Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 17 (1944-1945)

Artikel: Sur les lattis linéaires de dimension finie.

Autor: Nagy, Bella de S de

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16337

Sur les lattis linéaires de dimension finie

Par Béla de Sz. Nagy, Szeged (Hongrie)

1. En recherchant les propriétés structurelles de l'ensemble des fonctions positives appartenant à l'espace L_2 des fonctions à carré sommables par rapport à une fonction $\alpha(x)$ non-décroissante, j'ai obtenu, il y a quelques années, le théorème suivant[1]:

Soit $\mathfrak{R}$ l'espace de Hilbert ou un espace euclidien de dimension finie, et soit $\mathfrak{P}$ un sous-ensemble donné de $\mathfrak{R}$. Pour qu'on puisse réaliser $\mathfrak{R}$ par un L_2 [2]*) de façon à faire correspondre aux vecteurs de $\mathfrak{P}$ précisément les fonctions positives dans L_2, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

A. *$u \in \mathfrak{P}$, $v \in \mathfrak{P}$ entraînent $(u, v) \geqq 0$, et inversement $(u, v) \geqq 0$ pour un $u \in \mathfrak{R}$ et pour tout $v \in \mathfrak{P}$ entraînent $u \in \mathfrak{P}$;*

B. *lorsque pour les vecteurs u_1, u_2, v_1, v_2 de $\mathfrak{P}$ on a $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, alors il existe des vecteurs $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}$ de $\mathfrak{P}$ tels que $u_1 = w_{11} + w_{12}$, $u_2 = w_{21} + w_{22}$, $v_1 = w_{11} + w_{21}$, $v_2 = w_{12} + w_{22}$* [3]).

Cette proposition subsiste aussi bien pour les espaces complexes que pour les espaces réels. Dans le cas d'un espace réel, la condition A signifie qu'un vecteur appartient à $\mathfrak{P}$ si, et seulement si, l'angle qu'il fait avec n'importe quel vecteur de $\mathfrak{P}$ ne dépasse pas l'angle droit. Il en résulte que $\mathfrak{P}$ est un cône convexe fermé d'ouverture rectangulaire.

Dans le cas où $\mathfrak{R}$ est *l'espace euclidien réel de dimension n, désigné par $\mathfrak{R}_n$*, la fonction $\alpha(x)$ en question doit évidemment être une fonction-escalier ayant n sautes (qu'on peut d'ailleurs supposer tous égaux à l'unité). La „réalisation par L_2" équivaut donc à l'introduction d'un système de coordonnées rectangulaires dans $\mathfrak{R}_n$ de façon que $\mathfrak{P}$ comprenne précisément les vecteurs aux composants non-négatifs. En d'autres termes, $\mathfrak{P}$ est un angle polyèdre rectangulaire à n arêtes, ou plus brièvement un angle n-èdre rectangulaire. Donc, dans le cas particulier de

---

[1]) *Béla de Sz. Nagy*, On the set of positive functions in L_2, Annals of Mathematics, 39 (1938), 1—13.

[2]) C'est-à-dire, à l'appliquer linéairement et isométriquement sur L_2.

[3]) Cette condition joue un rôle fondamental aussi dans certaines recherches de M. *F. Riesz*, cf. Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, Annals of Mathematics, 41 (1940), 174—206, rédaction revue d'un Mémoire précédent en langue hongroise parû dans Matematikai és Természettudományi Értesitö, 56 (1937), 1—46.

l'espace $\mathfrak{R}_n$, notre théorème peut être énoncé dans la forme plus géométrique suivante:

Parmi les cônes convexes fermés situés dans $\mathfrak{R}_n$, et d'ouverture rectangulaire, les angles n-èdres (rectangulaires) sont caractérisés par la condition B.

Comme la condition B n'implique pas la métrique de $\mathfrak{R}_n$, il est tout naturel à demander si la restriction aux cônes d'ouverture *rectangulaire* n'est-elle pas inessentielle? C'est à cette question que le théorème I de cette Note va donner une réponse affirmative.

2. Rappelons d'abord ce qu'on entend par un *cône convexe* $\mathfrak{K}$ dans l'espace $\mathfrak{R}_n$. C'est un ensemble de vecteurs (issus de 0) tel que

1. si $u \in \mathfrak{K}$, alors aussi $\lambda u \in \mathfrak{K}$ pour $\lambda \geqq 0$, et inversement, si $u \in \mathfrak{K}$, $u \neq 0$, $\lambda u \in \mathfrak{K}$, alors $\lambda \geqq 0$;

2. si $u \in \mathfrak{K}$, $v \in \mathfrak{K}$, alors aussi $u + v \in \mathfrak{K}$.

$\mathfrak{K}$ est *fermé* lorsqu'il contient aussi les vecteurs-frontière. Nous dirons que $\mathfrak{K}$ est *non-dégénéré*, lorsqu'il n'est contenu dans aucun hyperplan de $\mathfrak{R}_n$.

Cela étant, voici la réponse à la question posée plus haut:

Théorème I. *Parmi les cônes convexes fermés non-dégénérés, situés dans $\mathfrak{R}_n$, les angles n-èdres sont caractérisés par la condition B.*

Nécessité. Montrons que si $\mathfrak{P}$ est un angle n-èdre dans $\mathfrak{R}_n$, au sommet 0, alors la condition B se trouve vérifiée. Considérons les arêtes de $\mathfrak{P}$ comme demi-axes positives d'un système (oblique) de coordonnées; $\mathfrak{P}$ contiendra alors précisément les vecteurs u dont tous les composants $u^1, u^2, \ldots, u^n$ sont $\geqq 0$. Soient u_1, u_2, v_1, v_2 des vecteurs de $\mathfrak{P}$ tels que $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, donc $u_1^\nu + u_2^\nu = v_1^\nu + v_2^\nu$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Posons

$$w_{11}^\nu = \min\{u_1^\nu, v_1^\nu\}, \quad w_{12}^\nu = u_1^\nu - w_{11}^\nu, \quad w_{21}^\nu = v_1^\nu - w_{11}^\nu, \quad w_{22}^\nu = u_2^\nu - w_{21}^\nu$$

pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$. On voit aisément que les vecteurs w_{ik} aux composants w_{ik}^ν satisfont aux relations exigées par condition B.

Suffisance. Soit maintenant $\mathfrak{P}$ un cône convexe fermé non-dégénéré dans $\mathfrak{R}_n$, et vérifiant la condition B. Montrons qu'il est un angle n-èdre.

Remarquons d'abord que la condition B entraîne, par récurrence, la condition plus générale suivante:

B*. Etant donnés dans $\mathfrak{P}$ des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s$ $(r \geqq 2,\ s \geqq 2)$ vérifiant la relation $\sum_{i=1}^{r} u_i = \sum_{k=1}^{s} v_k$, il existe des vecteurs $w_{ik} (i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, s)$ dans $\mathfrak{P}$ tels que $u_i = \sum_{k=1}^{s} w_{ik}$, $v_k = \sum_{i=1}^{r} w_{ik}$.

A la théorie générale des corps convexes nous empruntons le fait qu'un cône convexe fermé $\mathfrak{P}$ est toujours identique à l'enveloppe convexe de ses génératrices extrèmes, la demi-droite portée par le vecteur $u \in \mathfrak{P}$ étant dite une *génératrice extrême* (et u même un *vecteur extrême*) lorsqu'il n'existe d'autres décompositions de u en somme de vecteurs de $\mathfrak{P}$, $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_h$, que celles évidentes $u = \lambda_1 u + \lambda_2 u + \cdots + \lambda_h u$ avec $\lambda_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1$.

Or, $\mathfrak{P}$ n'étant pas dégénéré, a au moins n génératrices extrêmes. Donc le théorème sera établi si nous montrerons que les génératrices extrèmes de $\mathfrak{P}$ sont linéairement indépendantes.

Supposons, par hypothèse contraire, que les génératrices extrêmes portées par les vecteurs $w_1, w_2, \ldots, w_h$ ne soient pas linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il existe une relation $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_h w_h = 0$ avec des coefficients réels non tous 0. Désignons les termes de cette somme aux facteurs positifs par $u_1, u_2, \ldots, u_r$, ceux aux facteurs négatifs par $-v_1, -v_2, \ldots, -v_s$ $(r \geqq 0, s \geqq 0, r + s \geqq 2)$. Les vecteurs u_i, v_i appartiennent à $\mathfrak{P}$ et on a $u_1 + u_2 + \cdots + u_r = v_1 + v_2 + \cdots + v_s$.

Je dis que $r \geqq 2$, $s \geqq 2$. En effet, pour $r = 0$ on aurait

$$0 = v_1 + v_2 + \cdots + v_s, \qquad -v_1 = v_2 + \cdots + v_s,$$

donc $-v_1$ appartiendrait à $\mathfrak{P}$, ce qui est impossible. Si $r = 1$, on aurait

$$u_1 = v_1 + v_2 + \cdots + v_s,$$

ce qui est impossible parce que u_1 est un vecteur extrême. Donc $r \geqq 2$, et par analogie $s \geqq 2$.

Par la condition B*, il existe des vecteurs $w_{ik} \in \mathfrak{P}$ $(i = 1, 2, \ldots, r;$ $k = 1, 2, \ldots, s)$ tels que

$$u_i = \sum_{k=1}^{s} w_{ik}, \quad v_k = \sum_{i=1}^{r} w_{ik}.$$

On peut supposer (sans restreindre la généralité) que $w_{11} \neq 0$. Il s'ensuit des relations

$$u_1 = w_{11} + w_{12} + \cdots + w_{1s}, \qquad v_1 = w_{11} + w_{21} + \cdots w_{r1},$$

les vecteurs u_1 et v_1 étant extrêmes, que w_{11} est à la fois de même direction que u_1 et v_1, ce qui est impossible, car ces derniers portent des génératrices différentes. Ainsi nous sommes aboutis à une contradiction; les génératrices extrêmes de $\mathfrak{P}$ sont donc linéairement indépendantes, ce qui achève la démonstration.

3. Le théorème que nous venons d'établir admet des conséquences intéressantes pour la théorie des lattis linéaires.

On appelle *lattis linéaire* un espace vectoriel réel $\mathfrak{L}$ qui est partiellement ordonné et cela en considérant comme non-négatifs (ou plus brièvement positifs) certains vecteurs u de $\mathfrak{L}$, en formule $u \geqq 0$, et en écrivant $u \geqq v$ ou $v \leqq u$ si $u - v \geqq 0$. On suppose que

a) $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ *entraînent* $u + v \geqq 0$;

b) $u \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$ *où* λ *est un facteur numérique, entraînent* $\lambda u \geqq 0$, *et inversement* $u \geqq 0$, $u \neq 0$ *et* $\lambda u \geqq 0$ *entraînent* $\lambda \geqq 0$;

c) *pour deux vecteurs quelconques* u, v *de* $\mathfrak{L}$ *il y a toujours un plus petit majorant* $w = \sup\{u, v\}$ *caractérisé par les relations* $w \geqq u$, $w \geqq v$ *et* $w \leqq w'$ *pour tout autre* w' *tel que* $w' \geqq u, w' \geqq v$.

Outre ces conditions usuelles[4]) nous posons encore la suivante:

d) $u + \lambda v \geqq 0$ *pour tout* $\lambda > 0$ *entraîne* $u \geqq 0$.

Un exemple pour un tel lattis linéaire est fourni par l'espace $\mathfrak{R}_n$, partiellement ordonné moyennant un système (rectangulaire ou oblique) de coordonnées, et cela en considérant comme positifs les vecteurs dont tous les composants sont des nombres non-négatifs. Or, je dis qu'il n'y a d'autres lattis linéaires de dimension n. On a notamment le

Théorème II. *Dans tout lattis linéaire* $\mathfrak{L}$ *de dimension finie on peut choisir un système (rectangulaire ou oblique) de coordonnées de façon que les vecteurs positifs soient précisément ceux dont tous les composants sont non-négatifs*[5]).

[4]) Dans cette forme elles sont empruntées à *F. Riesz*, Sur la théorie ergodique des espaces abstraits, Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, **10** (1941), 1—20, où l'on trouvera aussi des indications pour la littérature.

[5]) Le même théorème a été démontré par une autre voie par *A. Youdine*, Solution des deux problèmes de la théorie des espaces semi-ordonnés, Comptes Rendus Acad. Sci. URSS (2), **27** (1939), 418—422.

En vertu du théorème I, il ne nous reste qu'à montrer que l'ensemble $\mathfrak{P}$ des vecteurs positifs de $\mathfrak{L}$ est un cône convexe fermé non-dégénéré et vérifiant la condition B.

Tout d'abord, les conditions a)—b) assurent que $\mathfrak{P}$ est un cône convexe.

Les conditions a)—c) assurent aussi l'existence d'un *plus grand minorant* inf $\{u, v\}$ de deux vecteurs quelconques u, v de $\mathfrak{L}$, jouissant des propriétés évidentes; en particulier $\inf \{u, v\} + \sup \{u, v\} = u + v$ [6]). Il s'ensuit que $u = u + 0 = \sup \{u, 0\} + \inf \{u, 0\} = \sup \{u, 0\} - \sup \{-u, 0\}$, donc tout vecteur u de $\mathfrak{L}$ admet une décomposition en différence de deux vecteurs positifs. Par conséquent, $\mathfrak{P}$ ne peut pas être dégénéré: il contient au moins un vecteur intérieur v_0. Soit u un vecteur-frontière de $\mathfrak{P}$. Les vecteurs $\frac{1}{1+\lambda}(u + \lambda v_0)$, où $\lambda > 0$, appartiennent à $\mathfrak{P}$, donc, par condition d), u y appartient lui-aussi. Donc $\mathfrak{P}$ est fermé.

Montrons que $\mathfrak{P}$ vérifie la condition B. En effet, soient u_1, u_2, v_1, v_2 des vecteurs positifs, $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$. Posons $w_{11} = \inf \{u_1, v_1\}$, $w_{12} = u_1 - w_{11}$, $w_{21} = v_1 - w_{11}$; ces sont évidemment positifs et l'on a $\inf \{w_{12}, w_{21}\} = 0$ [7]). Comme $w_{12} \leqq w_{12} + u_2 = (u_1 + u_2) - w_{11} = (v_1 + v_2) - w_{11} = w_{21} + v_2$, on a $w_{12} \leqq w_{21} + v_2$. Comme d'autre part $w_{21} \leqq w_{21} + v_2$, on a aussi $w_{12} + w_{21} = \sup \{w_{12}, w_{21}\} \leqq w_{21} + v_2$, donc $w_{12} \leqq v_2$, $w_{22} = v_2 - w_{12} \geqq 0$. On voit sans peine que ces vecteurs w_{ik} satisfont aux relations exigées, ce qui achève la démonstration.

(Reçu le 23 juin 1943.)

---

[6]) Cf. p. ex. *F. Riesz*, l. c. [4]), p. 5.

[7]) Cela vient de la relation évidente $\inf \{w_{12}, w_{21}\} + w_{11} \leqq \inf \{w_{12} + w_{11}, w_{21} + w_{11}\} = \inf \{u_1, v_1\} = w_{11}$.