

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 17 (1944-1945)

**Artikel:** Kristallographische Bestimmung der Charaktere der geschlossenen Lie'schen Gruppen.  
**Autor:** Stiefel, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16335>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Kristallographische Bestimmung der Charaktere der geschlossenen Lie'schen Gruppen

Von E. STIEFEL, Zürich

*Herrn H. Hopf zum 19. November 1944 in Dankbarkeit gewidmet.*

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> wurde gezeigt, daß die Struktur und Verwandtschaft der geschlossenen Lie'schen Gruppen kristallographischen Gesetzen unterliegt. Um dies noch genauer zu formulieren, nennen wir im folgenden eine diskontinuierliche Bewegungsgruppe  $\Gamma$  eines  $l$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $R^l$ , welche durch Spiegelungen an  $(l - 1)$ -dimensionalen Ebenen erzeugt wird (und  $l$  linear unabhängige Translationen enthält) kurz eine **kaleidoskopische**<sup>2)</sup> Gruppe.

Zwischen den geschlossenen halbeinfachen und einfach zusammenhängenden Lie'schen Gruppen  $G$  einerseits und den kaleidoskopischen Gruppen andererseits besteht alsdann ein-eindeutige Zuordnung; speziell bestimmt also jede kaleidoskopische Gruppe  $\Gamma$  eine bis auf Isomorphie eindeutig festgelegte Lie'sche Gruppe  $G$ . Die Gruppe  $\Gamma$  kann durch ihre Spiegelebenen gegeben werden; es sind dies  $m$  Scharen von parallelen äquidistanten Ebenen, welche das **Diagramm** der Lie'schen Gruppe  $G$  bilden.

Da das Diagramm also die Struktur von  $G$  bestimmt, müssen sich alle algebraischen und geometrischen Eigenschaften von  $G$  aus ihm ablesen lassen. Die nachfolgende Untersuchung behandelt eine spezielle Frage dieser Art; es werden die Charaktere der irreduziblen Darstellungen der Lie'schen Gruppe  $G$  aus ihrem Diagramm errechnet. Dabei ist zu betonen, daß wir außer des Diagramms keinerlei Eigenschaften von  $G$  verwenden; wir werden vielmehr die kaleidoskopische Gruppe vorgeben und dann aus der Darstellungstheorie Eigenschaften der zugehörigen Lie'schen Gruppe herleiten. In einigen Fällen gelingt es sogar, auf diese Weise die Lie'sche Gruppe aus ihrem Diagramm zu konstruieren und die Eindeutigkeit dieser Konstruktion nachzuweisen, was in der früheren

---

<sup>1)</sup> „Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lie'schen Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lie'schen Gruppen.“ Comm. Math. Helv. 14, S. 350—380.

<sup>2)</sup> Wir entlehnen diesen Namen dem bekannten Spielzeug, welches mit Hilfe von zueinander geneigten Spiegeln solche Gruppen im dreidimensionalen Raum praktisch herstellt.

Arbeit nur mit tiefliegenden Hilfsmitteln der Lie'schen Theorie möglich war (vgl. § 2, Beispiel 1). Dieser Standpunkt ist besonders ratsam bei den Lie'schen **Ausnahmegruppen**, die auf diese Weise einigermaßen handlich bearbeitet werden können. Die systematische Darstellungstheorie der Ausnahmegruppen soll später entwickelt werden; in der vorliegenden Arbeit wird nur die einfachste von ihnen als Beispiel für das Grundsätzliche behandelt.

In § 1 wird die allgemeine Theorie auseinandergesetzt; sie schließt sich an die Methode von H. Weyl an<sup>3)</sup>, ist aber gegenüber dieser insofern elementar, als keinerlei Kenntnisse aus der Lie'schen Theorie benötigt werden. Der Inhalt dieses § 1 sollte ohne Kenntnis der früheren Arbeit verständlich sein; es sei noch darauf hingewiesen, daß sich die in Nr. 1 repetierten Tatsachen für eine konkret vorgelegte Gruppe der vier *Cartan'schen* Klassen mühelos direkt verifizieren lassen. In Nr. 5 ist das Schlußresultat formuliert<sup>4)</sup>. Der § 2 enthält zwei typische Beispiele, in § 3 endlich wird einiges nachgetragen, was zum Verständnis des allgemeinen Gedankenganges nicht notwendig ist.

Es sei noch bemerkt, daß die Beschränkung auf einfach zusammenhängende Gruppen unwesentlich und sogar eher ein Vorteil ist. Ist nämlich  $G$  mehrfach zusammenhängend, so liefert uns die Darstellungstheorie der universellen Überlagerungsgruppe von  $G$  einmal alle eindeutigen Darstellungen von  $G$ , außerdem aber die mehrdeutigen, die sogenannten *Spin-Darstellungen*.

## § 1. Die allgemeine Methode

1. Die zu einer *geschlossenen halbeinfachen* und *einfach zusammenhängenden* Lie'schen Gruppe  $G$  gehörige kaleidoskopische Gruppe  $\Gamma$  wird auf folgende Weise erhalten<sup>5)</sup>: Man wähle in  $G$  eine abgeschlossene und zusammenhängende Abel'sche Untergruppe  $T$  von möglichst hoher Dimension  $l$ . Man beweist<sup>6)</sup>, daß  $T$  direktes Produkt aus  $l$  Kreisdrehungsgruppen ist und nennt daher  $T$  ein **maximales Toroid** in  $G$ . Es gilt nun das wichtige **Hauptachsentheorem** (von *E. Cartan*). *Das maximale Toroid*

---

<sup>3)</sup> *H. Weyl*: Theorie der Darstellungen kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, Kapitel IV, § 3. (Math. Zeitschrift 24, S. 377—396).

<sup>4)</sup> Vgl. auch *H. Weyl*, The classical groups (Princeton 1939).

<sup>5)</sup> Beweise in der unter <sup>1)</sup> zitierten Arbeit (speziell § 2, Nr. 9 und für einfach zusammenhängende Gruppen § 4).

<sup>6)</sup> Vgl. *L. Pontrjagin*, Topological groups (Princeton 1939).

enthält zu jedem Element von  $G$  mindestens ein konjugiertes<sup>7)</sup>. Bei den inneren Automorphismen von  $G$  durchläuft also  $T$  die ganze Gruppe  $G$ .

Wir betrachten nun speziell die inneren Automorphismen von  $G$ , welche das Toroid  $T$  in sich überführen; sie ergeben eine endliche Gruppe  $\Phi$  von Abbildungen von  $T$  auf sich, welche das Einselement  $e$  von  $G$  (das ja auf  $T$  liegt) fest lassen.

Eine Umgebung von  $e$  in  $T$  können wir auf Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_l$  beziehen. Dabei seien die Koordinaten von  $e$  alle Null. Man kann nun dieses Koordinatensystem so wählen, daß gilt:

- a) die Gruppenmultiplikation in  $T$  bedeutet Addition entsprechender Koordinaten.
- b) die Operationen von  $\Phi$  sind orthogonale Transformationen in den Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_l$ .

Geometrisch kann man dies folgendermaßen ausdrücken:

Wir bezeichnen den  $l$ -dimensionalen euklidischen Raum der Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_l$  mit  $R^l$ . Er ist der universelle Überlagerungsraum oder die „Abwicklung“ des Toroids  $T$ . Dann gilt:

- a') die Gruppenmultiplikation in  $T$  wird zur Vektoraddition im  $R^l$ .
- b') Aus der Transformationsgruppe  $\Phi$  des Toroids  $T$  wird eine endliche Gruppe  $\Psi$  von Drehungen und Drehspiegelungen des  $R^l$ , welche den Nullpunkt fest läßt.

Ferner bilden die Punkte des  $R^l$ , welche  $e$  überlagern, ein Punktgitter  $\gamma$  in  $R^l$ , welches wir das **Einheitsgitter** nennen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Definition der zu  $G$  gehörigen kaleidoskopischen Gruppe  $\Gamma$  geben.  $\Gamma$  ist die durch  $\Psi$  und die Translationen von  $\gamma$  erzeugte Transformationsgruppe des  $R^l$ . Es wurde in der früheren Arbeit gezeigt:

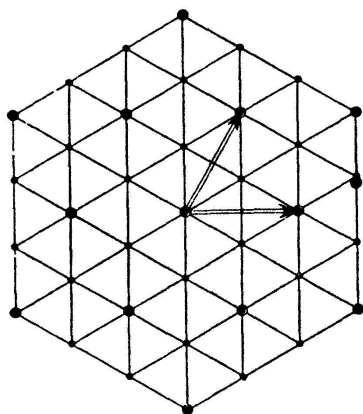
- c) Die Spiegelebenen von  $\Gamma$  bilden  $m$  Scharen von parallelen und äquidistanten Ebenen und  $\Gamma$  wird von diesen Spiegelungen erzeugt. Die Dimension von  $G$  beträgt  $n = l + 2m$ .
- d) Jede Ebenenschar enthält eine Ebene durch den Nullpunkt und die Spiegelungen an diesen  $m$  Ebenen durch den Nullpunkt erzeugen  $\Psi$ . Unter den  $m$  Ebenen gibt es  $l$  linear unabhängige.
- e) Das Einheitsgitter  $\gamma$  entsteht, indem man  $\Gamma$  auf den Nullpunkt ausübt.

---

<sup>7)</sup> Für die volle unitäre Gruppe ist dies in der Tat das elementare Hauptachsentheorem.

f) Das Zentrum von  $G$  ist eine diskrete Teilmenge von  $T$ ; es entspricht ihm im Überlagerungsraum  $R^l$  ein Punktgitter  $g_Z$ , welches eine Verfeinerung von  $\gamma$  ist. Außerdem besteht  $g_Z$  genau aus den Punkten, durch die jede der  $m$  Scharen eine Ebene schickt.

Zur Illustration sei hier noch einmal das Diagramm der Gruppe von allen unitären dreireihigen Matrizen der Determinante  $+1$  hergesetzt.



• Punkt von  $g_Z$

• Punkt von  $\gamma$

→ primitiver Vektor von  $\gamma$

Fig. 1

Bisweilen ist es angezeigt, an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_l$  schiefwinklige  $y_1, y_2, \dots, y_l$  zu verwenden und zwar als Grundvektoren  $l$  primitive Translationen des Gitters  $\gamma$  zu nehmen. Die Eigenschaft b) wird dann ungültig und ist zu ersetzen durch

b'') Die Operationen von  $\Psi$  sind ganzzahlige lineare Transformationen in den Koordinaten  $y_1, y_2, \dots, y_l$ .

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß wegen e) die Gruppe  $\Gamma$  und daher auch ihre Untergruppe  $\Psi$  das Gitter  $\gamma$  invariant läßt.

Jede Schar von Spiegelebenen des Diagramms kann im Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$\vartheta_j(x_1, x_2, \dots, x_l) = c, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

gegeben werden; dabei durchläuft für ein festes  $j$  das absolute Glied  $c$  alle ganze Zahlen. Umgekehrt sind die Linearformen  $\vartheta_j$  durch das Diagramm eindeutig bis auf das Vorzeichen bestimmt, sobald ein Koordinatensystem gewählt ist. Speziell haben im Koordinatensystem  $y_1, y_2, \dots, y_l$  alle Linearformen  $\vartheta_j$  ganzzahlige Koeffizienten. Dies erkennt man am schnellsten so: wegen f) geht durch den Endpunkt  $(1, 0, \dots, 0)$  des ersten Grundvektors eine Ebene aus jeder Schar, dieser Punkt muß also für jedes  $j$  die Gleichung (1) erfüllen, somit

$$\vartheta_j(1, 0, \dots, 0) = c$$

sein. Der erste Koeffizient von  $\vartheta_j$  ist also ganz und dasselbe beweist man analog von den übrigen Koeffizienten.

2. Nun sei eine stetige Darstellung  $D$  der Lie'schen Gruppe  $G$  vorgelegt. Ihren Charakter bezeichnen wir mit  $\chi$ . Es ist dies eine Funktion in der Gruppe  $G$ , deren Wert für ein bestimmtes Element  $x$  von  $G$  gleich der

Spur der Matrix  $A(x)$  ist, welche  $x$  darstellt.  $\chi(x)$  ist eine *Klassenfunktion*, das heißt hat denselben Wert für zwei konjugierte Elemente von  $G$ . Dies folgt ja sofort aus

$$\begin{aligned}\chi(s^{-1}xs) &= \text{Spur}[A(s^{-1}xs)] = \text{Spur}[A(s)^{-1}A(x)A(s)] \\ &= \text{Spur}[A(x)] = \chi(x).\end{aligned}$$

Wegen des Hauptachsentheorems von Nr. 1 genügt es daher vollständig, die Werte von  $\chi(x)$  für die Elemente  $x$  des Toroids  $T$  zu kennen; mit anderen Worten:  $\chi$  ist eine Funktion  $\chi(x_1, x_2, \dots, x_l)$  auf  $T$  oder im  $R^l$ . Diese Funktion hat nun folgende wesentliche Eigenschaft:

**Satz 1.**  $\chi(x_1, x_2, \dots, x_l)$  ist automorph gegenüber der Bewegungsgruppe  $\Gamma$ , bleibt also ungeändert, wenn die Koordinaten einer Substitution von  $\Gamma$  unterworfen werden.

Zum Beweis ist zweierlei zu zeigen:

a)  $\chi(x_j)$  ist automorph gegenüber den Translationen des Gitters  $\gamma$ . Dies folgt einfach daraus, daß zwei in bezug auf  $\gamma$  äquivalente Punkte dasselbe Element des Toroids  $T$  überlagern.

b)  $\chi(x_j)$  ist automorph gegenüber  $\Psi$ . Dies bedeutet, daß  $\chi$  als Funktion auf dem Toroid automorph gegenüber den Operationen der Abbildungsgruppe  $\Phi$  ist. Um das zu verifizieren, müssen wir uns nur daran erinnern, daß eine Abbildung von  $\Phi$  durch einen inneren Automorphismus von  $G$  bewirkt wird, also jedes Element von  $T$  in ein konjugiertes überführt. Für konjugierte Elemente hat aber der Charakter denselben Wert.

Im folgenden verwenden wir nun auch das in Nr. 1 eingeführte Koordinatensystem  $y_1, y_2, \dots, y_l$  und fassen dementsprechend  $\chi$  als Funktion der  $y_j$  auf. Die eben unter a) angeführte Eigenschaft besagt dann, daß  $\chi(y_j)$  in allen Variablen die Periode 1 hat. Es ist daher naheliegend  $\chi(y_j)$  in eine Fourierreihe zu entwickeln, das heißt als Linearkombination von Ausdrücken

$$e^{2\pi i(q_1 y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_l y_l)} \quad (2)$$

darzustellen. Dabei sind die  $q_j$  ganze Zahlen. Um eine brauchbare Terminologie zu haben, nennen wir (2) einen **Elementarausdruck** und führen dem Setzer zuliebe eine Funktion  $e(\varphi)$  ein durch

$$e(\varphi) = e^{2\pi i\varphi} \quad (3)$$

Unser Elementarausdruck  $e(q_1 y_1 + \dots + q_l y_l)$  lautet in den  $x$ -Koordinaten  $e(p_1 x_1 + \dots + p_l x_l)$ , wobei die  $p_j$  nicht notwendig ganz zu sein

brauchen. Den Vektor  $p$  mit den  $x$ -Koordinaten  $p_1, p_2, \dots, p_l$  nennen wir den *Vektor des Elementarausdrucks*<sup>8)</sup>. Die Multiplikation zweier Elementarausdrücke geschieht durch Addition ihrer Vektoren.

Es zeigt sich nun, daß  $\chi$  keine unendliche Fourierreihe, sondern ein endliches trigonometrisches Polynom ist. Genauer:

**Satz 2.**  *$\chi$  ist eine Linearkombination von endlich vielen Elementarausdrücken mit positiven ganzen Koeffizienten.*

Beweis: Es sei  $t$  speziell ein Element des Toroids  $T$ . Da  $T$  eine geschlossene Gruppe ist, können wir nach einem Satz von *H. Weyl* annehmen, daß die Darstellungsmatrix  $A(t)$  unitär sei. Außerdem ist  $T$  Abel'sche Gruppe und daher sind die Matrizen  $A(t)$  alle miteinander vertauschbar, können also durch Abänderung des Koordinatensystems im Darstellungsraum simultan auf Diagonalgestalt gebracht werden. Indem wir annehmen, dies sei geschehen, haben wir also

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(y_j) & & & & \\ & a_2(y_j) & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & a_\nu(y_j) \end{pmatrix},$$

dabei sind die  $y_j$  die Koordinaten von  $t$  und  $\nu$  ist der Grad der Darstellung, das heißt die Dimension des Darstellungsraumes. Aus der Darstellungsbedingung

$$A(tt') = A(t)A(t')$$

folgt

$$a_k(y_j + y'_j) = a_k(y_j) a_k(y'_j). \quad (4)$$

(Wir erinnern daran, daß die Gruppenmultiplikation in  $T$  einfach die Koordinatenaddition bedeutet.) Setzen wir für einen Augenblick in einer Variablen  $y$

$$f_{k\mu}(y) = a_k(0, 0, \dots, 0, y, 0, 0, \dots, 0), \quad \mu = 1, 2, \dots, l, \quad (5)$$

wobei das  $y$  rechts an der  $\mu$ -ten Stelle steht, so folgt aus (4)

$$f_{k\mu}(y + y') = f_{k\mu}(y) f_{k\mu}(y').$$

Wegen der Stetigkeit der Darstellung  $D$  hat diese Funktionalgleichung nur die Lösung

---

<sup>8)</sup> Im  $y$ -Koordinatensystem hat er die *kovarianten* Komponenten  $q_j$  (= skalare Produkte mit den Grundvektoren).

$$f_{k\mu}(y) = c_\mu e(q_\mu y), \quad (6)$$

$c_\mu$  ist 0 oder 1,  $q_\mu$  komplex. Da ferner bei der Darstellung das Einselement mit den Koordinaten  $0, 0, \dots, 0$  in die Einheitsmatrix übergehen muß, gilt

$$a_k(0, 0, \dots, 0) = f_{k\mu}(0) = 1,$$

also

$$c_\mu = 1, \quad f_{k\mu}(y) = e(q_\mu y). \quad (7)$$

Aus (4) und der Definition (5) folgt weiter

$$a_k(y_j) = f_{k1}(y_1) f_{k2}(y_2) \dots f_{kl}(y_l),$$

also

$$a_k(y_j) = e(q_1 y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_l y_l). \quad (8)$$

Nun sind aber auch die  $a_k$  automorph gegenüber den Translationen des Einheitsgitters  $\gamma$ , müssen also in allen Variablen die Periode 1 haben. Daraus folgt, daß die  $q_j$  ganze reelle Zahlen sind.  $a_k(y_j)$  ist also ein Elementarausdruck. Der Charakter  $\chi$  ist die Spur von  $A(t)$  und daher eine Summe von Elementarausdrücken (von denen einige übereinstimmen können). Damit ist Satz 2 bewiesen.

Jetzt benutzen wir noch die Tatsache, daß  $\chi$  gemäß Satz 1 auch automorph ist gegenüber der Gruppe  $\Psi$ . Es sei

$$x_j = \sum_{k=1}^l a_{jk} x'_k, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (9)$$

eine Transformation von  $\Psi$ . Nach Nr. 1, b bilden die  $a_{jk}$  eine orthogonale Matrix. Setzen wir daher

$$p'_j = \sum_{k=1}^l a_{jk} p_k, \quad (10)$$

so folgt

$$p_1 x'_1 + p_2 x'_2 + \dots + p_l x'_l = p'_1 x_1 + p'_2 x_2 + \dots + p'_l x_l. \quad (11)$$

Sobald also der Elementarausdruck  $e(p_1 x_1 + \dots + p_l x_l)$  in  $\chi$  enthalten ist, muß auch der Elementarausdruck  $e(p'_1 x_1 + \dots + p'_l x_l)$  mit demselben Koeffizienten in  $\chi$  auftreten. Oder geometrisch ausgedrückt: Ist  $p$  der Vektor eines in  $\chi$  enthaltenen Elementarausdrucks, so enthält  $\chi$  auch alle Elementarausdrücke, deren Vektoren durch Ausüben von  $\Psi$  auf  $p$  entstehen. Wir nennen nun

$$\sum_{(p)} e(p_1 x_1 + \dots + p_l x_l)$$

eine automorphe Elementarsumme. Dabei ist die Summation über alle Vektoren  $p$  zu erstrecken, welche aus einem gegebenen Vektor  $p_0$  durch Ausüben der Gruppe  $\Psi$  entstehen. Ist  $N$  die Ordnung von  $\Psi$  und  $N_0$  die Ordnung der Untergruppe, welche  $p_0$  fest läßt, so enthält die Summe genau  $N/N_0$  Elementarausdrücke. Wir haben damit gefunden:

**Satz 3.** *Der Charakter  $\chi$  ist eine Linearkombination von automorphen Elementarsummen mit ganzen positiven Koeffizienten.*

### 3. Alternierende Elementarsummen

Es sei  $e(q_1 y_1 + \dots + q_l y_l) = e(p_1 x_1 + \dots + p_l x_l)$  mit ganzen  $q_j$  wieder ein Elementarausdruck. Es sei ferner  $f(x_j)$  eine Linearkombination von Elementarausdrücken mit ganzen (positiven oder negativen) Koeffizienten. Wir nennen  $f(x_j)$  ein **alternierendes Polynom**, wenn jede uneigentliche<sup>9)</sup> Transformation von  $\Psi$  Vorzeichenänderung von  $f(x_j)$  bewirkt, jedoch jede eigentliche Bewegung von  $\Psi$  die Funktion invariant läßt. Wie oben beweist man leicht, daß wenn in  $f(x_j)$  das Glied  $\lambda e(p_1 x_1 + \dots + p_l x_l)$  als Summand auftritt, dann auch das nach (10) berechnete Glied  $\pm \lambda e(p'_1 x_1 + \dots + p'_l x_l)$  auftreten muß, wobei das Vorzeichen mit dem Vorzeichen der Determinante der Transformation (9) übereinstimmt.

Im folgenden setzen wir nun durchwegs voraus, daß unser alternierendes Polynom

$$f(x_j) = \sum_{(k)} \lambda_k e(p_{k1} x_1 + \dots + p_{kl} x_l)$$

in fertig ausgerechneter Form gegeben sei, das heißt keiner der Koeffizienten  $\lambda_k$  soll Null sein und es sollen niemals zwei Exponentenreihen  $p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kl}$  übereinstimmen. Wir verbieten speziell auch, daß das Polynom identisch verschwindet. Unter dieser Voraussetzung kann man zeigen:

**Satz 4.** *Es sei  $p$  der Vektor eines in dem alternierenden Polynom enthaltenen Elementarausdrucks. Wird dann die Gruppe  $\Psi$  auf  $p$  ausgeübt, so bleibt  $p$  nur bei der Identität fest.*

Beweis indirekt. Nach Nr. 1,d wird  $\Psi$  erzeugt durch die Spiegelungen an den Diagrammebenen, welche durch den Nullpunkt laufen. Diese Ebenen teilen daher den Raum  $R^l$  in Fundamentalbereiche von  $\Psi$  ein<sup>10)</sup>. Gibt es nun in  $\Psi$  eine von der Identität verschiedene Transformation,

<sup>9)</sup> d. h. Transformation von der Determinante  $-1$ .

<sup>10)</sup> In der früheren Arbeit ausführlich bewiesen (§ 2, Nr. 10, Satz 11).

welche  $p$  fest läßt, so kann  $p$  (vom Nullpunkt aus gezeichnet) nicht ins Innere eines Fundamentalbereiches zeigen, muß also in einer Spiegelebene liegen. Die Spiegelung an dieser Ebene läßt  $p$  fest und daher müßte nach obiger Betrachtung das alternierende Polynom mit dem Glied  $\lambda e(p_1 x_1 + \dots + p_i x_i)$  auch das Glied  $(-\lambda) e(p_1 x_1 + \dots + p_i x_i)$  enthalten, was wir verboten haben.

In Zukunft nennen wir einen Vektor  $p$ , der nur bei der Identität von  $\Psi$  fest bleibt, also ins Innere eines Fundamentalbereichs von  $\Psi$  zeigt, einen *regulären Vektor*.

Wie in Nr. 2 bilden wir nun unter Zugrundelegung eines regulären Vektors  $p_0$  die *alternierende Elementarsumme*

$$S(x_j) = \sum_{(p)} \pm e(p_1 x_1 + \dots + p_i x_i),$$

wobei die Summation über die  $N$  Vektoren  $p$  zu erstrecken ist, welche aus  $p_0$  durch  $\Psi$  hervorgehen. ( $N =$  Ordnung von  $\Psi$ .) Dabei gilt das obere oder untere Vorzeichen je nachdem, ob der betreffende Vektor  $p$  durch eine eigentliche oder uneigentliche Transformation von  $\Psi$  aus  $p_0$  hervorgegangen ist\*). Eine alternierende Elementarsumme enthält also im Gegensatz zur automorphen Elementarsumme immer genau  $N$  Glieder. Sie verschwindet in jedem Punkt einer Spiegelebene von  $\Psi$  (Diagrammebene). Daraus folgt dann: Ist  $\mu$  die Anzahl der Spiegelebenen, welche durch einen gegebenen Punkt von  $R^l$  gehen, so beginnt die Taylorentwicklung unserer Elementarsumme in diesem Punkt mit einer Form in  $x_1, x_2, \dots, x_l$ , die mindestens vom Grad  $\mu$  ist.

Analog zu Satz 3 haben wir nun unter Berücksichtigung von Satz 4:

**Satz 5.** *Ein alternierendes Polynom ist Linearkombination von alternierenden Elementarsummen mit ganzen (positiven oder negativen) Koeffizienten.*

*Orthogonalität.* Wir verwenden jetzt wieder das Koordinatensystem  $y_1, y_2, \dots, y_l$ , dessen Grundvektoren primitive Vektoren des Einheitsgitters  $\gamma$  sind. Ist  $P$  das von diesen Vektoren aufgespannte Parallelepipiped und sind  $e(q_1 y_1 + \dots + q_l y_l)$  beziehungsweise  $e(q'_1 y_1 + \dots + q'_l y_l)$  zwei Elementarausdrücke, so gilt offenbar

$$\int_{(P)} e(q_1 y_1 + \dots + q_l y_l) \overline{e(q'_1 y_1 + \dots + q'_l y_l)} dy_1 \dots dy_l \\ = \int_0^1 e[(q_1 - q'_1) y_1] dy_1 \dots \int_0^1 e[(q_l - q'_l) y_l] dy_l = 0 \quad \text{oder} \quad 1,$$

---

\*) Wegen (11) kann man statt dessen auch  $p_1, \dots, p_l$  fest halten und über alle Bilder des Punktes  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$  vermöge der Gruppe  $\Psi$  summieren.

wobei der Wert 1 nur für  $q_1 = q'_1, \dots, q_l = q'_l$  auftritt. Daraus folgt leicht die für zwei alternierende Elementarsummen gültige Integralformel

$$\int_{(P)} S(y_j) \overline{S'(y_j)} dy_1 \dots dy_l = \begin{cases} 0 & \text{für } S(y_j) \neq \pm S'(y_j) \\ \pm N & \text{für } S(y_j) = \pm S'(y_j) \end{cases}. \quad (12)$$

(Man beachte, daß zwei alternierende Elementarsummen, die in einem Elementarausdruck übereinstimmen, identisch sind.) Mit anderen Worten

**Satz 6.** *Die alternierenden Elementarsummen bilden ein orthogonales Funktionssystem im Fundamentalparallelepiped  $P$ .*

Präzisierend muß hinzugesetzt werden, daß man natürlich von zwei Elementarsummen, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, nur eine in das System aufzunehmen hat.

4. In der geschlossenen Lie'schen Gruppe  $G$  kann eine invariante Volumenmessung definiert werden. Dabei ist unter dem Ausdruck „invariant“ folgendes zu verstehen:

Das Gruppenelement  $x$  durchlaufe eine meßbare Teilmenge  $M$  von  $G$  und  $s$  sei ein festes Gruppenelement. Dann haben die von  $sx$  und  $x$  durchlaufenen Mengen dasselbe Volumen wie  $M$ .

Ist  $f(x)$  eine in ganz  $G$  definierte stetige Funktion, so läßt sich das Integral

$$J = \int_{(G)} f(x) dv_x$$

bilden, wobei  $dv_x$  das invariant gemessene Volumenelement an der Stelle  $x$  bedeutet. Wir benötigen aber hier nur das Integral einer Klassenfunktion, also einer Funktion, welche in einer Klasse konjugierter Elemente von  $G$  konstant ist. Nach dem Hauptachsentheorem von Nr. 1 ist diese Funktion bereits durch ihre Werte auf dem maximalen Toroid  $T$  gegeben. Man wird daher erwarten dürfen, daß man zur Berechnung von  $J$  nur ein Integral über  $T$  auszuwerten hat. Die nähere Analyse in § 3 bestätigt diese Vermutung und zwar ergibt sich

$$J = \int_{(G)} f(x) dv_x = \int_{(P)} f(y_j) \varrho(y_j) dy_1 \dots dy_l; \quad (13)$$

$P$  ist wieder das Parallelepiped der primitiven Vektoren von  $\gamma$ ; in der Tat muß ja der Punkt im  $R^l$  dieses Parallelepiped durchlaufen, damit das zugehörige Gruppenelement das Toroid einmal durchläuft. Die Dichtefunktion  $\varrho(y_j)$  kann auch als „Oberfläche“ der Klasse konjugierter

Elemente angesprochen werden, welche von dem Element des Toroids mit den Koordinaten  $y_j$  ausgeht. Im § 3 werden wir finden

$$\varrho(y_j) = \prod_{k=1}^m 2[1 - \cos 2\pi \vartheta_k(y_j)]. \quad (14)$$

Dabei sind die  $\vartheta_k$  die in Nr. 1 definierten ganzzahligen Linearformen, welche die Spiegelebenen des Diagramms definieren. Die Funktion  $\varrho(y_j)$  verschwindet also in den Punkten der Diagrammebenen. Wegen

$$1 - \cos 2\pi \vartheta_k(y_j) = 2 \sin^2 \pi \vartheta_k(y_j)$$

führen wir noch die Funktion

$$\Delta(y_j) = \prod_{k=1}^m 2i \sin \pi \vartheta_k(y_j) \quad (15)$$

oder

$$\Delta(y_j) = \prod_{k=1}^m \left\{ e\left(\frac{\vartheta_k(y_j)}{2}\right) - e\left(-\frac{\vartheta_k(y_j)}{2}\right) \right\} \quad (16)$$

ein und haben also

$$\varrho(y_j) = |\Delta(y_j)|^2$$

das heißt die endgültige Formel

$$\int_{(\mathcal{G})} f(x) dv_x = \int_{(\mathcal{P})} f(y_j) |\Delta(y_j)|^2 dy_1 \dots dy_i. \quad (17)$$

Aus (15) liest man ab: Ist  $\mu$  wieder die Anzahl der Diagrammebenen, welche durch einen gegebenen Punkt des  $R^l$  gehen, so beginnt die Taylorentwicklung von  $\Delta(y_j)$  in diesem Punkt mit einer Form vom genauen Grad  $\mu$ .

Nun beweisen wir

**Satz 7.** *Die Funktion  $\Delta(y_j)$  ist ein alternierendes Polynom im Sinne von Nr. 3.*

Zunächst ist nämlich die Dichtefunktion  $\varrho(y_j)$  automorph gegenüber der gesamten kaleidoskopischen Gruppe  $\Gamma$ . Denn die Gruppe  $\Phi$  von Abbildungen des Toroids führt, wie wir schon in Nr. 2 sahen, eine Klasse konjugierter Elemente in sich über und  $\varrho(y_j)$  ist ja die Oberfläche einer solchen Klasse.

Nun erhält man  $\Delta(y_j)$  im wesentlichen durch Wurzelziehen aus  $\varrho(y_j)$ , also muß diese Funktion bei einer Operation von  $\Gamma$  entweder ungeändert bleiben oder das Vorzeichen ändern. Die Formel (15) zeigt jetzt

sofort, daß  $\Delta(y_j)$  bei einer Spiegelung an einer Diagrammebene  $\vartheta_i(y_j) = c$  das Vorzeichen ändert. Denn setzt man speziell einen Punkt ein, der dieser Diagrammebene sehr nahe liegt, so ändert der Faktor  $\sin \pi \vartheta_i(y_j)$  das Vorzeichen, während die anderen Faktoren das Vorzeichen behalten. Da nach Nr. 1c die Spiegelungen an den Diagrammebenen  $\Gamma$  erzeugen, ist  $\Delta(y_j)$  invariant bei jeder eigentlichen Bewegung von  $\Gamma$  und ändert sein Vorzeichen bei jeder uneigentlichen. Da nun  $\Gamma$  auch von  $\Psi$  und den Translationen des Einheitsgitters  $\gamma$  erzeugt wird, muß  $\Delta(y_j)$  automorph sein gegenüber den Translationen von  $\gamma$  und sich gegenüber  $\Psi$  ebenfalls alternierend verhalten.

Bei der Ausmultiplikation von (16) erscheint nun  $\Delta(y_j)$  als Summe von Exponentialausdrücken, welche wegen der Invarianz gegenüber den Translationen von  $\gamma$  Elementarausdrücke im Sinne von Nr. 2 sein müssen. (Die Nenner 2 müssen also beim Ausmultiplizieren verschwinden.) Damit ist alles bewiesen.

Im § 3 werden wir noch das gesamte Volumen der Gruppe  $G$  also nach (17) das Integral

$$\int_{(P)} |\Delta(y_j)|^2 dy_1 \dots dy_l$$

berechnen und dafür den Wert  $N$  (= Ordnung von  $\Psi$ ) finden. Daraus kann man in Verschärfung von Satz 7 schließen

**Satz 8.** *Die Funktion  $\Delta(y_j)$  ist eine alternierende Elementarsumme.*

(Bei der Ausmultiplikation in (16) müssen also genau  $N$  Glieder stehen bleiben.)

Beweis. Da  $\Delta(y_j)$  nach Satz 7 alternierendes Polynom ist, gilt nach Satz 5 eine Darstellung

$$\Delta(y_j) = \sum_{(k)} a_k S_k(y_j) \tag{18}$$

mit ganzzahligen  $a_k$ . Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen von Nr. 3 Formel (12) ergibt sich daraus

$$\int_{(P)} |\Delta(y_j)|^2 dy_1 \dots dy_l = N \sum_{(k)} a_k^2.$$

Wie wir eben zitiert haben, ist aber die linke Seite =  $N$  und damit muß

$$\sum_{(k)} a_k^2 = 1$$

sein, was wegen der Ganzzahligkeit der  $a_k$  nur möglich ist, wenn alle Zahlen  $a_k$  verschwinden bis auf eine, welche =  $\pm 1$  ist.

5. Jetzt sollen die Charaktere  $\chi_k(x)$  der *irreduziblen* Darstellungen der Lie'schen Gruppe  $G$  berechnet werden.  $x$  sei wieder das allgemeine Element von  $G$ .

Wir benutzen dazu die bekannten Orthogonalitätsrelationen der Darstellungstheorie nämlich

$$\int_{(G)} \chi_i(x) \overline{\chi_k(x)} dv_x = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ N & \text{für } i = k \end{cases} . \quad (19)$$

Zur zweiten Alternative in dieser Formel soll noch folgendes bemerkt werden. Das Integral des Quadrats des Betrages eines Charakters  $\chi_k(x)$  ist sicher einmal für alle Charaktere dasselbe. Setzt man speziell den Charakter der Einsdarstellung ein (welche jedem Gruppenelement  $x$  die Zahl 1 als einreihige Matrix zuordnet), so erkennt man, daß dieses Integral gleich dem gesamten Volumen von  $G$  ist. Dafür haben wir oben den Wert  $N$  gefunden.

Unter Benutzung der Volumenformel (17) können wir diese Relationen nun schreiben

$$\int_{(P)} \chi_i(y_j) \overline{\chi_k(y_j)} |\Delta(y_j)|^2 dy_1 \dots dy_l = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ N & \text{für } i = k \end{cases} .$$

Wir führen zur Vereinfachung an Stelle der Charaktere die *Charakteristiken* ein

$$X_k(y_j) = \chi_k(y_j) \Delta(y_j) \quad (20)$$

und haben dann

$$\int_{(P)} X_i(y_j) \overline{X_k(y_j)} dy_1 \dots dy_l = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ N & \text{für } i = k \end{cases} . \quad (21)$$

Die Charakteristiken bilden also ein orthogonales Funktionssystem im Parallelepipet  $P$ .

Nun ist nach Satz 3 ein Charakter  $\chi_k$  eine ganzzahlige Linearkombination automorpher Elementarsummen und  $\Delta(y_j)$  ist nach Satz 7 alternierendes Polynom, also ist die Charakteristik  $X_k$  nach ihrer Definition (20) auch ein alternierendes Polynom und somit existiert nach Satz 5 eine Darstellung

$$X_k(y_j) = \sum_{(\mu)} a_{k\mu} S_{\mu}(y_j) \quad (22)$$

mit ganzzahligen  $a_{k\mu}$ . Integrieren wir dies mit Unterstützung der Formeln (12) von Nr. 3, so ergibt sich

$$\int_{(P)} X_k(y_j) \overline{X_k(y_j)} dy_1 \dots dy_l = N \sum_{(\mu)} a_{k\mu}^2 .$$

Konfrontation mit der zweiten Formel (21) ergibt

$$\sum_{(\mu)} a_{k\mu}^2 = 1 \quad ,$$

was wegen der Ganzzahligkeit der  $a_{k\mu}$  wieder nur möglich ist, wenn alle  $a_{k\mu}$  verschwinden bis auf eines, welches  $= \pm 1$  ist. Aus (22) folgt dann

**Satz 9.** *Jede zu einer irreduziblen Darstellung gehörige Charakteristik ist alternierende Elementarsumme.*

Es gilt aber auch die Umkehrung

**Satz 10.** *Jede alternierende Elementarsumme ist Charakteristik einer irreduziblen Darstellung. (Abgesehen vom Faktor  $\pm 1$ .)*

Dies folgt aus dem Satz von *Peter-Weyl*, welcher besagt, daß die Charaktere  $\chi_k(x)$  ein vollständiges Funktionensystem im Gebiete der Klassenfunktionen in  $G$  bilden. Es sei also etwa  $S(y_j)$  eine alternierende Elementarsumme, welche keine (positiv oder negativ genommene) Charakteristik ist. Die Funktion

$$f(y_j) = \frac{S(y_j)}{\Delta(y_j)}$$

ist eine endliche und stetige Funktion der Variablen  $y_1, y_2, \dots, y_l$ , da nach Nr. 3 und Nr. 4 die Nullstellen des Nenners auch Nullstellen des Zählers sind. Außerdem ist  $f(y_j)$  automorph gegenüber den Translationen des Einheitsgitters  $\gamma$ , da Zähler und Nenner diese Eigenschaft haben;  $f(y_j)$  ist also Funktion auf dem Toroid. Endlich ist  $f(y_j)$  automorph gegenüber  $\Psi$ , da Zähler und Nenner sich bei  $\Psi$  alternierend verhalten (Satz 7), also ist  $f(y_j)$  als Funktion auf dem Toroid automorph gegenüber der Transformationsgruppe  $\Phi$ .

Daraus schließt man<sup>11)</sup>, daß  $f(y_j)$  eine Klassenfunktion ist, oder besser gesagt, daß in  $G$  eine Klassenfunktion existiert, welche auf dem Toroid mit  $f(y_j)$  übereinstimmt. (Sie ist infolge des Hauptachsentheorems eindeutig bestimmt.) Wegen

---

<sup>11)</sup> In der früheren Arbeit wurde nämlich bewiesen (§ 4, Nr. 6), daß zwei reguläre Elemente auf dem Toroid dann und nur dann in bezug auf  $G$  konjugiert sind, wenn sie durch eine Transformation von  $\Phi$  auseinander hervorgehen. Um die sogenannten singulären Elemente brauchen wir uns nicht zu kümmern, da ihr Maß Null ist; sie spielen bei der Integration keine Rolle.

$$\int_{(G)} f(x) \overline{\chi_k(x)} dv_x = \int_{(P)} f(y_j) \overline{\chi_k(y_j)} |\Delta(y_j)|^2 dy_1 \dots dy_l$$

$$= \int_{(P)} S(y_j) \overline{X_k(y_j)} dy_1 \dots dy_l = \int_{(P)} S(y_j) \overline{S_k(y_j)} dy_1 \dots dy_l = 0$$

müßte diese Klassenfunktion auf allen Charakteren orthogonal stehen, also identisch verschwinden, was unmöglich ist.

Wir formulieren das **Schlußresultat** :

*Es sei eine kaleidoskopische Gruppe  $\Gamma$  im euklidischen Raum  $R^l$  gegeben, welche von den Translationen des Gitters  $\gamma$  und der endlichen Punktgruppe  $\Psi$  erzeugt sein möge. Man benutze ein Koordinatensystem  $y_1, y_2, \dots, y_l$ , dessen Grundvektoren primitive Vektoren von  $\gamma$  sind und bilde die alternierende Elementarsumme*

$$S(y_j) = \sum_{(\Psi)} \pm e^{2\pi i(q_1 y_1 + \dots + q_l y_l)},$$

dabei sind die  $q_i$  fest gewählte ganze Zahlen und die Summation ist über alle Bildpunkte des Punktes  $(y_1, \dots, y_l)$  vermöge der Gruppe  $\Psi$  zu erstrecken; das Vorzeichen jedes Terms stimmt mit dem Vorzeichen der Determinante der betreffenden Transformation von  $\Psi$  überein.

Dann sind die Charaktere der irreduziblen Darstellungen der zu  $\Gamma$  gehörigen Lie'schen Gruppe  $G$  gegeben durch

$$\chi(y_j) = \pm \frac{S(y_j)}{\Delta(y_j)}. \quad (23)$$

Dabei wird  $\Delta(y_j)$  nach folgender Vorschrift berechnet :

Die Gleichungen der Spiegelebenen von  $\Gamma$  seien

$$\vartheta_k(y_j) = c, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

( $c$  durchläuft alle ganzen Zahlen); dann ist

$$\Delta(y_j) = \prod_{k=1}^m 2^i \sin \pi \vartheta_k(y_j). \quad (24)$$

Das Vorzeichen in (23) kann leicht festgelegt werden, wenn man beachtet, daß  $\chi(0, 0, \dots, 0)$  positiv sein muß, denn dies ist der Grad  $\nu$  der Darstellung.

6. Eigentlich müßte nun die Formel (23) diskutiert und speziell durch Ausführung der Division die Zerlegung von  $\chi(y_j)$  in automorphe Elementarsummen gegeben werden (Satz 3). Es wäre aber dazu eine Theorie der gegenüber  $\Psi$  automorphen Funktionen notwendig analog zur Theorie der symmetrischen Funktionen. Ich will daher nur den ersten Schritt in dieser Richtung tun und zeigen, wie man die durch (24) gegebene Funktion  $\Delta(y_j)$  im konkreten Fall am einfachsten als alternierende Elementarsumme darstellt (Satz 8).

Zu diesem Zweck benötigen wir einen Fundamentalbereich  $F$  der Gruppe  $\Psi$ . Bereits in Nr. 3 haben wir beim Beweis von Satz 4 erwähnt, daß  $F$  durch Spiegelebenen von  $\Psi$  begrenzt wird; jetzt brauchen wir aber das schärfere Resultat, daß  $F$  von genau  $l$  solchen Spiegelebenen begrenzt wird. ( $l =$  Dimension des Toroids und von  $R^l$ ). Der Beweis folgt unter Berücksichtigung von Nr. 1d aus dem elementargeometrischen Hilfsatz, der nicht allzu schwer einzusehen ist:

Sind im  $l$ -dimensionalen euklidischen Raum endlich viele  $(l - 1)$ -dimensionale Ebenen durch den Nullpunkt gegeben, unter denen es  $l$  linear unabhängige gibt, so befindet sich unter den Bereichen, in welche diese Ebenen den Raum einteilen, mindestens einer, der von genau  $l$  der Ebenen begrenzt wird.

In unserem Fall müssen aber alle diese Bereiche als Fundamentalbereiche von  $\Psi$  kongruent sein, daher wird jeder von  $l$  Ebenen begrenzt.

Es seien also  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_l$  die zu den  $l$  Begrenzungsebenen von  $F$  gehörigen Linearformen, also

$$\vartheta_k(y_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

die Gleichungen der Wände von  $F$ . Die noch freien Vorzeichen der Formen  $\vartheta_k$  seien dabei so gewählt, daß das Innere von  $F$  durch

$$\vartheta_k(y_j) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, l$$

gegeben ist. Die übrigen Linearformen  $\vartheta_{l+1}, \vartheta_{l+2}, \dots, \vartheta_m$ , welche im Diagramm noch vorkommen, können wir nun als Linearkombinationen der bisherigen ansetzen:

$$\vartheta_i(y_j) = \sum_{k=1}^l \alpha_{ik} \vartheta_k(y_j), \quad i = l + 1, \quad l + 2, \dots, m. \quad (25)$$

Hierin haben für einen festen Wert  $i$  alle Koeffizienten  $\alpha_{ik}$  dasselbe Vorzeichen. Denn bezeichnen wir mit  $P_k$  den Punkt des Fundamentalbereichs, für den gilt

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \cdots = \vartheta_{k-1} = 0, \quad \vartheta_k = 1, \quad \vartheta_{k+1} = \cdots = \vartheta_l = 0,$$

so ergibt Einsetzen dieses Punktes in (25)

$$\alpha_{ik} = \text{Wert von } \vartheta_i \text{ in } P_k .$$

Es müssen aber alle Punkte  $P_k$  auf einer Seite der durch  $\vartheta_i = 0$  gegebenen Spiegelebene liegen, da diese nicht in  $F$  eindringt. Daher haben die  $\alpha_{ik}$  einerlei Vorzeichen.

Durch geeignete Wahl der Vorzeichen der Linearformen  $\vartheta_{i+1}, \dots, \vartheta_m$  können wir daher erreichen, daß alle  $\alpha_{ik}$  positiv werden. Es gilt also

**Satz 10.** *Die Vorzeichen der  $m$  Linearformen  $\vartheta_k(y_j)$  des Diagramms können so gewählt werden, daß alle Formen Linearkombinationen mit positiven Koeffizienten von  $l$  unter ihnen sind. Die zu diesen  $l$  speziellen Formen gehörigen Spiegelebenen durch den Nullpunkt begrenzen einen Fundamentalbereich der Gruppe  $\Psi$ .*

Nun wählen wir für einen Moment ein neues Koordinatensystem  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l$  durch die Transformationsformeln

$$\eta_i = \vartheta_i(y_j), \quad i = 1, 2, \dots, l . \quad (26)$$

In diesem neuen System haben also nach Satz 10 alle Linearformen  $\vartheta_i(\eta_j)$  positive Koeffizienten. Zur Berechnung von  $\Delta(\eta_j)$  in diesem neuen Koordinatensystem verwenden wir die Formel (16) von Nr. 4 also

$$\Delta(\eta_j) = \prod_{k=1}^m \left\{ e\left(\frac{\vartheta_k(\eta_j)}{2}\right) - e\left(-\frac{\vartheta_k(\eta_j)}{2}\right) \right\} . \quad (27)$$

Bei der Ausmultiplikation erscheint hier speziell der Elementarausdruck

$$e(\vartheta) \quad \text{mit} \quad \vartheta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \vartheta_k(\eta_j) . \quad (28)$$

Im ganzen aber entstehen  $2^m$  Elementarausdrücke mit Koeffizienten  $\pm 1$ . Nun wissen wir aber nach Satz 8, daß das Resultat dieser Ausmultiplikation eine alternierende Elementarsumme ist, daß also recht viele unter diesen Posten sich wegheben müssen und nur  $N$  stehen bleiben können. Gerade der Term (28) kann sich aber mit keinem anderen aufheben. Denn in einem anderen Term  $e(\vartheta')$  wird der Exponent  $\vartheta'$  erhalten, indem von  $\vartheta$  einige der Formen  $\vartheta_k(\eta_j)$  abgezogen werden. Es ist also

mindestens einer der Koeffizienten von  $\vartheta'$  kleiner als der entsprechende von  $\vartheta$ .

**Satz 11.** *Werden die Vorzeichen der  $m$  Formen  $\vartheta_k(y_j)$  des Diagramms gemäß Satz 10 gewählt, so wird die alternierende Elementarsumme  $\Delta(y_j)$  durch den Elementarausdruck  $e(\vartheta)$  erzeugt, wobei  $\vartheta$  die halbe Summe aller  $m$  Formen  $\vartheta_k(y_j)$  ist.*

Die Konstruktion eines Fundamentalbereichs  $F$  von  $\Psi$  gemäß Satz 10 ist auch nützlich, um die alternierenden Elementarsummen  $S(y_j)$  von (23) aufzustellen und zu ordnen. Wir erinnern nämlich daran, daß  $S(y_j)$  nach Nr. 3 durch einen regulären Vektor  $p_0$  gegeben ist; man wird ihn so wählen, daß er (vom Nullpunkt aus angetragen) ins Innere von  $F$  weist, um sicher zu sein, daß man jede alternierende Elementarsumme nur einmal erhält. Für diese Rechnungen eignet sich das orthogonale Koordinatensystem der  $x_j$  besser als das schiefe System der  $y_j$ .

## § 2. Beispiele

### 1. Die kaleidoskopische Gruppe $B_l$ .

In einem euklidischen  $l$ -dimensionalen Raum  $R^l$  sei ein kartesisches Koordinatensystem  $x_1, x_2, \dots, x_l$  gegeben.  $W$  sei der Würfel, dessen Ecken die Koordinaten  $\pm 1$  haben. Wir geben nun eine kaleidoskopische Gruppe  $\Gamma = B_l$  durch ihre Spiegelebenen wie folgt.

#### a) Spiegelebenen durch den Nullpunkt

1. Sorte = Koordinatenebenen:  $x_\mu = 0, \mu = 1, 2, \dots, l$
2. Sorte = Diagonalebenen von  $W$ :  $x_\nu \pm x_\mu = 0, \mu < \nu,$

#### b) die übrigen Spiegelebenen sind parallel zu den Ebenen von a) und zwar seien ihre Gleichungen

1. Sorte:  $x_\mu = c$  ( $c$  durchläuft die ganzen Zahlen)
2. Sorte:  $x_\nu \pm x_\mu = c$  ( $c$  durchläuft die ganzen Zahlen).

Damit ist  $\Gamma$  gegeben und wir müssen jetzt das Gitter  $\gamma$  und die Punktgruppe  $\Psi$  konstruieren, welche den Nullpunkt fest läßt.

Nun wird nach § 1 Nr. 1e das Gitter  $\gamma$  erhalten, indem man  $\Gamma$  auf den Nullpunkt ausübt. Die Spiegelung an der Ebene  $x_1 + x_2 = 1$  führt zum Beispiel den Nullpunkt über in den Punkt mit den  $x$ -Koordinaten  $(1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ , die Spiegelung an der Ebene  $x_1 = 1$  führt ihn über in  $(2, 0, 0, 0, \dots, 0)$ . So erkennt man, daß wir in  $\gamma$  auf alle Fälle die  $l$  Translationen haben

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (2, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0) \\
\mathbf{e}_2 &= (1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0) \\
\mathbf{e}_3 &= (0, 1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0) \\
\mathbf{e}_4 &= (0, 0, 1, 1, \dots, 0, 0, 0) \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
\mathbf{e}_{l-1} &= (0, 0, 0, 0, \dots, 1, 1, 0) \\
\mathbf{e}_l &= (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1) .
\end{aligned} \tag{29}$$

Es ist nicht allzu schwierig einzusehen, daß dies sogar primitive Translationen von  $\gamma$  sind, daß man also alle anderen Translationen von  $\gamma$  aus diesen ganzzahlig kombinieren kann. So hat man zum Beispiel

$$\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 = (-1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0) .$$

Dies ist der Punkt, in welchen der Nullpunkt durch die Spiegelung an der Ebene  $x_2 - x_1 = 1$  übergeht. Oder

$$2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 = (0, 2, 0, 0, \dots, 0, 0) \quad \text{usw.}$$

Die Vektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_l$  bilden nun die Grundvektoren unseres Koordinatensystems  $y_j$ , wir haben also folgende Transformationsformeln

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2y_1 + y_2 \\
x_2 &= y_2 + y_3 \\
x_3 &= y_3 + y_4 \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
x_{l-1} &= y_{l-1} + y_l \\
x_l &= y_l .
\end{aligned} \tag{30}$$

Die Gruppe  $\Psi$  wird erzeugt durch die Spiegelungen an den unter a) aufgeführten Ebenen durch den Nullpunkt. Dabei erzeugen die Spiegelungen der ersten Sorte eine Untergruppe, welche aus allen möglichen Vorzeichenänderungen der Variablen  $x_j$  besteht (Ordnung  $2^l$ ). Eine Transformation dieser Untergruppe ist eigentlich oder uneigentlich, je nachdem ob eine gerade oder ungerade Zahl von Vorzeichen geändert wird. Man erkennt nun leicht, daß man nur noch alle Permutationen der Variablen  $x_j$  hinzu nehmen muß, um die volle Gruppe  $\Psi$  zu erhalten. Ihre Ordnung ist  $2^l l!$

Jetzt grenzen wir nach dem Verfahren von Satz 10 einen Fundamentalbereich  $F$  von  $\Psi$  ab. Die Linearformen  $\vartheta_k(x_j)$  unserer kaleidoskopischen Gruppe  $\Gamma$  lauten nach b)

$$\vartheta_k(x_j) = \begin{cases} x_\mu & , \mu = 1, 2, \dots, l \\ x_\nu \pm x_\mu & , \mu < \nu \end{cases} . \quad (31)$$

Wir wählen die  $l$  Formen aus

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x_j) &= x_1 \\ \vartheta_2(x_j) &= x_2 - x_1 \\ \vartheta_3(x_j) &= x_3 - x_2 \\ &\vdots \\ \vartheta_l(x_j) &= x_l - x_{l-1} , \end{aligned} \quad (32)$$

und man verifiziert ohne Mühe, daß die übrigen  $\vartheta_k(y_j)$  Linearkombinationen dieser Speziellen mit positiven Koeffizienten sind. Somit ist ein Fundamentalbereich  $F$  gegeben durch

$$x_1 > 0, \quad x_2 - x_1 > 0, \quad x_3 - x_2 > 0, \dots, \quad x_l - x_{l-1} > 0, \quad (33)$$

das heißt die  $x_j$  müssen positiv und monoton wachsend sein. Satz 11 liefert uns nun die Funktion  $\Delta(x_j)$ . Die halbe Summe aller Formen  $\vartheta_k(x_j)$  in (31) beträgt

$$\vartheta = \frac{1}{2}[x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \dots + (2l - 1)x_l] . \quad (34)$$

Nun müssen wir auf den Elementarausdruck  $e(\vartheta)$  die Gruppe  $\Psi$  ausüben und die  $2^l l!$  Posten alternierend addieren. Zuerst üben wir die Untergruppe aller Vorzeichenänderungen der  $x_j$  aus, haben also zu bilden

$$\sum \varepsilon \cdot e \left\{ \frac{\pm x_1 \pm 3x_2 \pm \dots \pm (2l - 1)x_l}{2} \right\} ,$$

wobei die Summe über alle möglichen Vorzeichenwahlen in der geschweiften Klammer zu erstrecken ist und das Vorzeichen  $\varepsilon$  positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem ob in der geschweiften Klammer eine gerade oder ungerade Zahl negativer Zeichen steht. Diese Summe ist aber nichts anderes als die Entwicklung des Produkts

$$(2i)^l \sin \pi x_1 \sin 3\pi x_2 \sin 5\pi x_3 \dots \sin (2l - 1)\pi x_l .$$

Auf dieses Produkt müssen nun noch die Permutationen der Variablen ausgeübt werden; ein solcher Posten ist positiv oder negativ zu nehmen,

je nachdem ob die Permutation gerade oder ungerade ist. Wir erhalten also die Determinante

$$\Delta(x_j) = (2i)^l \begin{vmatrix} \sin \pi x_1 & \sin 3\pi x_1 & \dots & \sin (2l-1)\pi x_1 \\ \sin \pi x_2 & \sin 3\pi x_2 & \dots & \sin (2l-1)\pi x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \pi x_l & \sin 3\pi x_l & \dots & \sin (2l-1)\pi x_l \end{vmatrix}.$$

Eine solche Determinante schreiben wir hinfort abgekürzt

$$\Delta(x_j) = (2i)^l |\sin \pi x_j \sin 3\pi x_j \dots \sin (2l-1)\pi x_j|, \quad (35)$$

indem wir nur die  $j$ -te Zeile anschreiben.

Man kann dieses Resultat ohne die allgemeinen Sätze 10 und 11 verifizieren, denn aus der ursprünglichen Definition von  $\Delta(x_j)$  (§ 1, Nr. 4, Formel 15) folgt ja

$$\Delta(x_j) = \pm \prod_{\mu=1}^l 2i \sin \pi x_\mu \cdot \prod_{\mu < \nu} 4 \sin \pi (x_\nu + x_\mu) \sin \pi (x_\nu - x_\mu)$$

und man kann direkt nachrechnen, daß dies mit (35) übereinstimmt.

Unsere letzte Arbeit ist nun die Bestimmung der allgemeinen alternierenden Elementarsumme  $S(x_j)$ . Zu diesem Zweck müssen wir einen Vektor  $p_0$  im Fundamentalbereich  $F$  wählen. Er habe die  $x$ -Koordinaten  $p_1, p_2, \dots, p_l$ , wobei also gemäß (33) gelten muß

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_l. \quad (36)$$

Die zugehörige Linearform  $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_l x_l$  muß auf die  $y$ -Koordinaten umgerechnet werden:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_l x_l = q_1 y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_l y_l$$

und dann die Bedingung formuliert werden, daß die  $q_j$  ganzzahlig sind. Die Transformationsformeln (30) ergeben

$$\begin{aligned} q_1 &= 2p_1 \\ q_2 &= p_1 + p_2 \\ q_3 &= p_2 + p_3 \\ &\vdots \\ q_{l-1} &= p_{l-2} + p_{l-1} \\ q_l &= p_{l-1} + p_l. \end{aligned} \quad (37)$$

Die Ganzzahligkeit der  $q_j$  bedeutet also, daß die  $p_j$  ganz oder halbganz (d. h. die Hälfte einer ungeraden Zahl) sein müssen.

Die allgemeine alternierende Elementarsumme entsteht also, indem wir auf den Elementardruck  $e(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_l x_l)$  die Gruppe  $\Psi$  alternierend ausüben. Die Rechnung verläuft genau gleich wie oben im Fall von  $\Delta(x_j)$  und ergibt

$$S(x_j) = (2i)^l |\sin 2\pi p_1 x_j, \sin 2\pi p_2 x_j, \dots, \sin 2\pi p_l x_j|. \quad (38)$$

Zur Formulierung des Schlußresultates führen wir noch die Zahlen  $2p_j = n_j$  ein, welche dann ganz, und zwar entweder alle gerade oder alle ungerade sein müssen und finden:

*Die Charaktere der zur kaleidoskopischen Gruppe  $B_l$  gehörigen Lie'schen Gruppe sind gegeben durch*

$$\chi(x_j) = \frac{|\sin n_1 \pi x_j, \sin n_2 \pi x_j, \dots, \sin n_l \pi x_j|}{|\sin \pi x_j, \sin 3\pi x_j, \dots, \sin (2l-1)\pi x_j|}, \quad (39)$$

wobei die  $n_j$  entweder alle gerade oder dann alle ungerade Zahlen sind, welche der Bedingung

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_l$$

genügen.

Wir wollen noch zwei spezielle Darstellungen etwas weiter diskutieren. Zunächst nehmen wir an

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 3, \dots, \quad n_{l-1} = 2l-3, \quad \text{aber} \quad n_l = 2l+1.$$

Die Division der beiden Determinanten in (39) läßt sich dann ausführen und liefert

$$\chi(x_j) = 1 + 2(\cos 2\pi x_1 + \cos 2\pi x_2 + \dots + \cos 2\pi x_l). \quad (40)$$

Der Charakter setzt sich also (wie nach Satz 3 zu erwarten) aus zwei automorphen Elementarsummen zusammen, nämlich aus der Elementarsumme 1 und der durch  $e(x_1)$  erzeugten Elementarsumme. Setzt man den Nullpunkt in (40) ein, so erhält man für den Grad der Darstellung (Dimension des Darstellungsraumes) den Wert  $2l+1$ .

Ferner berechnen wir noch die charakteristischen Wurzeln  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2l+1}$  der Matrix, welche ein gegebenes Element  $x$  der Lie'schen Gruppe darstellt. Wir können annehmen, daß  $x$  auf dem Toroid liegt, also etwa



welche der Wert des Charakters (40) gleich dem Grad  $(2l + 1)$  der Darstellung ist, und dies gibt die Elemente  $x$  des Toroids mit ganzzahligen Koordinaten  $x_j$  und ihre Konjugierten in  $G$ . Durch jeden Punkt mit ganzzahligen  $x_j$  im Raume  $R^l$  unseres Diagramms geht aber eine Spiegelenebene aus jeder der Scharen b), welche wir am Anfang dieser Nummer eingeführt haben. Daher gehört nach § 1, Nr. 1f jedes Element  $x$  des Toroids mit ganzzahligen Koordinaten  $x_j$  zum Zentrum der Lie'schen Gruppe  $G$  und daher hat  $x$  überhaupt keine Konjugierten außer sich selbst.

Der Kern des Homomorphismus besteht also genau aus den Elementen des Toroids mit ganzzahligen Koordinaten  $x_j$ ; er ist diskret in  $G$  und daher hat die Bildgruppe  $O$  dieselbe Dimension wie  $G$ . Die Dimension  $n$  von  $G$  beträgt aber nach § 1 Nr. 1c  $n = l + 2m$  wobei  $m$  die Anzahl der Spiegelungsebenen von  $\Psi$  ist, welche durch den Nullpunkt laufen. In unserem Falle ist

$$m = l + 2 \binom{l}{2} = l^2, \quad \text{also} \quad n = l(2l + 1) .$$

$O$  ist also eine Drehungsgruppe der Dimension  $l(2l + 1)$  im  $(2l + 1)$ -dimensionalen Darstellungsraum, also notwendig mit der vollen Drehungsgruppe dieses Raumes identisch. Wir haben also als Nebenresultat erhalten:

*Die zur kaleidoskopischen Gruppe  $B_l$  gehörige Lie'sche Gruppe ist im Kleinen zur vollen Drehungsgruppe  $O$  eines  $(2l + 1)$ -dimensionalen euklidischen Raumes isomorph.*

Genauer gesagt ist sie die universelle Überlagerungsgruppe von  $O$ . In der früheren Arbeit wurde umgekehrt gezeigt, daß die Konstruktion der zu  $O$  gehörigen kaleidoskopischen Gruppe (vgl. § 1, Nr. 1) eben  $B_l$  ergibt, wovon wir jetzt ausgegangen sind. Die Formel (39) ergibt also die Charaktere von  $O$  als Funktionen der „Drehwinkel“  $x_1, x_2, \dots, x_l$ .

Eine zweite spezielle Darstellung unserer Lie'schen Gruppe erhalten wir durch die Wahl

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 4, \dots, \quad n_l = 2l . \tag{43}$$

Auch in diesem Fall läßt sich die Division der Determinanten in der Formel (39) ausführen und man erhält den Charakter

$$\chi(x_j) = 2^l \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \cdots \cos \pi x_l . \tag{44}$$

Der Grad der Darstellung ist  $2^l$ . Für die Elemente  $x$  des Toroids mit ganzzahligen Koordinaten ist  $\chi(x_j) = \pm 2^l$ . Wir haben also hier keine

eindeutige Darstellung der orthogonalen Gruppe  $O$ , sondern eine zwei-deutige sogenannte *Spindarstellung*. Der bekannteste Fall ist  $l = 1$ , wo sich die Darstellung der Drehungsgruppe im dreidimensionalen Raum durch 2-reihige unitäre Matrizen ergibt.

In analoger Weise wie hier die Gruppe  $O$  lassen sich die übrigen klassischen Gruppen — nämlich die Drehungsgruppe in Räumen gerader Dimension, die unitäre Gruppe und die Komplexgruppe — diskutieren.

## 2. Die Ausnahmegruppe $G_2$ .

Wir gehen aus von der kaleidoskopischen Gruppe in der Ebene, welche durch das Diagramm von Fig. 2 gegeben ist. Man hat also  $l = 2$ .

Zwei primitive Vektoren des Einheitsgitters  $\gamma$ , welche das Koordinatensystem  $y_1, y_2$  aufspannen, sind eingezeichnet. Für die Gleichungen der Spiegelungsachsen liest man aus der Figur ab

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &\equiv y_2 = c & \vartheta_4 &\equiv y_1 + y_2 = c \\ \vartheta_2 &\equiv y_1 - y_2 = c & \vartheta_5 &\equiv 2y_1 + y_2 = c \\ \vartheta_3 &\equiv y_1 = c & \vartheta_6 &\equiv y_1 + 2y_2 = c, \end{aligned}$$

$c$  durchläuft jeweilen alle ganzen Zahlen. Die Formen  $\vartheta_k(y_j)$  sind bereits so gewählt, daß alle Linearkombinationen der ersten beiden mit positiven Koeffizienten sind. Für die halbe Summe aller Formen erhalten wir

$$\vartheta = 3y_1 + 2y_2,$$

der Elementarausdruck  $e(3y_1 + 2y_2)$  erzeugt also die Funktion  $\Delta(y_j)$ .

Wie in allen Fällen hexagonaler Symmetrie ist es nun bequem, die rechtwinkligen Koordinaten  $x_j$ , wie folgt zu wählen: Wir betten unsere Ebene  $R^2$ , in welcher das Diagramm liegt, in einen 3-dimensionalen Raum  $R^3$  mit den kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  ein, und zwar sollen die beiden Grundvektoren des  $y$ -Koordinatensystems im  $x$ -System die Koordinaten

$$(1, 0, -1) \quad \text{bzw.} \quad (0, 1, -1)$$

erhalten. Wir haben also die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= -y_1 - y_2 \end{aligned} \tag{45}$$

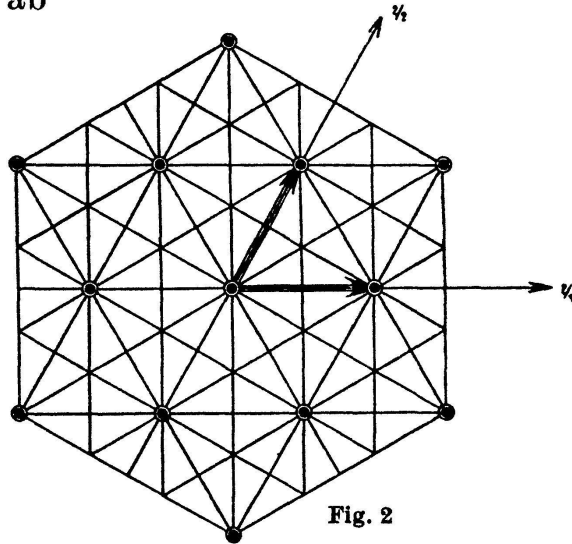


Fig. 2

und die Punkte des  $R^2$  sind durch die Relation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (46)$$

gekennzeichnet. Es folgt

$$\vartheta_1 = x_2, \quad \vartheta_2 = x_1 - x_2, \quad \vartheta = 3x_1 + 2x_2 \quad (47)$$

und der Fundamentalbereich  $F$  der Gruppe  $\Psi$  ist also durch

$$x_1 - x_2 > 0, \quad x_2 > 0 \quad (48)$$

gegeben.

Um nun die allgemeine alternierende Elementarsumme  $S(y_j)$  aufzufinden, wählen wir einen Vektor  $p$  im  $R^3$  mit den  $x$ -Koordinaten  $p_1, p_2, p_3$ . Seine Normalprojektion  $p'$  auf den  $R^2$  hat dann die Koordinaten

$$p'_1 = \frac{2p_1 - p_2 - p_3}{3}, \quad p'_2 = \frac{-p_1 + 2p_2 - p_3}{3}, \quad p'_3 = \frac{-p_1 - p_2 + 2p_3}{3}. \quad (49)$$

Diesen Vektor  $p'$  wählen wir nun als Vektor des Elementarausdrucks, der  $S(y_j)$  erzeugt.  $p'$  soll im Innern von  $F$  liegen, also muß gemäß (48) gelten

$$p_1 - p_2 > 0, \quad p_1 + p_3 < 2p_2. \quad (50)$$

Der zu  $p'$  gehörige Elementarausdruck ist nun  $e(p'_1 x_1 + p'_2 x_2 + p'_3 x_3)$ . Setzt man hierin die Werte (49) ein, so ergibt sich wegen (46) auch einfach  $e(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)$ . Die Umrechnung auf die  $y$ -Koordinaten ergibt dafür  $e(q_1 y_1 + q_2 y_2)$ , wobei gemäß den Transformationsformeln (45)

$$q_1 = p_1 - p_3, \quad q_2 = p_2 - p_3 \quad (51)$$

ist. Die Forderung der Ganzzahligkeit der  $q_j$  bedeutet also, daß die Differenzen der  $p_j$  ganzzahlig sind. Die Form  $\vartheta$  entspricht nach (47) dem speziellen Fall  $p_1 = 3, p_2 = 2, p_3 = 0$ .

Jetzt müssen wir auf unseren Elementarausdruck  $e(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)$  die Gruppe  $\Psi$  alternierend ausüben.  $\Psi$  wird erzeugt durch die Spiegelungen an den 6 Achsen durch den Nullpunkt, wie sie die Fig. 2 zeigt. Die Gruppe hat die Ordnung 12. Im Raume  $R^3$  erzeugen nun die drei Spiegelungen an den Achsen

$$\vartheta_2 = 0, \quad \vartheta_5 = 0, \quad \vartheta_6 = 0$$

des  $R^2$  in dieser Ebene  $R^2$  einfach die Permutationen der Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ . Fügt man die Spiegelung am Nullpunkt hinzu, so erhält man die volle Gruppe  $\Psi$ . Diese Spiegelung am Nullpunkt ist in  $R^2$  eine eigentliche Transformation, sie führt unseren Elementarausdruck in  $e(-p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3)$  über. Somit haben wir in  $S(x_j)$  den Term

$$e(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3) + e(-p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3) \\ = 2 \cos 2 \pi (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)$$

und erhalten

$$S(x_j) = 2 \cos 2 \pi (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3) \pm \text{Perm.} (x_1, x_2, x_3),$$

wobei die Abkürzung in naheliegender Weise bedeuten soll, daß die übrigen Terme aus dem Hingeschriebenen durch Permutation von  $x_1, x_2, x_3$  hervorgehen sollen und das Vorzeichen durch die Signatur der Permutation gegeben ist. Die Charaktere der Lie'schen Ausnahme-gruppe sind also

$$\chi(x_j) = \frac{\cos 2 \pi (p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3) \pm \text{Perm.} (x_1, x_2, x_3)}{\cos 2 \pi (3 x_1 + 2 x_2) \pm \text{Perm.} (x_1, x_2, x_3)}. \quad (52)$$

Dabei sind die  $p_j$  irgendwelche Zahlen mit ganzzahligen Differenzen, welche die Ungleichungen

$$p_1 - p_2 > 0, \quad p_1 + p_3 < 2 p_2$$

erfüllen. Um den Grad  $\nu$  der Darstellung zu berechnen, muß man die  $x_j$  in (52) gegen Null streben lassen. Man erhält

$$\nu = \frac{1}{120} (p_1 - p_2) (p_2 - p_3) (p_3 - p_1) (2 p_1 - p_2 - p_3) (2 p_2 - p_3 - p_1) (2 p_3 - p_1 - p_2). \quad (53)$$

Um jede Darstellung nur einmal zu erhalten, kann man etwa  $p_3 = 0$  wählen.  $p_1$  und  $p_2$  sind dann ganze Zahlen, welche den Ungleichungen

$$p_1 > p_2, \quad p_1 < 2 p_2$$

genügen, also positiv sind. In Figur 3 sind die Grade der ersten Darstellungen und die zugehörigen Werte von  $p_1$  und  $p_2$  angegeben.

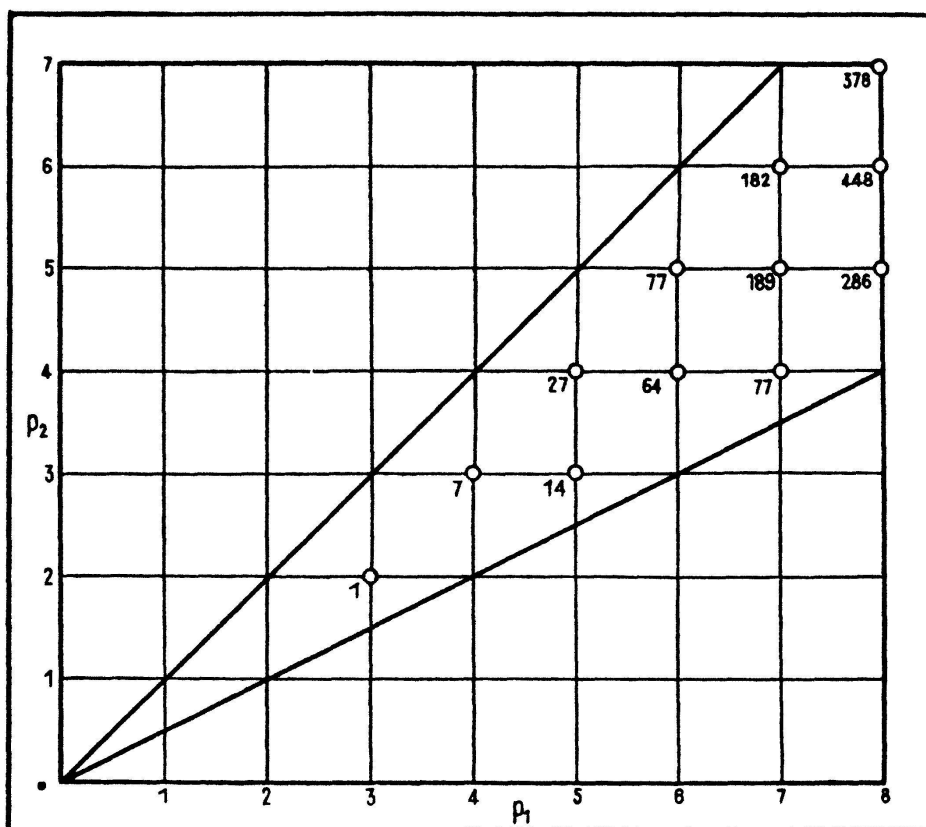


Fig. 3

### § 3. Volumenberechnung in einer geschlossenen Lie'schen Gruppe

In diesem Abschnitt müssen wir uns in vollem Umfang auf früher publizierte Resultate stützen (vgl. Fußnote <sup>1</sup>); die folgenden Fußnoten beziehen sich auf die Paragraphen und Nummern dieser früheren Arbeit.

1.  $G$  sei wie immer eine geschlossene halbeinfache und einfach zusammenhängende Lie'sche Gruppe,  $x$  das allgemeine Element und  $e$  das Einselement, ferner sei  $T$  das fest gewählte maximale Toroid in  $G$  von der Dimension  $l$ . In einer Umgebung  $U(e)$  des Einselementes in  $G$  seien kanonische Koordinaten erster Art  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eingeführt. ( $n$  ist die Dimension von  $G$ .) Die Gruppenmultiplikation innerhalb  $U(e)$  ist also in erster Approximation die Koordinatenaddition. Ist  $a$  ein beliebiges Element von  $G$  (nicht notwendigerweise in  $U(e)$ ), so ist der innere Automorphismus

$$x \rightarrow a^{-1} x a = x' \quad (54)$$

für Elemente  $x$  aus  $U(e)$  eine lineare Transformation

$$x'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k. \quad (55)$$





Analog definieren wir eine Volumenmessung im Wirkungsraum  $W$ . Innerhalb  $U(E)$  sei die Volumenmessung wieder euklidisch also durch das Integral

$$\int dx_{i+1} dx_{i+2} \dots dx_n \quad (59)$$

gegeben. Soll jedoch ein Volumen  $V$  innerhalb einer Umgebung  $U(S)$  eines beliebigen Punktes  $S$  von  $W$  gemessen werden, so messen wir statt dessen das Volumen von  $f^{-1}(V)$ , wobei  $f$  eine Transformation der in  $W$  definierten Transformationsgruppe ist, welche  $E$  in  $S$  überführt. Zu zeigen ist, daß das Maß von  $f^{-1}(V)$  nicht von der Wahl von  $f$  abhängt. Äquivalent mit dieser Behauptung ist, daß eine Transformation der Isotropiegruppe die Volumina innerhalb  $U(E)$  invariant läßt. Dies folgt wieder aus der in Nr. 2 nachgewiesenen Orthogonalität der Transformationen der Isotropiegruppe.

Eine Bemerkung wäre noch über die Volumenmessung auf  $T$  zu machen. Die Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_l$  sind ja auf ganz  $T$  definiert. (Wir benutzen wieder die Abwicklung von  $T$  in den euklidischen Raum  $R^l$ ; die Koordinaten eines Elementes von  $T$  sind dann die Koordinaten des entsprechenden Punktes im Grund-Parallelepiped  $P$  des Einheitsgitters  $\gamma$  im  $R^l$ ). Da nun die Gruppenmultiplikation in  $T$  genau die Koordinatenaddition ist, sind die Linkstranslationen innerhalb  $T$  gewöhnliche euklidische Translationen des  $R^l$ , das heißt an jeder Stelle von  $T$  (nicht nur in  $U(e)$ ) ist die Volumenmessung durch das Integral

$$\int dx_1 dx_2 \dots dx_l$$

gegeben.

4. Nun sind wir in der Lage, das Volumen  $v_0$  der gesamten Gruppe  $G$  zu ermitteln. Wir benutzen zu diesem Zweck gerade die Einteilung von  $G$  in Nebengruppen von  $T$ . Genauer gehen wir so vor: Es sei  $\Delta V$  irgend eine kleine meßbare Menge innerhalb der Umgebung  $U(E)$  des Wirkungsraumes  $W$ . Ihr allgemeiner Punkt sei  $X$  und  $x_1, x_{i+1}, \dots, x_n$  seien seine Koordinaten. Dem Punkt  $X$  von  $W$  ordnen wir das Element  $x$  von  $G$  zu mit den Koordinaten

$$x_1 = x_2 = \dots = x_l = 0; \quad x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n .$$

Die Elemente  $x$  bilden eine Menge  $\Delta v$  in  $G$ . Auf sie üben wir die durch die Elemente  $t$  von  $T$  bewirkten Rechtstranslationen aus. Jedes Element  $x$  durchläuft dabei eine Nebengruppe von  $T$ .  $\Delta v$  überstreicht bei diesen Rechtstranslationen eine in Nebengruppen gefaserte Menge  $v$ , deren Volumen offenbar

$$v = \Delta V \int_{(T)} dx_1 \dots dx_i$$

beträgt. Dabei wurde obige Bemerkung über die Volumenmessung auf dem Toroid benutzt. Um nun die ganze Gruppe  $G$  auszufegen, üben wir auf  $v$  noch die Linkstranslationen von  $G$  aus. Sei  $v' = av$  eine solche durch Linkstranslationen aus  $v$  hervorgehende Menge; sie hat nach Definition der Volumenmessung in  $G$  dasselbe Volumen wie  $v$ . Die Menge  $v'$  ist nun auch in Nebengruppen von  $T$  gefasert; diese Nebengruppen — als Punkte von  $W$  aufgefaßt — erfüllen die Menge  $\Delta V' = f_a(\Delta V)$ , welche nach Definition der Volumenmessung in  $W$  dasselbe Maß wie  $\Delta V$  hat. Also ist auch

$$v' = \Delta V' \int_{(T)} dx_1 \dots dx_i .$$

Überstreicht nun  $v'$  die Gruppe  $G$ , so überstreicht  $\Delta V'$  den Wirkungsraum  $W$  und daher ergibt sich für das Volumen von  $G$

$$v_0 = V_0 \int_{(T)} dx_1 \dots dx_i , \quad (60)$$

wobei  $V_0$  das Gesamtvolumen des Wirkungsraumes bedeutet.

5. Etwas schwieriger ist nun die Lösung unserer Hauptaufgabe, nämlich die Berechnung des Integrals einer Klassenfunktion in  $G$ . Wir geben zunächst eine Formel für das Volumenelement an einer Stelle  $s$  von  $G$ , wobei  $s$  ein reguläres Element der Gruppe  $G$  sei<sup>15)</sup>. Nach dem Hauptachsentheorem (§ 1, Nr. 1) gibt es auf dem Toroid  $T$  ein zu  $s$  konjugiertes Element  $t$ , also

$$s = ata^{-1} . \quad (61)$$

Nun konstruieren wir eine Umgebung von  $s$  auf die folgende Weise:  $x$  sei wieder ein Element aus  $U(e)$ , dessen  $l$  erste Koordinaten verschwinden:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_l = 0 .$$

$\tau$  sei ein Element des Toroids in  $U(e)$ . Dann beschreibt

$$s' = (ax)(t\tau)(ax)^{-1}$$

eine Umgebung von  $s$ . Um Volumenberechnungen in  $U(s)$  durchzuführen, müssen wir nach Definition die Linkstranslation  $s^{-1}$  ausüben:

<sup>15)</sup> Vgl. frühere Arbeit § 2, Nr. 1.

$$s^{-1}s' = s^{-1}axt\tau x^{-1}a^{-1},$$

und durch Einsetzen von (61)

$$s^{-1}s' = at^{-1}xt\tau x^{-1}a^{-1}.$$

Für die Volumenberechnung ist es ferner gleichgültig, wenn wir noch den inneren Automorphismus  $a$  ausüben:

$$s'' = a^{-1}(s^{-1}s')a = t^{-1}xt\tau x^{-1} = (t^{-1}xt)(\tau)(x^{-1}). \quad (62)$$

Die drei Klammern rechts sind Elemente in  $U(e)$ , wir berechnen ihre Koordinaten.

Was zunächst  $(t^{-1}xt)$  anbelangt, so müssen wir die Formeln (54) bis (56) anwenden und erhalten

1. bis  $l$ -te Koord. = 0 .

$$\begin{aligned} (l+1)\text{-te Koord.} &= x_{l+1} \cos 2\pi \vartheta_1(t_j) - x_{l+2} \sin 2\pi \vartheta_1(t_j) \\ (l+2)\text{-te Koord.} &= x_{l+1} \sin 2\pi \vartheta_1(t_j) + x_{l+2} \cos 2\pi \vartheta_1(t_j) \\ &\vdots \\ (n-1)\text{-te Koord.} &= x_{n-1} \cos 2\pi \vartheta_m(t_j) - x_n \sin 2\pi \vartheta_m(t_j) \\ n\text{-te Koord.} &= x_{n-1} \sin 2\pi \vartheta_m(t_j) + x_n \cos 2\pi \vartheta_m(t_j). \end{aligned} \quad (63)$$

Dabei bedeuten  $t_1, t_2, \dots, t_l$  die Koordinaten von  $t$ . Die Koordinaten des zweiten Faktors  $\tau$  in (62) bezeichnen wir mit  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l$ ; die Koordinaten des Elements  $x$  im dritten Faktor mit  $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_n$ . Da die Gruppenmultiplikation in erster Approximation die Koordinatenaddition ist, haben wir abgesehen von Gliedern höherer Ordnung für die Koordinaten von  $s''$  in (62)

$$\begin{aligned} 1\text{-te Koord.} &= \tau_1 \\ 2\text{-te Koord.} &= \tau_2 \\ &\vdots \\ l\text{-te Koord.} &= \tau_l \\ (l+1)\text{-te Koord.} &= x_{l+1} (\cos 2\pi \vartheta_1(t_j) - 1) - x_{l+2} \sin 2\pi \vartheta_1(t_j) \\ (l+2)\text{-te Koord.} &= x_{l+1} \sin 2\pi \vartheta_1(t_j) + x_{l+2} (\cos 2\pi \vartheta_1(t_j) - 1) \\ &\vdots \\ (n-1)\text{-te Koord.} &= x_{n-1} (\cos 2\pi \vartheta_m(t_j) - 1) - x_n \sin 2\pi \vartheta_m(t_j) \\ n\text{-te Koord.} &= x_{n-1} \sin 2\pi \vartheta_m(t_j) + x_n (\cos 2\pi \vartheta_m(t_j) - 1). \end{aligned}$$

Durch Bilden der Funktionaldeterminante erhalten wir unser gesuchtes Volumenelement an der Stelle  $s$ :

$$dv_s = \varrho(t_j) d\tau_1 \dots d\tau_l \cdot dx_{l+1} \dots dx_n \quad (64)$$

wobei zur Abkürzung eingeführt wurde

$$\varrho(t_j) = \prod_{k=1}^m (1 - \cos 2\pi \vartheta_k(t_j)) . \quad (65)$$

Ferner ist  $dx_{l+1} \dots dx_n$  nach (59) das Volumenelement an der Stelle  $E$  des Wirkungsraumes  $W$  oder auch das Volumenelement  $dV_A$  an der Stelle  $A = f_a(E)$  von  $W$ . Endlich können wir  $d\tau_1 \dots d\tau_l$  auch als das Volumenelement  $dt_1 \dots dt_l$  des Toroids an der Stelle  $t$  auffassen. Damit erhalten wir die angekündigte Formel für das Volumenelement von  $G$  an der Stelle  $s = ata^{-1}$ :

$$dv_s = \varrho(t_j) dV_A dt_1 \dots dt_l . \quad (66)$$

Zur Integration in  $G$  benutzen wir nun die Einteilung von  $G$  in Klassen konjugierter Elemente. Die Beschränkung auf reguläre Elemente von  $G$  stört dabei nicht, da die singulären Elemente eine Menge vom Maß Null bilden, also bei der Integration keine Rolle spielen. Ferner brauchen wir noch einen Fundamentalbereich der Transformationsgruppe  $\Phi$  von  $T$  (vgl. § 1, Nr. 1), wie er in der früheren Arbeit<sup>16)</sup> konstruiert wurde. Er ist eine Punktmenge in  $T$ . Zu jedem regulären Element von  $G$  gibt es dann im Inneren  $K$  dieses Fundamentalbereiches genau ein Konjugiertes.

Jetzt konstruieren wir eine Abbildung des topologischen Produkts  $K \times W$  in die Gruppe  $G$  hinein. Es sei also  $t$  ein Element von  $K$  und  $A$  ein Punkt von  $W$ . Es ist also  $A$  eine Nebengruppe  $aT$  von  $T$ . Dann ordnen wir dem Paar  $(t, A)$  das Element  $s = ata^{-1}$  von  $G$  zu. Es ist zunächst zu zeigen, daß  $s$  nicht von der Wahl des Elements  $a$  in der Nebengruppe  $A$  abhängt. Sei also  $a' = at'$  mit  $t'$  in  $T$  ein anderes Element in dieser Nebengruppe. Dann folgt

$$s' = a't(a')^{-1} = a(t'tt'^{-1})a^{-1} = ata^{-1} = s .$$

Dabei wurde benutzt, daß  $T$  eine Abel'sche Gruppe ist.

Bei dieser Abbildung ist die Bildmenge die Menge  $R$  aller regulären Elemente von  $G$ . Wir zeigen nun, daß unsere Abbildung von  $K \times W$  auf  $R$  ein-eindeutig, also topologisch ist. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß  $R$  einfach zusammenhängend ist, denn  $G$  ist einfach zusammen-

---

<sup>16)</sup> § 4, Nr. 6.

hängend und die Entfernung der singulären Elemente vermag an dieser Tatsache nichts zu ändern, da die Menge der singulären Elemente drei Dimensionen weniger hat als  $G$ . Somit genügt es nach dem Monodromieprinzip nachzuweisen, daß unsere Abbildung im Kleinen ein-eindeutig ist. Seien also  $t'$  und  $a'$  benachbart zu  $t, a$  und sei

$$a't'(a')^{-1} = ata^{-1}.$$

$t$  und  $t'$  sind also konjugiert in  $G$  und da beide dem Innern  $K$  des Fundamentalbereichs angehören, folgt  $t' = t$  also

$$\begin{aligned} a't(a')^{-1} &= ata^{-1} \\ (a^{-1}a')t &= t(a^{-1}a'). \end{aligned}$$

$a^{-1}a'$  ist also mit  $t$  vertauschbar, gehört daher dem Normalisator  $N_t$  von  $t$  an. Da  $a^{-1}a'$  beliebig nahe am Einselement  $e$  liegt, muß dieses Element sogar in der zusammenhängenden Komponente  $N'_t$  von  $N_t$  liegen, welche  $e$  enthält. Nun ist aber  $t$  reguläres Element, also stimmt  $N'_t$  mit  $T$  überein<sup>17)</sup> und daher gehören  $a$  und  $a'$  derselben Nebengruppe von  $T$  an, womit alles bewiesen ist.

Vermöge dieser topologischen Abbildung können wir eine Integration über  $G$  auch auffassen als Integration über  $K \times W$ . Hält man in  $K \times W$  das Element von  $K$  fest und variiert den Punkt von  $W$ , so überstreicht der Bildpunkt in  $G$  genau einmal eine Klasse konjugierter Elemente.

Sei nun eine Klassenfunktion  $f(s)$  in  $G$  gegeben. Für ihr Integral erhalten wir nun nach (66)

$$\begin{aligned} \int_{(G)} f(s) dv_s &= \int_{(K \times W)} f(s) dv_s = \int_{(K \times W)} f(t_j) \varrho(t_j) dV_A dt_1 \dots dt_l \\ &= \int_{(K)} f(t_j) \varrho(t_j) \cdot dt_1 \dots dt_l \cdot \int_{(W)} dV_A. \end{aligned}$$

Also, wenn wieder  $V_0$  das Volumen des Wirkungsraumes  $W$  bedeutet

$$\int_{(G)} f(s) dv_s = V_0 \int_{(K)} f(t_j) \varrho(t_j) dt \dots dt_l. \quad (67)$$

Bezeichnen wir die Integrationsvariablen auf dem Toroid wieder mit  $x_1, x_2, \dots, x_l$ , so ergibt sich also

$$\int_{(G)} f(x) dv_x = V_0 \int_{(K)} f(x_j) \varrho(x_j) dx_1 \dots dx_l. \quad (68)$$

---

<sup>17)</sup> Frühere Arbeit § 2, Nr. 1.

6. Nun wollen wir die Volumenmessung in  $G$  etwas abändern, indem wir alle Volumina mit dem universellen Faktor  $N/V_0$  multiplizieren. Dabei sei  $N$  wie früher die Ordnung der Transformationsgruppe  $\Phi$  des Toroids. Wir verzichten darauf, diese Abänderung explizit anzudeuten, schreiben also einfach statt (68)

$$\int_{(G)} f(x) dv_x = N \int_{(K)} f(x_j) \varrho(x_j) dx_1 \dots dx_l. \quad (69)$$

$K$  war Fundamentalbereich von  $\Phi$ ; das Toroid setzt sich aus  $N$  solchen Fundamentalbereichen zusammen und daher haben wir auch

$$\int_{(G)} f(x) dv_x = \int_{(T)} f(x_j) \varrho(x_j) dx_1 \dots dx_l.$$

Endlich führen wir an Stelle der orthogonalen Koordinaten  $x_j$  noch die Koordinaten  $y_j$  ein, welche  $l$  primitive Vektoren des Einheitsgitters  $\gamma$  als Grundvektoren haben. Schreiben wir dann

$$\int_{(G)} f(x) dv_x = \int_{(P)} f(y_j) \varrho(y_j) dy_1 \dots dy_l, \quad (70)$$

(wobei  $P$  das Parallelepiped der Grundvektoren ist), so haben wir die Determinante der  $y_j$  nach den  $x_j$  unterschlagen. Dies ist gleichgültig, da es auch nur die Multiplikation aller Volumina mit einem konstanten Faktor bedeutet. Unter Berücksichtigung von (65) ist damit die Formel (13) von § 1 Nr. 4 hergeleitet.

Nun müssen wir noch diesen Abänderungen in der Formel (60) für das gesamte Volumen Rechnung tragen. Wir erhalten jetzt

$$v_0 = N \int_{(P)} dy_1 \dots dy_l = N,$$

was in § 1 Nr. 4 ganz entscheidend verwendet wurde.

(Eingegangen den 17. August 1944.)