Zahl δ mit dieser Eigenschaft scheint recht schwierig zu sein. Zur Orientierung sei jedoch ohne Beweis bemerkt, daß etwa $\delta = \frac{2}{3}$ gesetzt werden kann.

(3) bedeutet, daß das Polygon p_i sein Minimum für das k_i umbeschriebene reguläre Sechseck erreicht. Wir setzen $k_i = \pi$ voraus, bezeichnen den mit k_i konzentrischen Kreis vom Halbmesser $2/\sqrt{3}$, d. h. den Umkreis des soeben erwähnten Sechsecks, mit K_i und zeigen, daß schon für den in K_i liegenden Teil p'_i von p_i

$$p'_i \geqslant 2\sqrt{3} \tag{4}$$

gilt.

Bezeichnen wir die von den Seiten von p_i bestimmten Sehnen von K_i mit $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Wir haben zu zeigen, daß die Vereinigungsmenge der von $s_1, s_2, \ldots, s_n$ bestimmten Kreisabschnitte sein Maximum im Falle des k_i umbeschriebenen regulären Sechsecks erreicht.

Für $n \leqslant 6$ ist diese Behauptung trivial. Zum Fall $n > 6$ beachte man, daß die Sehnenmittelpunkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ von einander einen Abstand $\geqslant 1$ besitzen. Man rechnet aber leicht nach, daß höchstens 7 Punkte mit dieser Eigenschaft im von k_i und K_i begrenzten Kreisring eingelagert werden können. Diese müssen aber alle sehr nahe am Rand von K_i liegen[8]) und somit können in diesem Fall die Sehnen $s_1, s_2, \ldots, s_7$ nur einen überaus kleinen Teil von K_i abschneiden, womit (4) und dadurch (3) bewiesen ist.

Nun ist klar, daß für einen genügend kleinen Wert von $1 - \delta$ alles unverändert bleibt. Der einzige Unterschied ist nur, daß dann die Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ein wenig näher zueinander rücken können. Das Wesentliche ist aber, daß der Fall $n > 6$ aus demselben Grund wie oben ausgeschlossen werden kann. Damit ist unsere Behauptung dargetan.

Ob eine entsprechende Größe δ auch bezüglich des Problems der dünnsten Kreislagerung existiert, steht noch nicht fest.

2. Wir wenden uns nun zu einer Abschätzung der Dichtigkeit im allgemeinen Fall zu.

Gibt es zu einem System $\{k_i\}$ von einander nicht überdeckenden Kreisscheiben eine positive Größe δ so, daß für ein beliebiges Kreisscheibenpaar $\delta \leqslant k_i/k_j \leqslant 1/\delta$ gilt, dann ist die Dichtigkeit des Systems

$$D \leqslant \frac{\pi\delta}{6} \operatorname{cotg} \frac{\pi\delta}{6} . \tag{5}$$

Diese Abschätzung enthält (1) als Korollarium für $\delta = 1$.

Nach unseren Voraussetzungen besitzen die Flächeninhalte k_i eine

[8]) Dies leuchtet ein, wenn man bedenkt, daß die Seitenlänge des Ki einbeschriebenen regulären 7-Ecks $\frac{4}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{7} \approx 1{\cdot}002$ nur um etwa 2/1000 die Einheit übertrifft.

positive untere und eine endliche obere Schranke. Dann kann aber dasselbe von den In- bzw. Umkreishalbmessern der Polygone p_i vorausgesetzt werden[9]). Damit läßt sich aber leicht zeigen, daß „der arithmetische Mittel“ der Eckenzahlen ν_i von p_i

$$\bar{\nu} \leqslant 6 \tag{6}$$

ausfällt. Dabei ist $\bar{\nu}$ durch $\bar{\nu} = \lim\limits_{T\to\infty} \sum\limits_T \nu_i / n(T)$ erklärt, wobei über diejenigen Polygone summiert wird, die im Gebiet T liegen und $n(T)$ die Anzahl dieser Polygone bedeutet.

Nach dieser vorläufigen Bemerkung summieren wir die Ungleichungen

$$p_i \geqslant k_i \frac{\nu_i}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\nu_i} \,,$$

die wir aus der Tatsache erhalten, daß unter einem Kreis umbeschriebener ν-Ecken das reguläre ν-Eck den kleinmöglichsten Inhalt besitzt:

$$\sum_T p_i \geqslant \sum_T k_i \varphi(\nu_i) \,. \tag{7}$$

Dabei wurde $\varphi(\nu) = \frac{\nu}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\nu}$ gesetzt. Da aber diese Funktion von unten konvex ist[10]), so können wir die Jensensche Ungleichung[11]) anwenden.

$$\sum_T k_i \varphi(\nu_i) \,/\, \sum_T k_i \geqslant \varphi\Big(\sum_T k_i \nu_i \,/\, \sum_T k_i\Big) \,. \tag{8}$$

Da ferner $\varphi(\nu)$ monoton abnimmt und zufolge (6) sowie unserer Annahme

$$\lim_{T\to\infty} \sum_T k_i \nu_i \,/\, \sum_T k_i \leqslant 6/\delta \tag{9}$$

gilt, so ist wegen (7), (8) und (9)

---

[9]) Möchte der Abstand einer Ecke E des Polygons p_i vom Mittelpunkt des Kreises k_i eine gewisse Größe übertreffen, so könnte zum Kreissystem ein um E geschlagener zu k_i kongruenter Kreis hingefügt werden.

[10]) Für $\nu > 0$ gilt $\varphi''(\nu) = \dfrac{2\pi \operatorname{tg} \pi/\nu}{\nu^3 \cos^2 \pi/\nu} > 0$.

[11]) Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math. 30 (1906), 175—193.

$$D = \lim_{T\to\infty} \sum_T k_i \,/\, \sum_T p_i \leqslant 1/\varphi(6/\delta)\ ,$$

womit (5) bewiesen ist[12]).

Für kleine Werte von $1 - \delta$ ist das Ergebnis des vorigen Punktes schärfer als (5). Für kleine Werte von δ ist dagegen die Abschätzung (5) ziemlich grob. Es ist aber zu beachten, daß sich mit einem analogen Verfahren die Ungleichung

$$D \geqslant \frac{\pi\delta}{3} \operatorname{cosec} \frac{\pi\delta}{3} \tag{10}$$

bezüglich des Problems der dünnsten Kreislagerung herleiten läßt. Ferner läßt sich der hier gegebene Beweis auch für ein beliebiges System von Ellipsenscheiben übertragen, falls wir die Hauptachsen als gleichmäßig beschränkt voraussetzen. Darauf wollen wir aber hier nicht näher eingehen.

3. Wir wollen nun den Fall von Kreisen von nur zweierlei verschiedener Größe $k < K$ etwas näher untersuchen. Wir setzen voraus, daß der Quotient der Anzahl der im Bereich T befindlichen kleinen und großen Kreise für $T \to \infty$ gegen 1 zustrebt. Der Fall, wo dieser Grenzwert beliebig vorgeschrieben ist, läßt sich analog behandeln.

Im Anschluß der Überlegungen des Punktes 2 ergibt sich unmittelbar die Abschätzung

$$D \leqslant \frac{k + K}{k\,\varphi(6 - \alpha) + K\,\varphi(6 + \alpha)}\ , \tag{11}$$

wobei $6 - \alpha$ bzw. $6 + \alpha$ den Mittelwert der Eckenzahl der zur kleinen bzw. großen Kreisen gehörigen Polygone p_i bedeutet. Um die Dichte für vorgegebene Werte von k und K abzuschätzen haben wir daher

$$\operatorname{Min}\,[k\varphi(6 - \alpha) + K\varphi(6 + \alpha)] \quad \text{für} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 3$$

zu bestimmen.

Betrachten wir den Fall $k/K = (\sqrt{2} - 1)^2$, der dem System der Inkreise bei der Zerlegung der Ebene in reguläre 4- und 8-Ecke entspricht. Hierbei sind unserer Voraussetzung entsprechend „ebensoviel" kleine wie große Kreise vorhanden. Die Dichte dieses Systems ist

$$D_0 = \frac{k + K}{k\,\varphi(4) + K\varphi(8)} = (1 - 1/\sqrt{2})^2\,\pi \approx 0\cdot 92015\ .$$

---

[12]) Es sei noch bemerkt, daß in (5) $\delta = \operatorname{Min} k_i / \operatorname{Max} k_i$ durch $\bar{k} / \operatorname{Max} k_i$ ersetzt werden kann, wobei $\bar{k}$ den arithmetischen Mittel der Kreisscheibeninhalte im obigen Sinn bedeutet.

Nun erreicht aber $k\varphi(6-\alpha)+K\varphi(6+\alpha)$ für $k=(\sqrt{2}-1)^2\pi$, $K=\pi$ sein Minimum nicht für $\alpha=2$, sondern für irgendeinen Wert $1\cdot 4<\alpha<1\cdot 5$. Der numerische Wert dieses Minimums beträgt gegenüber $k\varphi(4)+K\varphi(8)=4$ etwa $3\cdot 9869$. Unsere Überlegungen ergeben daher nur $D<0\cdot 92317$, einen Wert, der um etwa $1/3\,\%$ größer als D_0 ist.

Die naheliegende Vermutung, daß das betrachtete System die dichteste Lagerung der in ihm vorkommenden Kreise liefert, ist noch nicht exakt bewiesen worden[13]).

Zum Schluß wollen wir nur noch auf die zu (11) analoge Abschätzung

$$D \geqslant \frac{k+K}{k\psi(6-\alpha)+K\psi(6+\alpha)}\ ; \quad \psi(\nu)=\frac{\nu}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{\nu}$$

bezüglich des Problems der dünnsten Kreislagerung hinweisen.

---

[13]) Dagegen sieht man leicht ein, daß die Inkreise bei der Zerlegung der Ebene in reguläre 3- und 12-Ecke — mit doppelt so viel kleinen wie großen Kreisen — sich in der dichtesten Anordnung befinden. In diesem System befinden sich nämlich die großen Kreise in der dichtesten Lagerung. Gäbe es nun eine dichtere Packung der betrachteten zweierlei Kreise, so erhält man durch Fortlassung der kleinen Kreise ein System kongruenter Kreise mit $D>\sqrt{3}\pi/6$.

(Eingegangen den 31. Oktober 1944.)