

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 17 (1944-1945)

**Artikel:** Sulla formula di Cauchy n-dimensionale e sopra un teorema di Hartogs nella teoria delle funzioni di n variabili complesse.  
**Autor:** Martinelli, Enzo di  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16336>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sulla formula di Cauchy $n$ -dimensionale e sopra un teorema di Hartogs nella teoria delle funzioni di $n$ variabili complesse

Di ENZO MARTINELLI, Roma

## *Introduzione*

1. In un lavoro già apparso<sup>1)</sup> ho dato due diverse dimostrazioni del seguente teorema di Hartogs: „Una funzione analitica  $f(z_1, \dots, z_n)$  delle variabili complesse  $z_1, \dots, z_n$  ( $n > 1$ ), la quale sia regolare ed univocamente definita sul contorno irriducibile  $\Gamma_{2n-1}$  di un dominio univalente e limitato  $D_{2n}$  dello spazio euclideo  $S_{2n}$  rappresentativo delle  $n$ -ple  $z_1, \dots, z_n$ , può sempre prolungarsi analiticamente in modo regolare ed univoco in tutto  $D_{2n}$ .“

Ritorno ora sulla seconda dimostrazione estendendola alle condizioni generali di validità del teorema, mentre nel lavoro citato essa era limitata al caso in cui fosse  $n = 2$  e il dominio  $D$  convesso<sup>2)</sup>. Ho già segnalato l'interesse della dimostrazione, proveniente dal carattere topologico di questa, che pone in evidenza perché il teorema vale per  $n > 1$  e non vale per  $n = 1$ .

Mi si presenta qui l'occasione di ritornare altresì sulla formula integrale di Cauchy  $n$ -dimensionale, nella sua forma generale<sup>3)</sup>, di cui l'attuale dimostrazione del teorema d'Hartogs è un'applicazione. Comincio perciò col richiamare tale formula, aggiungendo sull'argomento alcune considerazioni complementari che mi sembrano di qualche utilità (nn. 3,4).

## *Formula di Cauchy $n$ -dimensionale*

2. Sia  $f(z_1, \dots, z_n)$  una funzione analitica regolare uniforme in un dominio  $D_{2n}$  dello  $S_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ ,  $z_j = x_j + iy_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

---

<sup>1)</sup> Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs, *Comm. Math. Helvetici*, vol. 15 (1943), pag. 340.

<sup>2)</sup> Nelle condizioni generali  $D_{2n}$  può essere non convesso ed anche avere connessioni (delle varie dimensioni) non semplici.

<sup>3)</sup> Cfr. la mia nota: La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse, *Rend. della R. Accad. dei Lincei*, vol. XXV, s. 6<sup>a</sup>, gennaio 1937, pag. 33; e quella di B. Segre: Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali  $n$ -pli, nella teoria delle funzioni di  $n$  variabili complesse, *Atti del 1° Congresso dell'Unione Mat. Ital.*, aprile 1937, pag. 174. Chiamo  $n$ -dimensionale la formula di cui trattasi (in relazione alla dimensione del ciclo d'integrazione che in essa appare), per distinguerla da una formula  $(2n - 1)$ -dimensionale che ho altrove stabilito, e che deve anch'essa considerarsi come estensione della formula elementare di Cauchy.

Si riguarderà lo  $S_{2n}$  orientato dagli assi coordinati orientati positivamente ed ordinati nel modo indicato.

Consideriamo gli  $n$  spazi caratteristici  $(2n - 2)$ -dimensionali, uscenti da un punto  $O(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$ ,  $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ , interno a  $D_{2n}$ , di equazioni rispettive:

$$z_1 = \zeta_1; z_2 = \zeta_2; \dots; z_n = \zeta_n.$$

Il complesso degli  $n$  spazi caratteristici, i quali hanno in comune il solo punto  $O$  da cui sono individuati, indichiamo con  $T_{2n-2}(O)$ .

Se  $V_n$  è un  $n$ -ciclo orientato di  $D_{2n}$ , non incontrante  $T_{2n-2}(O)$ , ha luogo a considerarsi un carattere topologico intero  $N(V_n, O)$ , dipendente dalla posizione di  $V_n$  rispetto a  $T_{2n-2}(O)$ , che può precisarsi così. Si consideri l' $n$ -edro solido rettangolo  $K_n(O)$  individuato ed orientato da  $n$  semirette orientate uscenti da  $O$  e parallele ordinatamente ai piani caratteristici  $x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n$  (per es. parallele ed equiverse agli  $n$  semiassi positivi  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Il contorno orientato  $H_{n-1}(O)$  di  $K_n(O)$  appartiene a  $T_{2n-2}(O)$ , onde non incontra  $V_n$ . L'intero  $N$  è l'ordinario indice d'allacciamento di  $H_{n-1}$  e  $V_n$  in  $S_{2n}$ <sup>4</sup>); vale a dire  $N$  risulta l'indice di Kronecker,  $[K_n, V_n]$ , dell' $n$ -edro  $K_n$  con  $V_n$ .

Ciò posto, la formula di Cauchy generale  $n$ -dimensionale è la seguente:

$$f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n N} \int_{V_n} \frac{f(z_1, \dots, z_n) d(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)}. \quad (1)$$

Condizioni necessarie<sup>5</sup>) e sufficienti per la validità della (1) sono:

- I.  $V_n \subset D_{2n} - T_{2n-2}(O)$  ;
- II.  $V_n \sim 0$  in  $(D_{2n} - T_{2n-2}(O)) + O$  ;
- III.  $Allacc(H_{n-1}(O), V_n) = N \neq 0$  .

Dall'ultima condizione,  $N \neq 0$ , si può prescindere, portando a numeratore l'indice  $N$  nella (1); ma, quando sia  $N=0$ , la formula che si ottiene non serve ad esprimere il valore della  $f$  in  $O$  mediante i valori su  $V_n$ .

<sup>4</sup>) Per il concetto e le proprietà che occorrono dell'indice d'allacciamento, cfr. p. es. *Alexandroff-Hopf*, Topologie, t. I (Berlin, Springer 1935), Cap. IX. B. Segre, nel lavoro cit., chiama  $N$  indice d'allacciamento di  $V_n$  con  $T_{2n-2}$ ; la differenza di segno che ivi appare nella definizione di  $N$ , rispetto all'attuale esposizione, dipende dalla diversa orientazione che qui si assume per lo  $S_{2n}$ .

<sup>5</sup>) La necessità delle condizioni deve intendersi in relazione alla validità della (1) per una arbitraria  $f(z_1, \dots, z_n)$  regolare in  $D_{2n}$ ; chè, per particolari  $f(z_1, \dots, z_n)$  (p. es. per la funzione identicamente nulla), la (1) può valere comunque si prenda  $V_n$ .

Per  $n = 1$ ,  $T_{2n-2}$  e  $H_{n-1}$  si riducono ambedue al solo punto  $O$ , e  $K_n$  ad una semiretta uscente da  $O$  sul piano d'Argand-Gauss  $xy$ . L'indice  $N$  non è, allora, altro che il numero delle volte (computato con conveniente segno) che la curva d'integrazione, cui si riduce  $V_n$ , avvolge il punto  $O$ .

3. Si costruisce ovviamente qualche ciclo d'integrazione  $V_n$ , che soddisfaccia alle condizioni occorrenti per la validità della (1). Si consideri p. es. l' $n$ -toro circolare  $\tau_n$  con centro in  $O$  e raggi  $r_1, \dots, r_n$ , di equazioni:

$$|z_1 - \zeta_1| = r_1, \dots, |z_n - \zeta_n| = r_n.$$

L' $n$ -toro è tracciato sulla ipersuperficie sferica  $\Omega_{2n-1}$  di centro  $O$  e raggio  $r = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}$ ; onde, supposti  $r_1, \dots, r_n$  abbastanza piccoli,  $\Omega_{2n-1}$  e con essa  $\tau_n$  risultano interni a  $D_{2n}$ . È allora  $\tau_n \sim 0$  in  $(D_{2n} - T_{2n-2}) + O$  (come si riconosce costruendo la varietà conica congiungente  $O$  con  $\tau_n$ , la quale è circondata da  $\tau_n$  ed appartiene a  $(D_{2n} - T_{2n-2}) + O$ ); ed inoltre è  $N(\tau_n, O) = [K_n, \tau_n] = 1$ . Dunque  $\tau_n$  può assumersi nella (1) come ciclo di integrazione  $V_n$ , ponendo ivi  $N = 1$ .

Supposto  $D_{2n}$  univalente e limitato, è talora utile, per le applicazioni della (1), di poter assumere come varietà d'integrazione un ciclo tracciato sul contorno  $\Gamma_{2n-1}$  di  $D_{2n}$ . Quando  $D_{2n}$  è convesso, la possibilità di costruire un ciclo soddisfacente, oltre che alle I, II, III del n. 2, a questa ulteriore condizione, è immediata: bastando considerare il ciclo ottenuto per proiezione biunivoca da  $O$  su  $\Gamma_{2n-1}$  di un  $n$ -toro come  $\tau_n$ . Vogliamo qui stabilire in generale che:

*Esiste sempre qualche ciclo,  $W_n$ , adatto alla (1), tracciato sul contorno  $\Gamma_{2n-1}$  del dominio  $D_{2n}$  ove è definita la  $f(z_1, \dots, z_n)$ , sia  $D_{2n}$  convesso o no e  $\Gamma_{2n-1}$  irriducibile o riducibile.*

Consideriamo all'uopo la varietà conica indefinita  $(n + 1)$ -dimensionale,  $C_{n+1}$ , che proietta da  $O$  l' $n$ -toro  $\tau_n$ . È noto<sup>6)</sup> che, comunque sia l'intersezione effettiva di  $C_{n+1}$  e  $\Gamma_{2n-1}$ , si può sempre far corrispondere al simbolo d'intersezione virtuale  $(C_{n+1}, \Gamma_{2n-1})$  in  $D_{2n}$  un ciclo  $W_n$ , di dimensione  $n$ , eventualmente riducibile, tracciato su  $\Gamma_{2n-1}$ <sup>7)</sup> (e definito a meno di un'omologia nell'intorno dell'intersezione effettiva). Dico che  $W_n$  soddisfa alle condizioni topologiche occorrenti per la validità della (1).

<sup>6)</sup> Cfr. Lefschetz, *Topology* (New York 1930), cap. IV.

<sup>7)</sup> Giacché, qualunque reticolazione di  $D_{2n}$  si presupponga onde costruire  $W_n$  al modo di Lefschetz, il ciclo  $\Gamma_{2n-1}$ , da intersecarsi con  $C_{n+1}$ , costituisce sempre un ciclo subordinato alla reticolazione, in quanto è il contorno di  $D_{2n}$ .

Intanto è chiaro che  $W_n$  soddisfa alla I del n. 2, perché, appartenendo all'intorno dell'intersezione effettiva di  $C_{n+1}$  e  $\Gamma_{2n-1}$ , esso non ha punti comuni con  $T_{2n-2}$ , come non ne ha  $\tau_n$  e quindi  $C_{n+1}$  (fuori di  $O$ ). Mostriamo inoltre che  $W_n \sim \tau_n$  in  $D_{2n} - T_{2n-2}$ : dal che seguirà che  $N(W_n, O) = N(\tau_n, O) = 1$  (condizione III), e che  $W_n \sim 0$  in  $(D_{2n} - T_{2n-2}) + O$  come  $\tau_n$  (condizione II). A tal fine, indichiamo con  $E_{2n}$  la  $2n$ -sfera contornata dall'ipersuperficie sferica  $\Omega_{2n-1}$  ove è tracciato  $\tau_n$ . Risulta:

$$(C_{n+1}, D_{2n} - E_{2n}) \rightarrow (C_{n+1}, \Gamma_{2n-1} - \Omega_{2n-1}) = (C_{n+1}, \Gamma_{2n-1}) - (C_{n+1}, \Omega_{2n-1}) = W_n - \tau_n;$$

e poiché  $(C_{n+1}, D_{2n} - E_{2n}) \subset D_{2n} - T_{2n-2}$ , segue

$$W_n - \tau_n \sim 0 \quad \text{in} \quad D_{2n} - T_{2n-2}.$$

Si poteva giungere alla conclusione desiderata che  $W_n$  è adatto alla (1), anche osservando — una volta stabilita l'ultima relazione scritta — che l'integrale a secondo membro della (1), in base al teorema di Cauchy-Poincaré, assume lo stesso valore esteso sia a  $W_n$  che a  $\tau_n$ , giacché i due cicli risultano omologhi nel campo di olomorfia della funzione integranda.

*Osservazione.* — La costruzione indicata del ciclo  $W_n$  su  $\Gamma_{2n-1}$  può evidentemente generalizzarsi. Anziché dall' $n$ -toro circolare  $\tau_n$  (che è prodotto topologico di  $n$  circonferenze situate nei piani d'Argand-Gauss  $z_1, \dots, z_n$  e con centro in  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ ), si può invero partire da un  $n$ -toro prodotto di  $n$  circuiti in quei piani, avvolgenti i punti  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  e abbastanza prossimi ad essi. Se tutti i circuiti avvolgono semplicemente i punti indicati, l'indice  $N$  che compete al ciclo  $W_n^*$  che si viene ad ottenere su  $\Gamma_{2n-1}$  vale ancora 1; altrimenti può avere valore diverso.

4. Per  $n = 1$  il processo del n. 3 per determinare un ciclo d'integrazione  $W_1$  sul contorno del dominio  $D_2$  (il quale sia p. es. connesso), conduce a considerare come ciclo  $W_1$  l'intero contorno  $\Gamma_1$  (eventualmente riducibile) di  $D_2$ ; ciclo che risulta così indipendente dalla posizione del punto  $O$ , e quindi atto a definire, mediante la (1), il valore di  $f$  in un punto qualunque interno a  $D_2$  <sup>8)</sup>. Per  $n > 1$ , invece, il ciclo  $W_n$  costruito su  $\Gamma_{2n-1}$  non è

---

<sup>8)</sup> Che l'intero contorno  $\Gamma_1$  di  $D_2$  costituisca un ciclo  $W_1$  adatto alla (1) risulta, naturalmente, in modo diretto anche dalle condizioni topologiche I, II, III (n. 2), cui deve soddisfare  $W_1$ . Invero, il contorno  $\Gamma_1$  di  $D_2$  sarà in generale composto di più cicli irriducibili  $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_1^{(2)}, \dots, \Gamma_1^{(s)}$ , dei quali sia p. es.  $\Gamma_1^{(1)}$  il contorno esterno. Allora l'indice d'allacciamento di  $\Gamma_1^{(1)}$  con  $O$  vale 1, mentre valgono zero gli analoghi indici relativi a  $\Gamma_1^{(2)}, \dots, \Gamma_1^{(s)}$ . Ne segue che l'indice d'allacciamento di  $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)} + \dots + \Gamma_1^{(s)}$  è 1; e tale indice non dipende dalla posizione di  $O$  (ciò che è confermato dal fatto che due punti qualunque interni al dominio connesso  $D_2$  sono sempre tra loro omologhi in  $S_2 - \Gamma_1$ ). Inoltre risulta  $\Gamma_1 \sim 0$  in  $(D_2 - O) + O = D_2$ , poiché  $D_2 \rightarrow \Gamma_1$ .

indipendente dalla posizione di  $O$ , nè può essere altrimenti poiché, in generale, le condizioni topologiche I, II, III (n. 2) cui deve soddisfare  $W_n$  variano al variare di  $O$ .

È opportuno però sottolineare il fatto che:

a) Se  $V_n$  è un ciclo adatto per il punto  $O$ , esso è altresì adatto per tutti i punti di un intorno abbastanza ristretto di  $O$ .

Infatti, se è  $O'$  abbastanza prossimo ad  $O$ , risulta  $T_{2n-2}(O')$  abbastanza prossimo a  $T_{2n-2}(O)$ , in guisa che  $V_n$ , non incontrando  $T_{2n-2}(O)$ , non incontra neppure  $T_{2n-2}(O')$ . Dunque  $V_n$  soddisfa alla I del n. 2 in relazione ad  $O'$ , come vi soddisfa in relazione ad  $O$ . Si ha poi

$$\text{Allacc}(H_{n-1}(O'), V_n) = \text{Allacc}(H_{n-1}(O), V_n),$$

poiché  $H_{n-1}(O') \sim H_{n-1}(O)$  in  $S_{2n} - V_n$ ; onde anche la III è soddisfatta in relazione ad  $O'$  come ad  $O$ , ed inoltre l'intero  $N$  è il medesimo nei due casi. Infine, per mostrare che  $V_n$  soddisfa anche alla II in relazione ad  $O'$  come ad  $O$ , si ricordi (n. 3) che  $V_n \sim \tau_n$  in  $D_{2n} - T_{2n-2}(O)$ , per cui esiste una varietà  $(n+1)$ -dimensionale  $B_{n+1}$ <sup>9)</sup>, non incontrante  $T_{2n-2}(O)$ , tale che  $B_{n+1} \rightarrow V_n - \tau_n$ . Ora, per  $O'$  prossimo ad  $O$ ,  $B_{n+1}$  non incontra neppure  $T_{2n-2}(O')$ , e quindi è altresì  $V_n \sim \tau_n$  in  $D_{2n} - T_{2n-2}(O')$ . D'altra parte, costruendo la varietà congiungente  $O'$  con  $\tau_n$ , si prova che  $\tau_n \sim 0$  in  $(D_{2n} - T_{2n-2}(O')) + O'$ , tenuto conto che  $\tau_n$  non incontra  $T_{2n-2}(O')$ . Ne segue che  $V_n \sim 0$  in  $(D_{2n} - T_{2n-2}(O')) + O'$ .

Osserviamo ancora che, per  $n > 1$ , si presenta la circostanza (nuova rispetto al caso  $n = 1$ , e dipendente dal dislivello fra la dimensione  $n$  del ciclo  $W_n$  e la dimensione  $2n - 1$  del ciclo  $\Gamma_{2n-1}$  contorno di  $D_{2n}$ ) che, una volta fissato il punto  $O$ , un ciclo  $W_n$  adatto alla (1) e tracciato su  $\Gamma_{2n-1}$  non è univocamente determinato, ma è suscettibile di variare con larga arbitrarietà. Invero, si può intanto far variare il ciclo  $W_n$  ottenuto su  $\Gamma_{2n-1}$  con la costruzione indicata (n. 3), modificando i mutui rapporti dei raggi dell' $n$ -toro  $\tau_n$ ; oppure si può deformare l' $n$ -toro circolare  $\tau_n$  in un  $n$ -toro prodotto di circuiti più generali, deformando in conseguenza il ciclo  $W_n$  che se ne ottiene (n. 3, Oss.). È evidente che, con siffatte deformazioni, il ciclo  $W_n$  resta omologo a sè stesso in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$ . In generale si può asserire che:

b) Sopra  $\Gamma_{2n-1}$ , ogni ciclo ottenibile con una deformazione omologica qualunque in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$  da un ciclo  $W_n$ , tracciato su  $\Gamma_{2n-1}$  e adatto alla (1) in relazione ad un punto  $O$ , è ancora adatto alla (1) in relazione allo stesso punto  $O$ .

<sup>9)</sup> Come varietà  $B_{n+1}$  può assumersi p. es. quella corrispondente all'intersezione virtuale  $(C_{n+1}, D_{2n} - E_{2n})$  del n. 3.

Invero, variando  $W_n$  con un'omologia in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$ , il ciclo continua a soddisfare alle condizioni topologiche I, II, III (n. 2) e non si altera il suo indice d'allacciamento con  $H_{n-1}(O)$ . La conclusione stessa può anche trarsi dal teorema di Cauchy-Poincaré in modo simile a quello indicato alla fine del n. 3.

Noteremo fin d'ora che è proprio da questa possibilità di variazione su  $\Gamma_{2n-1}$  del ciclo d'integrazione  $W_n$ , che dipende il teorema d'Hartogs.

*Osservazione.* — Si consideri su  $\Gamma_{2n-1}$  il ciclo d'integrazione  $W_n(O)$  ottenuto, in corrispondenza al punto  $O$ , con la costruzione del n. 3. Esso, a norma di a), è adatto, oltre che per  $O$ , anche per tutti i punti  $O'$  di un intorno abbastanza ristretto di  $O$ . In relazione con la proprietà b), può chiedersi se accada più precisamente che, per ogni punto  $O'$  di un siffatto intorno,  $W_n(O)$  sia un ciclo deducibile mediante una deformazione omologica in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O')$  dal ciclo  $W_n(O')$  che si otterrebbe in relazione ad  $O'$  con la costruzione del n. 3. Così è di fatto, come ci si convince p. es. col ragionamento seguente. Una volta fissato l' $n$ -toro circolare  $\tau_n$ , che dà luogo a  $W_n(O)$  (n. 3), si assuma come intorno del punto  $O$  un  $n$ -cilindro prodotto di  $n$  cerchi concentrici alle  $n$  circonferenze delle quali è prodotto  $\tau_n$ , e con raggi inferiori ai raggi di queste. L' $n$ -toro  $\tau_n$  non ha allora alcun punto comune con  $T_{2n-2}(O')$ , essendo  $O'$  un punto qualunque dell'intorno; onde  $\tau_n$  si presta per costruire, nel modo indicato al n. 3 (e Oss.) non soltanto il ciclo  $W_n(O)$ , ma anche cicli  $W_n^*(O')$  adatti ai punti  $O'$ . Per ogni  $O'$ , il ciclo  $W_n(O')$  è omologo in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O')$  al ciclo  $W_n(O)$ , che ottiene da un  $n$ -toro circolare con centro in  $O'$ . D'altronde, mentre un punto  $\bar{O}$  varia nell'intorno fissato di  $O$ , passando dalla posizione  $O$  ad una determinata posizione  $O'$ , il ciclo  $W_n^*(\bar{O})$  varia passando dalla posizione  $W_n(O)$  alla  $W_n^*(O')$  senza mai incontrare  $T_{2n-2}(O')$ ; per cui risulta

$$W_n(O) \sim W_n^*(O') \sim W_n(O') \quad \text{in} \quad \Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O').$$

*Dimostrazione del teorema d'Hartogs*

5. Siano soddisfatte le ipotesi del teorema d'Hartogs (n. 1).

Si consideri la funzione  $g(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ , definita in ogni punto  $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  interno al dominio  $D_{2n}$  dalla

$$g(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{W_n(O)} \frac{f(z_1, \dots, z_n) d(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)}, \quad (2)$$

dove il secondo membro abbia la forma stessa del secondo membro della formula di Cauchy, quale potrebbe scriversi per la funzione  $f(z_1, \dots, z_n)$

ove già si sapesse ch'essa è regolare in tutto  $D_{2n}$ . Si supponrà così, nella (2), che  $W_n(O)$  sia un ciclo, dipendente dalla posizione del punto  $O$ , tracciato sul contorno irriducibile  $\Gamma_{2n-1}$  di  $D_{2n}$  e ottenuto con la costruzione del n. 3; ovvero sia un ciclo a quello omologo in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$  (n. 4, b). Il ciclo  $W_n(O)$  soddisfa in tal modo alle condizioni topologiche I, II, III ( $N = 1$ ) del n. 2, in relazione al dominio  $D_{2n}$ .

La funzione  $g(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  resta univocamente definita dalla (2) nell'interno di  $D_{2n}$ , nonostante l'arbitrarietà indicata per  $W_n(O)$ , perché, con una deformazione omologica qualunque in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$ , non s'altera il secondo membro della (2), come segue dal teorema di Cauchy-Poincaré tenuto conto che in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$  non cadono singolarità della funzione integranda.

Anzi, la  $g(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  risulta analitica regolare nelle variabili  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ . Difatti, per tutti i punti  $O'$  appartenenti ad un intorno abbastanza ristretto di un determinato punto  $O$  interno a  $D_{2n}$ , può assumersi nella (2) come ciclo d'integrazione  $W_n(O')$  un medesimo ciclo scelto tra i cicli  $W_n(O)$  adatti per il punto  $O$  (n. 4a, e Oss.); e quindi  $g(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  risulta analitica regolare di  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  in quell'intorno, siccome è tale in (2) la funzione integranda, per qualunque posizione del punto  $(z_1, \dots, z_n)$  sopra il fissato  $W_n(O)$ .

Ciò premesso, si sa che<sup>10)</sup>, essendo  $f(z_1, \dots, z_n)$  per ipotesi analitica regolare ed univoca sopra  $\Gamma_{2n-1}$ , essa risulta in conseguenza univocamente definita e regolare in tutto uno strato  $2n$ -dimensionale  $\Sigma_{2n}$  comprendente  $\Gamma_{2n-1}$  all'interno, ed in particolare in uno strato  $\Sigma'_{2n}$  compreso tra  $\Gamma_{2n-1}$  e una ipersuperficie  $\Gamma'_{2n-1}$  interna e prossima a  $\Gamma_{2n-1}$ . È  $\Sigma'_{2n} \subset D_{2n}$ .

La  $f(z_1, \dots, z_n)$  può allora esprimersi, in ogni punto  $O$  interno a  $\Sigma'_{2n}$ , mediante la formula di Cauchy generale (con  $N = 1$ , se si vuole), il ciclo d'integrazione relativo essendo tracciato sul contorno  $\Gamma_{2n-1} - \Gamma'_{2n-1}$  di  $\Sigma'_{2n}$ . Il secondo membro di tal formula non differisce dal secondo membro della (2) che al più per il ciclo d'integrazione. Quando di fatto accade che nelle due formule, in corrispondenza ad uno stesso punto  $O$  dello strato  $\Sigma'_{2n}$ , può assumersi il medesimo ciclo d'integrazione, ne segue che i valori della  $f$  e della  $g$  in  $O$  coincidono. Tale possibilità si verifica se il ciclo  $W_n(O)$  che appare nella (2) e soddisfa alle condizioni topologiche I, II, III ( $N = 1$ ) in relazione al dominio  $D_{2n}$ , soddisfa altresì alle condizioni stesse in relazione allo strato  $\Sigma'_{2n}$  (ovvero è omologo in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$  ad un ciclo che vi soddisfa).

Basta anzi stabilire la possibilità indicata per i punti  $O$  di un intorno  $2n$ -dimensionale contenuto in  $\Sigma'_{2n}$ , per concluderne che, coincidendo la  $f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  con la  $g(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  in quell'intorno, le due funzioni coinci-

<sup>10)</sup> Cfr. p. es. il n. 4 della mia nota cit. da principio.

dono — in base al principio d'identità — nell'intero strato  $\Sigma'_{2n}$ , ed inoltre la  $f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  si prolunga analiticamente nella  $g(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  in tutto  $D_{2n}$ : ciò che prova il teorema d'Hartogs.

6. Allo scopo, si consideri un punto  $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  interno a  $\Sigma'_{2n}$ , tale che uno almeno degli  $S_{2n-2}$  caratteristici per esso che compongono  $T_{2n-2}(O)$ , p. es. quello di equazione  $z_1 = \zeta_1$ , non incontri  $\Gamma'_{2n-1}$ .

Ci si convince dell'esistenza di qualche punto  $O$  siffatto, per esempio nel modo seguente. Consideriamo l'iperpiano  $x_1 = \lambda$  di  $S_{2n}$ , che si sposta parallelamente a se stesso al variare del parametro reale  $\lambda$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Poichè  $D_{2n}$  è limitato e serrato, esiste un primo valore  $\lambda'$  di  $\lambda$ , in corrispondenza al quale l'iperpiano incontra  $D_{2n}$ . Tale iperpiano,  $x_1 = \lambda'$ , ha in comune con  $D_{2n}$  soltanto punti del contorno  $\Gamma_{2n-1}$ , onde non può incontrare  $\Gamma'_{2n-1}$  che è costituito da punti interni a  $D_{2n}$ . Per  $\varepsilon$  positivo abbastanza piccolo, anche l'iperpiano  $x_1 = \lambda' + \varepsilon$  non incontra  $\Gamma'_{2n-1}$ , pur avendo in comune con  $D_{2n}$  punti interni, appartenenti allo strato  $\Sigma'_{2n}$ . Se  $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  ( $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ ,  $\xi_1 = \lambda' + \varepsilon$ ) è uno di questi punti, esso soddisfa alla condizione desiderata, poichè lo  $S_{2n-2}$   $z_1 = \zeta_1$  è contenuto nell'iperpiano  $x_1 = \lambda' + \varepsilon$ .

Ebbene, dico che il ciclo  $W_n(O)$ , tracciato su  $\Gamma_{2n-1}$ , che appare nella (2) in corrispondenza al punto  $O$ , è omologo in  $\Gamma_{2n-1} - T_{2n-2}(O)$  ad un ciclo soddisfacente alle condizioni topologiche I, II, III ( $N = 1$ ) del n. 2 in relazione allo strato  $\Sigma'_{2n}$ . Invero, possono rendersi così piccoli i rapporti  $\frac{r_1}{r_2}, \dots, \frac{r_1}{r_n}$  dei raggi dell' $n$ -toro  $\tau_n$ , mediante il quale si costruisce  $W_n(O)$ , in guisa che la varietà conica  $C_{n+1}$  proiettante  $\tau_n$  da  $O$  (n. 3), non abbia punti comuni con  $\Gamma'_{2n-1}$  (giacchè, quando quei rapporti tendono a zero,  $C_{n+1}$  tende a schiacciarsi sopra lo  $S_{2n-2}$   $z_1 = \zeta_1$ ). In tali condizioni risulta allora:

$$W_n(O) = (C_{n+1}, \Gamma_{2n-1}) = (C_{n+1}, \Gamma_{2n-1} - \Gamma'_{2n-1}),$$

e quindi il ciclo  $W_n(O)$  coincide col ciclo stesso che si costruirebbe (nel modo indicato al n. 3) in relazione al punto  $O$  e allo strato  $\Sigma'_{2n}$ , sul contorno  $\Gamma_{2n-1} - \Gamma'_{2n-1}$  dello strato.

Si è dunque provato così, come volevasi (n. 5), che l'identica formula può servire per esprimere il valore delle funzioni  $f$  e  $g$  nel punto  $O$ ; e la conclusione stessa sussiste per tutti i punti di un intorno  $2n$ -dimensionale di  $O$  abbastanza ristretto, poichè essi soddisfanno alla condizione medesima, dichiarata al principio di questo n., cui soddisfa il punto  $O$ .

(Reçu le 2 mai 1944.)