

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 17 (1944-1945)

**Artikel:** Quaternionengeometrie und das Abbildungsproblem der regulären Quaternionenfunktionen.  
**Autor:** Häfeli, Hans  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16334>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Quaternionengeometrie und das Abbildungsproblem der regulären Quaternionenfunktionen

Von HANS HÄFELI, Zürich

## Einleitung

Herr *Rud. Fueter* hat in mehreren Arbeiten<sup>1)</sup> die Theorie der regulären Quaternionenfunktionen entwickelt. Unter einer Quaternionenfunktion versteht man eine stetige Abbildung eines Bereiches  $H$  des vierdimensionalen euklidischen Raumes auf einen Bildbereich  $H^*$ , oder analytisch die Zusammenfassung 4 reeller Funktionen der 4 Komponenten  $x_h$  eines unabhängigen variablen Quaternions  $x = \sum_{(h)} x_h i_h$  zu einem abhängigen variablen Quaternion

$$w = f(x) = \sum_{(h)} u_h(x_0, x_1, x_2, x_3) i_h \quad . \quad h = 0, 1, 2, 3 \quad .$$

Eine Quaternionenfunktion  $w$  wird differenziert, indem man jede Komponente differenziert.

$$w^{(k)} = \frac{\partial w}{\partial x_k} = \sum_{(h)} \frac{\partial u_h}{\partial x_k} i_h = \sum_{(h)} u_h^{(k)} i_h \quad .$$

Man nennt nun eine Quaternionenfunktion rechts- oder linksregulär, wenn die  $u_h$  stetige und stetig differenzierbare Funktionen der  $x_h$  sind, und die partiellen Ableitungen den Bedingungen

$$\sum_{(k)} w^{(k)} i_k = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{(k)} i_k w^{(k)} = 0 \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad .$$

genügen. Diese Regularitätsbedingung hat die Gültigkeit des 1. und 2. Hauptsatzes<sup>2)</sup> zur Folge, und ist eine formale Übertragung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen der gewöhnlichen Funktionentheorie.

---

<sup>1)</sup> *Rud. Fueter*, Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$  und  $\Delta \Delta u = 0$  mit 4 reellen Variablen. *Comm. Math. Helv.*, vol. 7, S. 307 (zitiert als *Fueter I*).

*Rud. Fueter*, Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.*, vol. 8, S. 371 (zitiert als *Fueter II*).

*Rud. Fueter*, Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.*, vol. 9, S. 320 (zitiert als *Fueter III*).

*Rud. Fueter*, Integralsätze für reguläre Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comm. Math. Helv.*, vol. 10, S. 306 (zitiert als *Fueter IV*).

<sup>2)</sup> *R. Fueter*, I S. 312 und S. 318.

In der folgenden Arbeit soll untersucht werden, wie die Regularitätsbedingung die Abbildung auszeichnet, die durch eine reguläre Quaternionenfunktion geleistet wird. In der Funktionentheorie der komplexen Zahlen bedeuten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen Konformität der Abbildung. In der Funktionentheorie der Quaternionen haben die erweiterten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, d. h. die Regularitätsbedingung, zur Folge, daß sich die infinitesimale Abbildung aus drei regulär-konformen Abbildungen additiv zusammensetzt. Diese sind *Spiegelungen* an den imaginären Axen mit darauffolgenden *Drehstreckungen*. Sie können insbesondere durch Spiegelung an der reellen Axe erhalten werden, wobei dann die rechts- oder linksseitige Drehung einen Drehwinkel von  $90^\circ$  besitzt, je nachdem die Funktion rechts- oder linksregulär ist. Mit Berücksichtigung dieser letzten, allerdings starken Einschränkung, kann man sagen: Die Abbildung durch reguläre Quaternionenfunktionen ist im Infinitesimalen uneigentlich oder antikonform, oder sie läßt sich aus drei solchen zusammensetzen.

Die regulären Quaternionenfunktionen sind also geometrisch das Gegenstück zu den nach *F. Ringleb*<sup>3)</sup> analytischen hyperkomplexen Funktionen der Klassen  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  im Körper der Quaternionen. Insbesondere entsprechen den von *H. Nisigaki*<sup>4)</sup> untersuchten Quaternionenfunktionen der Klasse  $C_1$  die regulär-konformen Quaternionenfunktionen, also die regulären Spiegelungen und Umlegungen. Diese sind in unserem Fall allerdings immer ganz linear.

Bevor wir die Abbildung einer Quaternionenfunktion diskutieren können, müssen wir untersuchen, wie sich der Quaternionenkalkül ins Geometrische übertragen läßt. Um die entsprechenden Bewegungen im euklidischen vierdimensionalen Raum zu verstehen, geben wir in einem ersten Abschnitt eine kurze Darstellung der analogen Bewegungen im elliptischen dreidimensionalen Raum. Dabei halten wir uns im wesentlichen an die Gedankengänge von *F. Klein*<sup>5)</sup>, nur daß wir die Cliffordschen Schiebungen direkt durch Einführung von Biquaternionen herleiten (nach *E. Study* spezielle duale Zahlen), und nicht auf dem Umweg über die komplexen Zahlen. Nach der Übertragung auf den vierdimensionalen euklidischen Raum ist dann die Deutung der regulären Abbildung nicht mehr schwierig, sobald das Differential  $dw$  explizite als Funktion von  $dx$  geschrieben wird.

---

<sup>3)</sup> *F. Ringleb*, Beiträge zur Funktionentheorie in hyperkomplexen Systemen I. Palermo Rendiconti 57 (1933).

<sup>4)</sup> *H. Nisigaki*, Zur Theorie der Quaternionenfunktion. The Tohoku Mathematical Journal, vol. 45 I (1938).

<sup>5)</sup> *F. Klein*, Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Ann. Lpz. 37 (1890).

## 1. Die Bewegungen des elliptischen Raumes

Wir fassen die Komponenten  $a_0, a_1, a_2, a_3$  eines Quaternionen  $a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$  als homogene oder projektive Koordinaten eines Punktes  $A$  in einem dreidimensionalen Raume auf. Dabei sind

$$1, i_1, i_2, i_3 \quad \text{mit} \quad i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1, \\ i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3, \quad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1, \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$$

die Quaternioneneinheiten, und die Komponenten aus dem Körper der reellen Zahlen. Ferner identifizieren wir zwei Quaternionen  $a$  und  $\lambda a$  mit reellem  $\lambda$  als nicht wesentlich verschieden. Dadurch ist jedem Punkt  $A$  des dreidimensionalen Raumes eineindeutig ein Quaternion zugeordnet.

$$a \longleftrightarrow A(a).$$

Was entspricht nun bei dieser Zuordnung den Rechenoperationen der Quaternionen geometrisch?

Da wir *projektive* Geometrie treiben, sind die Operationen erster Stufe nur als Linearverbindung zweier oder dreier Punkte erklärt. Ordnen wir einem variablen Punkt  $X$  ein variables Quaternion  $x$  zu, so erhalten wir in den beiden Fällen die analytische Darstellung der Geraden bzw. der Ebene.

$$x = a + \lambda b \quad x = a + \lambda b + \mu c \quad \lambda, \mu \text{ reelle Parameter} \quad (1)$$

Führen wir dual zu den Punktkoordinaten Ebenenkoordinaten ein, so wird jedem wesentlich verschiedenen Quaternion eineindeutig eine Ebene zugeordnet, und die obigen Gleichungen stellen uns die Gerade, bzw. den Punkt in Ebenenkoordinaten dar.

Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3 && \text{das zu } a \text{ konjugierte Quaternion,} \\ s(a) &= a + \bar{a} = 2 a_0 && \text{die Spur von } a, \\ n(a) &= a \cdot \bar{a} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 && \text{die Norm von } a, \text{ und mit} \\ |a| &= + \sqrt{n(a)} && \text{den Betrag von } a. \end{aligned}$$

Damit finden wir für die Inzidenz eines Punktes  $X$  mit einer Ebene  $U$ :

$$s(\bar{u} \cdot x) = 0.$$

Dies ist nur eine skalare Gleichung, und aus der gewöhnlichen analytischen Geometrie bekannt.

Im Gegensatz dazu gibt es eine Quaternionengleichung, die eine Gerade darstellt. Dabei wollen wir uns auf die Darstellung in Punkt-koordinaten beschränken, wie wir es auch im folgenden immer halten werden. Wir formen (1) um und eliminieren  $\lambda$ .

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} x \bar{b} &= n(a) \bar{b} + \lambda \bar{a} n(b), \\ \bar{b} x \bar{a} &= \bar{b} n(a) + \lambda n(b) \bar{a}, \\ \bar{a} x \bar{b} &= \bar{b} x \bar{a}, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Gerade durch die Punkte} \\ A(a) \text{ und } B(b). \end{array} \quad (2)$$

Die 4 Komponentengleichungen dieser Quaternionengleichung sind die Gleichungen der Projektionen der Geraden auf die Koordinatenebenen.

$$\begin{aligned} (\bar{a} x \bar{b})_0 &= (\bar{b} x \bar{a})_0 (a_2 b_3 - a_3 b_2) x_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_3 = 0, \\ (\bar{a} x \bar{b})_1 &= (\bar{b} x \bar{a})_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) x_0 + (a_3 b_0 - a_0 b_3) x_2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_3 = 0, \\ (\bar{a} x \bar{b})_2 &= (\bar{b} x \bar{a})_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) x_0 + (a_3 b_0 - a_0 b_3) x_1 + (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_3 = 0, \\ (\bar{a} x \bar{b})_3 &= (\bar{b} x \bar{a})_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_0 + (a_2 b_0 - a_0 b_2) x_1 + (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_2 = 0. \end{aligned}$$

Wir erkennen in den Koeffizienten dieser 4 Projektionsgleichungen die 6 *Plückerschen* Linienkoordinaten der Geraden im Raum. In der Folge wurden die Quaternionen öfters zur Darstellung der Liniengeometrie verwendet<sup>6)</sup>.

Mit Formel (2) sind wir zwangsläufig zu Rechenoperationen zweiter Stufe gekommen. Wir wollen ihre geometrische Deutung an Hand der Transformationen  $T_r$  und  $T_l$  durchführen, wobei wir diese als Bewegungen in einem festen Koordinatensystem auffassen.

$$T_r: \begin{array}{l} x' = x a \\ x = x' \bar{a} \end{array} \quad T_l: \begin{array}{l} x' = a x \\ x = \bar{a} x' \end{array} .$$

Zu diesem Zweck betrachten wir die Gerade durch den beliebigen Punkt  $P(b)$  und den dazu speziellen  $Q(ba)$ .

$$\bar{b} \bar{a} x \bar{b} = \bar{b} x \bar{b} \bar{a} \rightarrow \bar{a} \bar{b} x = \bar{b} x \bar{a},$$

darauf  $T_r$  ausgeübt:

$$\bar{a} \bar{b} x' \bar{a} = \bar{b} x' \bar{a} \bar{a} \rightarrow \bar{a} \bar{b} x' = \bar{b} x' \bar{a} .$$

Diese Gerade wird also durch  $T_r$  in sich übergeführt;  $T_r$  erzeugt sie geradezu.  $T_r$  bewegt jeden Punkt des Raumes auf einer Geraden.

<sup>6)</sup> A. Buchheim, The Messenger Math. 12—13 (1883—84).

P. Molenbroek, Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie. Leiden 1893.

Die Gesamtheit dieser  $\infty^2$  Geraden bildet eine lineare Kongruenz, wie wir im folgenden zeigen werden.

Entsprechend erzeugt die Transformation  $T_l$  eine linksgeschraubte lineare Kongruenz. Wir beschränken uns in der Darstellung auf  $T_r$ , da die  $T_l$  entsprechenden Resultate durch Symmetrieüberlegung gewonnen werden können, und in der geometrischen Deutung von selbst wieder auftreten.

Wir fragen nun nach den bei  $T_r$  invarianten Elementen. Gibt es  $P(x)$ , so daß

$$\rho x = xa \tag{3}$$

bei reellem Proportionalitätsfaktor  $\rho$  möglich ist? Aus obiger Gleichung folgt sofort  $x \cdot (\rho - a) = 0$ , d. h.  $x$  und  $\rho - a$  müßten Nullteiler sein. Da die Quaternionenalgebra solche nicht besitzt, ist Gleichung (3) unmöglich. Es gibt keine reellen Punkte, die von  $T_r$  in Ruhe gelassen werden.

Nun führen wir abstrakt *imaginäre* Punkte ein, denen wir die *Biquaternionen*  $z = z_0 + z_1 i_1 + z_2 i_2 + z_3 i_3$  zuordnen, wobei die Komponenten  $z_0, z_1, z_2, z_3$  dem Körper der komplexen Zahlen angehören<sup>7)</sup>.

Dabei soll  $i \cdot i_h = i_h \cdot i$  gelten für  $h = 0, 1, 2, 3$ . Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z_0 - z_1 i_1 - z_2 i_2 - z_3 i_3 && \text{das konjugierte Biquaternion,} \\ \tilde{z} &= \bar{z}_0 + \bar{z}_1 i_1 + \bar{z}_2 i_2 + \bar{z}_3 i_3 && \text{das komplex-konjugierte Biquaternion.} \end{aligned}$$

Unter Norm von  $z$  verstehen wir  $z \cdot \bar{z}$ ; dies ist jetzt in der Regel eine komplexe Zahl.

Jetzt fragen wir nach den Biquaternionen, die den imaginären Fixpunkten von  $T_r$  zugeordnet sind. Die Komponentengleichungen von (3) geben uns ein homogenes Gleichungssystem mit schiefer Matrix. Dieses besitzt nur dann nicht triviale Lösungen, wenn seine Determinante verschwindet. Damit läßt sich  $\rho$  und der Nullteiler  $\rho - a$  bestimmen.

$$\begin{vmatrix} a_0 - \rho & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 - \rho & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 - \rho & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 - \rho \end{vmatrix} = (\rho^2 - 2a_0\rho + n(a))^2 = 0,$$

<sup>7)</sup> E. Study, Amer. J. math. Baltimore 29 (1907).

W. R. Hamilton, Proc. R. Ir. Ac. Dublin 5 (1853).

$$\varrho^2 - 2a_0\varrho + n(a) = 0, \quad \varrho = a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - n(a)},$$

$$\varrho = a_0 \pm i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Die charakteristische Gleichung von  $T_r$  zerfällt in die Ranggleichung des Quaternions  $a$ ;  $\varrho$  ist gleich dem auf eine Einheit reduzierten<sup>8)</sup> Quaternion  $a$ . Damit ist der Nullteiler  $\varrho - a$  gefunden.

$$\varrho - a = \pm i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + a_0 - a, \quad (4)$$

Das Biquaternion  $\varrho - a$  hat rein imaginären Skalar- und reellen Vektorteil; Study führt an dieser Stelle seine dualen Zahlen ein<sup>9)</sup>.

Entsprechend sind die  $z$  der Fixpunkte gebaut. Da  $T_r$  eine Geradenkongruenz in sich überführt, muß es auf jeder ihrer Geraden mindestens einen Fixpunkt geben. Da ihre zugeordneten Biquaternionen immer Nullteiler sind, müssen alle Fixpunkte auf der quadratischen Fläche  $F_2$

$$n(z) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

liegen. Somit gibt es auf jeder Geraden der Kongruenz genau zwei Fixpunkte; diese sind die Treffpunkte der Geraden mit  $F_2$ .

Wir betrachten die Kongruenzgerade durch  $P(b)$ , und suchen ihre Fixpunkte.

$$z = b + \lambda b a, \quad \bar{z} = \bar{b} + \lambda \bar{a} \cdot \bar{b},$$

$$n(z) = \bar{z} \cdot z = n(b) + \lambda(a + \bar{a}) \cdot n(b) + \lambda^2 n(a) \cdot n(b) = 0,$$

$$\lambda^2 n(a) + 2\lambda a_0 + 1 = 0, \quad \lambda = \frac{-a_0 \pm i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{n(a)},$$

$$z = \frac{b a}{n(a)} (\bar{a} + \lambda n(a)) = \frac{b a}{n(a)} (\bar{a} - a_0 \pm i\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}).$$

Den beiden Fixpunkten sind komplex-konjugierte Biquaternionen zugeordnet.

$$z' = \bar{z}''.$$

Wir fassen die beiden zusammen, und schreiben mit Gleichung (4) die Fixpunkte der Kongruenzgeraden durch  $P(b)$  bei  $T_r$ :

<sup>8)</sup> *S. Wachs*, Thèse, Géométrie projective quaternionienne, Bruxelles (1936).

<sup>9)</sup> *E. Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig (1903), S. 222, 595—596. *E. Study*, unter <sup>7)</sup>.

$$z_r = c(\rho - \bar{a}),$$

wobei  $c$  irgend einen Punkt der Kongruenzgeraden bedeutet.

Diese beiden Punkte sind natürlich auch bei der inversen Transformation  $T_r^{-1}: x' = x \cdot \bar{a}$  invariant.

Die Fixpunkte aller Kongruenzgeraden bilden nun die Gesamtheit der bei  $T_r$  invarianten Punkte:

$$z_r = x(\rho - \bar{a}).$$

Diese zerfällt in zwei getrennte komplex-konjugierte Mengen. Da diese auch gegenüber  $T_r^{-1}$  invariant sind, genügen sie den beiden Gleichungen:

$$n(z_r) = 0, \quad z_r \cdot a = z_r \cdot \bar{a}.$$

d. h. sie repräsentieren zwei Geraden auf der nullteiligen Fläche  $F_2$ . Diese beiden Geraden können sich nicht schneiden, da sie hochimaginär sind. Sie gehören einer der beiden erzeugenden Geradenscharen der nullteiligen Fläche an.

Diese beiden bei  $T_r$  punktweise ruhenden Fixgeraden sind die Leitgeraden der durch  $T_r$  erzeugten Linienkongruenz; diese ist also wirklich linear.

Ganz entsprechende Ergebnisse haben wir bei der Transformation  $T_l$ . Wir nennen die Geraden der Geradenschar auf  $F_2$ , welcher die Fixgeraden von  $T_r$  angehören, die „Erzeugenden 1. Art“, und entsprechend die Geraden der andern Schar die „Erzeugenden 2. Art“. Dann sind die

$$\text{invarianten Elemente bei } \left\{ \begin{array}{l} T_r: z_r \cdot a = z_r \cdot \bar{a} \quad 2 \text{ Erzeugende 1. Art} \\ T_l: a \cdot z_l = \bar{a} \cdot z_l \quad 2 \text{ Erzeugende 2. Art} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Die zugehörigen Bewegungen nennen wir Schiebungen, und zwar rechts- und linksseitige Schiebung. Wir überblicken sie damit völlig:

Bei einer Schiebung bewegt sich jeder Punkt des Raumes auf derjenigen Geraden, die man durch ihn legen kann, so daß sie die beiden Fixgeraden trifft.

Die Fixgeraden sind schon durch den Vektorteil von  $a$  bestimmt.  $x' = x \cdot a$  und  $x' = x \cdot (\lambda + a)$  haben somit die selben Erzeugenden. ( $\lambda$  reell.) Der Realteil gibt den Betrag der Schiebung an, während der Vektorteil die Richtung festlegt.

Somit lauten alle rechts- bzw. linksseitigen Schiebungen mit fester Richtung  $a$ :

$$\left. \begin{array}{l} T_r(a) : x' = x(\lambda + a) \\ T_l(a) : x' = (\mu + a)x \end{array} \right\} \lambda, \mu \text{ reelle Parameter .}$$

Dabei sind zwei Schiebungen derselben Art in der Regel nicht vertauschbar.

$$T_r(a) \cdot T_r(b) \neq T_r(b) \cdot T_r(a) .$$

Die allgemeinste Transformation  $T$ , welche  $F_2$  in sich überführt, erhalten wir nun durch Zusammensetzung von  $T_r$  und  $T_l$ ; diese ist vertauschbar:

$$T = T_r(a) \cdot T_l(b) = T_l(b) \cdot T_r(a) : x' = (\mu + b)x(\lambda + a) .$$

Da die nullteilige Fläche  $F_2$  sowohl bei  $T_r$  wie bei  $T_l$  in sich übergeführt wird, so wird sie es auch bei  $T$ . Dabei bleiben nur die 4 Schnittpunkte der festen Erzeugenden von  $T_r$  und  $T_l$  invariant. Diese sind paarweise konjugiert, und können daher je durch eine reelle Gerade verbunden werden. Das sind die beiden einzigen Geraden, welche  $T$  in sich überführt. Wir bezeichnen sie als Axen  $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ , und nennen die zugehörige Bewegung Schraubung. Die beiden Schraubenachsen sind windschiefe, in bezug auf  $F_2$  konjugierte Geraden.

Wir können die Transformation  $T$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der Form  $x' = (\mu + a)x(\lambda + a)$  schreiben. Dabei ist ein spezielles Koordinatentetraeder zugrunde gelegt, so daß eine der Schraubenachsen durch den Eckpunkt  $P(1, 0, 0, 0)$  läuft.

Wie sehen nun diese Schraubenachsen aus? Wir schneiden die Fixgeraden von  $T_r$  mit denen von  $T_l$  (5), und erhalten die Fixpunkte von  $T$ .

$$\begin{array}{ll} \bar{a} \tilde{z}_l = z_r a & \text{Fixpunkte der Axe } \mathfrak{a}_1 . \\ a z_l = z_r a & \text{Fixpunkte der Axe } \mathfrak{a}_2 . \end{array}$$

Da  $z_r = x(\varrho - \bar{a})$  und  $z_l = (\varrho - \bar{a})x$ , so finden wir

$$\begin{array}{l} \bar{a}(\varrho - a)x = x(\varrho - \bar{a})a , \\ a(\varrho - \bar{a})x = x(\varrho - \bar{a})a , \end{array}$$

und damit die Gleichungen der beiden Axen:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{a}_1 : \bar{a}x = xa , \\ \mathfrak{a}_2 : ax = xa . \end{array}$$

Gibt es nun spezielle Transformationen, so daß eine der Axen punktweise festbleibt? Dies ist nur möglich, wenn  $T_l$  die Schiebung der Axenpunkte, welche  $T_r$  bewirkt hat, wieder rückgängig macht. Da der Betrag der Schiebung nur vom Realteil abhängt, muß also gelten:

$$\mu + a_0 = \pm (\lambda + a_0) .$$

Die zugehörigen Bewegungen nennen wir Rotationen. Wir haben 3 Fälle:

$$1. \quad \lambda = \mu, \quad T_{\alpha_1}: x' = (\lambda + a) x (\lambda + a) .$$

Dabei bleibt die Axe  $\alpha_1$  punktweise fest; sie liegt in der Ebene  $x_0 = 0$ . Die Axe  $\alpha_2$  wird in sich verschoben. Wir können die zugehörige Bewegung sowohl als Rotation um die Axe  $\alpha_1$ , wie auch als Translation längs der Axe  $\alpha_2$  auffassen.

$$2. \quad \lambda + \mu = -2 a_0, \quad T_{\alpha_2}: x' = (\lambda + \bar{a}) x (\lambda + a) .$$

Dabei bleibt die Axe  $\alpha_2$  punktweise fest; sie läuft durch die Ecke  $P(1, 0, 0, 0)$ . Jetzt wird die Axe  $\alpha_1$  in sich verschoben, und wir können die Bewegung entsprechend als Rotation um  $\alpha_2$  oder Translation längs  $\alpha_1$  interpretieren.

$$3. \quad \lambda = \mu = a_0 = 0, \quad T_{\alpha_1, \alpha_2}: x' = a x a = \bar{a} x a .$$

Diesmal bleiben beide Axen punktweise fest. Wie wir später zeigen (8), ist die zugehörige Bewegung eine Drehung oder Translation vom Betrage  $\pi$ .

Durch Zusammensetzung von  $T_{\alpha_1}$  und  $T_{\alpha_2}$  kann die allgemeine Translation  $T$  erzeugt werden.

$$T: x' = (\mu + a) x (\lambda + a) = (\kappa + \bar{a}) (\nu + a) x (\nu + a) (\kappa + a) ,$$

$$\mu = \frac{\kappa \nu + 2 a_0 \nu + 1}{\kappa - \nu} ; \quad \lambda = \frac{\kappa \nu - 1}{\kappa + \nu + 2 a_0} .$$

Wir erhalten infolgedessen die allgemeine Schraubenbewegung auf zwei Arten: Entweder als Zusammensetzung einer rechts- und einer linksseitigen Schiebung, oder als Zusammensetzung einer Rotation um die Axe  $\alpha_1$  und einer Rotation um die Axe  $\alpha_2$ .

$$T = T_r T_l = T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} . \tag{6}$$

Wie bewegt sich dabei ein Punkt  $P(c)$ , der nicht auf einer der beiden Schraubenachsen liegt?

$T_r$  bewegt  $P$  auf einer rechtsseitigen Kongruenzlinie, und  $T_l$  jeden ihrer Punkte auf einer linksseitigen Kongruenzlinie. Das ergibt eine einparametrische Schar rechtsseitiger Kongruenzlinien, welche eine Regelfläche bildet. Auf dieser muß es auch eine Schar linksseitiger Kongruenzlinien geben, da bei einer Schraubung die beiden erzeugenden Schiebungen vertauschbar sind. Diese Regelfläche hat die Gleichung:

$$x = (\mu + a) c (\lambda + a) . \quad (7)$$

Diese Fläche kann wegen (6) auch als doppelte Rotationsfläche um die Axen  $a_1$  und  $a_2$  aufgefaßt werden. Für jeden neuen Punkt  $P'(c')$ , der nicht auf einer der Kongruenzlinien von  $P$  liegt, erhalten wir eine neue Regelfläche. Diese einparametrische Flächenschar hat, euklidisch gesehen, die Gestalt von einschaligen Hyperboloiden, welche in der Nähe der einen Axe diese schlauchartig umhüllen, sich dann aufweiten, um über ein elliptisches Paraboloid sich wieder um die andere Axe zu legen.

Um nun die uneigentlichen Transformationen zu finden, welche die nullteilige Fläche  $F_2$  in sich überführen, brauchen wir nur die spezielle uneigentliche Transformation

$$T_u: x' = \bar{x}$$

zu betrachten. Ihr entspricht eine Spiegelung an der Ebene  $x_0 = 0$  oder am Punkte  $P(1, 0, 0, 0)$ . Dabei werden die beiden Erzeugendenscharen der nullteiligen Fläche vertauscht. Durch Zusammensetzung von  $T_u$  mit  $T_r$  und  $T_l$  bekommen wir alle uneigentlichen Transformationen. Diesen entsprechen die Umlegungen und Spiegelungen<sup>9a)</sup>.

Nun wollen wir die nullteilige Fläche  $F_2$  als „*fundamental*“ auszeichnen, und in bezug auf sie im *Klein-Cayleyschen* Sinn eine *Metrik* einführen<sup>10)</sup>. Dabei wird unser Punktraum zum dreidimensionalen elliptischen Raum. Die bisher betrachteten Transformationen führen die Maßfläche in sich über. Ihnen entsprechen jetzt also die starren Bewegungen und Umlegungen. Insbesondere werden wir zeigen, daß bei einer Schiebung jeder Punkt des Raumes um denselben Betrag bewegt wird. Somit haben die Geraden der von  $T_r$  und  $T_l$  erzeugten Kongruenzen, die ja durch Schie-

<sup>9a)</sup> *F. Klein*, Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie, Berlin (1928), S. 113.

<sup>10)</sup> *F. Klein*, Zur Nichteuklidischen Geometrie, Math. Ann. Lpz. 37 (1890).  
*A. Cayley*, The London Edinb. Dublin Phil. Mag. (4) 6 (1853).

bung ineinander übergehen, immer denselben Abstand, obwohl sie windschief sind. Wir bezeichnen sie als Cliffordsche Parallelen 1. Art bzw. 2. Art<sup>11)</sup>. Die durch Schraubung erzeugten Regelflächen (7) nennt man Cliffordsche Flächen. Sie besitzen längs ihrer Erzeugenden eine zweifache Parallelverschiebung in sich selbst, und gleichen somit euklidischen Ebenen; umgekehrt sind sie in doppelter Weise Rotationsflächen, was uns an Kreiszyylinder erinnert. In ihnen kommt die vollständige Dualität der elliptischen Geometrie am schönsten zum Ausdruck.

Bevor wir die Entfernung zweier Punkte definieren können, müssen wir den Begriff des Doppelverhältnisses erklären.

Nach *S. Wachs*<sup>12)</sup> versteht man unter dem Doppelverhältnis der 4 Quaternionen  $a, b, c, d$  den Ausdruck:

$$(abcd) = (a - c)(a - d)^{-1}(b - d)(b - c)^{-1}.$$

Dies ist eine formale Nachbildung des Doppelverhältnisses bei komplexen Zahlen, und läßt sich aus der von *Staudtschen* Definition der harmonischen Punkte bei einem vollständigen Vierseit ableiten. Diese Definition ist wohl gegenüber  $T_r$ , nicht aber gegenüber  $T_l$  invariant.

Wir beschränken uns auf den Spezialfall, daß die 4 Quaternionen auf einer Geraden liegen, da wir ja bei unserer Maßbestimmung immer nur lineare Gebilde verwenden. Dann zeichnen wir zwei Grundpunkte, etwa  $a$  und  $b$ , aus; diese bestimmen die Gerade, und dann folgt für  $c$  und  $d$ :

$$c = a + \lambda_1 b, \quad d = a + \lambda_2 b.$$

Unter dem Doppelverhältnis verstehen wir nun im gewöhnlichen Sinn den Quotienten von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ :

$$(abcd) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (a - c)(a - d)^{-1} = (b - d)(b - c)^{-1}.$$

Dieses Doppelverhältnis ist für reelle Punkte eine reelle Zahl, und in unserm erweiterten Raum also höchstens eine komplexe Zahl. Es bleibt somit gegenüber allen betrachteten Transformationen invariant.

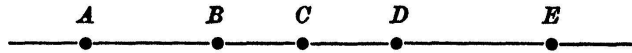
Man sieht sofort, daß sich die so definierten Doppelverhältnisse multiplikativ zusammensetzen.

<sup>11)</sup> *W. K. Clifford*, Proc. London Math. Soc. (1) 4 (1873).

*E. Study*, Nichteuklidische und Liniengeometrie, Jahrb. Dtsch. Math. Ver. 11 (1902).

*W. Vogt*, Synth. Theorie d. Cliff. Parallelen und der linearen Linienörter des elliptischen Raumes, Leipzig (1909).

<sup>12)</sup> siehe bei <sup>8)</sup>.



$$\text{Beh.:} \quad (abce) = (abcd) \cdot (abde) .$$

$$\text{Bew.:} \quad (a-c)(a-e)^{-1} = (a-c)(a-d)^{-1}(a-d)(a-e)^{-1} .$$

Nun definieren wir die Entfernung zweier Punkte  $P(a)$  und  $P(b)$  in bekannter Weise:

$$E(a, b) = \frac{i}{2} \ln(abz'z'') ,$$

wobei wir unter  $z'$  und  $z''$  die Durchstoßpunkte der Geraden durch  $P(a)$  und  $P(b)$  mit der fundamentalen Fläche  $F_2$  verstehen. Die Maßkonstante wählen wir  $\frac{i}{2}$ , um mit der euklidischen Winkelmessung völlige Übereinstimmung zu haben. So werden uns dieselben Ausdrücke, die hier die Entfernungen messen, im euklidischen vierdimensionalen Raum die Winkel darstellen.

Nun wollen wir die Entfernungsfunktion explizite aufstellen. Zur Vereinfachung der Rechnung bestimmen wir die Entfernung des Punktes  $P(a)$  vom speziellen Punkt  $P(1, 0, 0, 0)$ ; der allgemeine Fall wird dann ohne weiteres auf diesen zurückzuführen sein.

$$x = \lambda + a \quad \text{Gerade durch } P(a) \text{ und } P(1, 0, 0, 0) .$$

$$n(x) = \lambda^2 + 2a_0\lambda + n(a) = 0 \quad \text{Schnitt mit } F_2 .$$

$$\lambda_{1,2} = -a_0 \pm i \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

$$(1az'z'') = \frac{-a_0 + i \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{-a_0 - i \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - 2a_0 i \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{n(a)} .$$

$$|(1az'z'')| = \frac{(2a_0^2 - n(a))^2 + 4a_0^2(n(a) - a_0^2)}{n(a)^2} = 1 .$$

Das Doppelverhältnis ist eine komplexe Zahl vom Betrage 1, und somit:

$$(1az'z'') = e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi ,$$

$$\cos \varphi = \frac{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{n(a)} = \frac{a_0^2}{n(a)} - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{n(a)} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} ,$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{a_0}{|a|} , \quad \text{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{a_0} .$$

Nun wird  $E(1a) = \frac{i}{2} \ln(1az'z'') = \frac{i}{2} \ln e^{-i\varphi} = \frac{\varphi}{2}$  .

$$E(1a) = \frac{\varphi}{2} = \arccos \frac{a_0}{|a|} = \arctg \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{a_0} .$$

Da der Punkt  $P(a)$  durch Schiebung aus dem Punkt  $P(1, 0, 0, 0)$  hervorgeht, haben wir mit obiger Formel auch den Betrag der Schiebung gefunden, die der Multiplikation mit  $a$  entspricht. Dieser ist in der Tat nur vom Realteil abhängig. Wir heben der spätern Anwendung wegen speziell hervor:

Ist der Realteil eines Quaternions  $a$  null, so stellt uns  $x' = xa$  oder  $x' = ax$  eine rechts- oder linksseitige Schiebung vom Betrage  $\frac{\pi}{2}$  dar (8).

Nun wollen wir die Entfernung zweier beliebiger Punkte  $P(a)$  und  $P(b)$  berechnen. Diese ist nur vom Doppelverhältnis  $(abz'z'')$  abhängig, und dieses ist unsern Transformationen gegenüber invariant. Wir können also mit  $T_r$  oder  $T_l$  die beiden Punkte starr so verschieben, daß der eine, etwa  $a$ , in den Punkt  $P(1, 0, 0, 0)$  fällt. Damit ist der allgemeine Fall auf unsern Spezialfall zurückgeführt.

$$E(a, b) = E(1, b\bar{a}) = \arccos \frac{(b\bar{a})_0}{|b\bar{a}|} = \arccos \frac{b\bar{a} + a\bar{b}}{2|a||b|} .$$

$$E(a, b) = \arccos \frac{s(a\bar{b})}{2|a||b|} .$$

Um die metrischen Verhältnisse besser zu überblicken, betrachten wir die Kugelschar um den allgemeinen Punkt  $P(a)$ . Wir bezeichnen den Kugelradius mit  $r$ , und verlangen:

$E(a, x) = r$ . Dies ergibt bei variablem  $r$  die Kugelschar um  $P(a)$ .

$$(\bar{a}x + \bar{x}a)^2 = 4n(a)n(x) \cdot \cos^2 r .$$

Die Flächenschar ist gegenüber  $x' = ax\bar{a}$  natürlich invariant, da dies eine Rotation um die Axe  $P(a)P(1, 0, 0, 0)$  bedeutet. Euklidisch gesehen, haben wir eine Schar von Rotationsellipsoiden um diese Axe, die über ein Rotationsparaboloid (wenn die Fläche die Ebene  $x_0 = 0$  berührt) in Rotationshyperboloide übergehen, bis diese die zu  $P(a)$  in bezug auf  $F_2$  polare Ebene doppelt überdecken.

Betrachten wir speziell die Kugelschar um den Punkt  $P(1, 0, 0, 0)$ :  $x_0^2 = n(x) \cdot \cos^2 r$ .

Diese hat dasselbe Aussehen, wie eine euklidische Kugelschar um diesen Punkt. Gehen wir von den homogenen zu affinen Koordinaten über, indem wir die Ebene  $x_0 = 0$  als unendlich fern auszeichnen,

$$\frac{x_1}{x_0} = x ; \quad \frac{x_2}{x_0} = y ; \quad \frac{x_3}{x_0} = z ,$$

so erhalten wir:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\cos^2 r} - 1 = \operatorname{tg}^2 r .$$

Die Transformation  $x' = a x \bar{a}$  stellt also sowohl die Gruppe der elliptischen wie der euklidischen Drehungen um den Punkt  $P(1, 0, 0, 0)$  dar. Die Komponenten von  $a$  sind in letzterem Fall die Eulerschen Parameter der Drehung<sup>13)</sup>.

Diese Darstellung der euklidischen Drehungen um einen festen Punkt wurde direkt zu einer neuen Begründung der Quaternionentheorie verwendet<sup>14)</sup>.

Nun sollten wir in entsprechender Weise die elliptische Winkelmessung analytisch durchführen. Wir dispensieren uns davon, da sich diese nicht von der euklidischen unterscheidet, insbesondere aber, da wir hier keine vollständige Darstellung der dreidimensionalen elliptischen Geometrie geben wollen, und wenden uns nun den Bewegungen im vierdimensionalen euklidischen Raum zu.

## 2. Die Bewegungen im euklidischen vierdimensionalen Raum

Wir denken uns einen dreidimensionalen elliptischen Raum und verbinden diesen mit einem Punkt 0 außerhalb. Dadurch entsteht eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit. In dieser wählen wir als Maßfläche die nullteilige Maßfläche  $F_2$  des elliptischen Raumes. Diese ist in unserer

<sup>13)</sup> *W. R. Hamilton*, Proc. R. Ir. Ac. Dublin (1) 3 (1847).

<sup>13)</sup> *A. Cayley*, The Lond. Edinb. Dublin Phil. Mag. (3) 26 (1845).

<sup>14)</sup> *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels. Math. Ann. Leipzig 39 (1891).

*E. Study*, Die Hauptsätze der Quaternionentheorie. Mitt. naturw. Ver. Neuvorp. 31 (1899—1900).

*W. Fr. Meyer*, Zur Theorie der Drehungen und Quaternionen. Z. Math. Phys. Leipzig 55 (1907).

*Anmerkung*: Die hier zitierte Literatur ist nicht vollständig, und sollte nur die Schriften bezeichnen, in denen sich die betreffenden Darstellungen zum erstenmal finden. Wir verweisen auf den Enzyklopädie-Artikel III A B 11. Systeme geometrischer Analyse, und vor allem auf die französische Ausgabe Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées I 5 Nombres complexes, wo besonders der zahlentheoretische Standpunkt eingenommen wird.

vierdimensionalen Mannigfaltigkeit eine einmal ausgeartete, quadratische, nullteilige Fläche und erzeugt deshalb eine euklidische Metrik. Der dreidimensionale elliptische Raum wird zur unendlich fernen Hyperebene unseres vierdimensionalen euklidischen Raumes. In diesem gibt es durch jeden seiner Punkte einen dreidimensionalen Maßkegel oder Minimalkegel, nämlich die Verbindung des Punktes mit der Maßfläche  $F_2$ . Dieser Minimalkegel ist für ein dreidimensionales Geradenbündel das allgemeinste quadratische Gebilde. Die Geometrie dieses Geradenbündels ist also elliptisch.

Damit haben wir den euklidischen vierdimensionalen Raum eingeführt und ihn gleich zum dreidimensionalen elliptischen in Beziehung gesetzt. Wir können nun ohne weiteres die in letzterem bekannten Bewegungen übertragen. Sie werden uns jetzt die Drehungen und Drehstreckungen um einen festen Punkt ergeben.

Im folgenden wollen wir die Komponenten eines Quaternions  $a$  als Koordinaten eines Punktes  $P(a)$  in einem rechtwinkliggradlinigen Koordinatensystem auffassen. Damit ist jedem Quaternion eineindeutig ein Punkt des vierdimensionalen euklidischen Raumes zugeordnet. Beschränken wir uns wieder auf wesentlich verschiedene Quaternionen, so entspricht diesen die Gesamtheit der Geraden durch den Ursprung. Die Gerade durch  $P(a)$  und den Ursprung  $0$  nennen wir die Radiale  $R(a)$ . Die Geometrie dieser Radialen stimmt mit der im ersten Abschnitt betrachteten elliptischen Punktgeometrie völlig überein.

Wir werden nun die Bewegungen eines Punktes untersuchen, indem wir zuerst die Bewegung seiner Radialen betrachten und erst dann die diskrete Punktbahn ermitteln.

Wir betrachten wiederum die Transformationen  $T_r$  und  $T_l$ , und setzen diese dann zusammen. Wie bewegt die Transformation  $x' = xa$  einen beliebigen Punkt  $P(x)$  des Raumes?

Die Radiale  $R(x)$  wird um den Ursprung um den Winkel  $\varphi = \arccos \frac{a_0}{|a|}$  gedreht und die Entfernung des Punktes  $P(x)$  vom Ursprung  $0$  mit  $|a|$  multipliziert. Die Drehbewegung ist aber nur dann eben, wenn die Schiebung in allen Zwischenlagen dieselbe Richtung besitzt, wenn also das Verhältnis  $a_1 : a_2 : a_3$  konstant bleibt. Betrachten wir  $a$  als variablen Parameter  $a_\nu$ , so muß dieser proportional von 1 nach  $a$  wachsen.

$$a_\nu = 1 + \lambda (a - 1), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (9)$$

Dann bewegt sich  $R(x)$  in einer Ebene. Diese nennen wir rechtsseitige Kongruenzebene durch  $R(x)$ . Sie schneidet den Minimalkegel in zwei

konjugierten Geraden. Die einzelnen Punkte von  $R(x)$  beschreiben bei monoton wachsendem  $\lambda$  ebene Spiralen.

Auf dem Minimalkegel  $n(z) = 0$  liegen eine rechts- und eine links-geschraubte erzeugende Ebenenschar.  $T_r$  führt letztere in sich über, während zwei konjugierte Ebenen der rechtsgeschraubten Schar fest bleiben. Die Ebenenkongruenz durch 0 besteht nun aus sämtlichen Ebenen, die diese beiden imaginären Erzeugenden in zwei Geraden treffen. Damit überblicken wir die  $T_r$  entsprechenden Bewegungen, welche wir wiederum rechtsseitige Schiebungen nennen.

Ist insbesondere  $n(a_v) = 1$ , so behalten die Punkte ihren Abstand vom Ursprung bei. Wir haben dann eine Drehung um den Ursprung, und wenn noch (9) erfüllt ist, Kreisbogen als Bahnkurven.

Entsprechend liefert uns die Transformation  $T_l$  die linksseitigen Schiebungen bzw. Drehungen.

Die rechts- und linksseitigen Drehungen haben jetzt außer der Identität noch die Spiegelung am Ursprung gemeinsam.

$$x' = -x .$$

Diese kann also sowohl durch rechts- wie durch linksseitige Drehung um  $180^\circ$  erzeugt werden.

Durch Zusammensetzung von  $T_r$  und  $T_l$  erhalten wir die allgemeinen Drehstreckungen und Drehungen um 0.

$$x' = a x b . \tag{10}$$

Die linksseitige Ebenenkongruenz durch 0 wird rechtsseitig auf einem Cliffordschen Kegelraum gedreht, und umgekehrt. Die einzelnen Punkte werden dabei mit  $|a||b|$  gestreckt. Die Drehbewegung der einzelnen Ebenen besitzt eine kontinuierlich ändernde Drehaxe; d. h. eine gedrehte Ebene hat mit der ursprünglichen nur den Ursprung gemeinsam. Die Drehung ist immer noch schraubenartig.

Ist  $n(a) = n(b) = 1$ , so stellt uns (10) die Gesamtheit der Drehungen um den Ursprung dar.

In beiden Fällen werden zwei zueinander senkrecht stehende Ebenen (die eine besteht aus sämtlichen Normalen, die man im Ursprung auf die andere errichten kann) in sich übergeführt. Diese beiden Ebenen sind die Axenflächen des Cliffordschen Kegelraumes. In ihnen ist die Bewegung eine ebene Drehung.

Betrachten wir im speziellen die Transformation

$$x' = a x a^{-1} . \tag{11}$$

Hier bleibt die eine Axenfläche punktweise fest, während die andere um den doppelten Betrag gedreht wird. Die invariante Ebene geht durch den Punkt  $P(a)$  und die  $x_0$ -Axe. Die zugehörige Bewegung nennen wir eine Rotation im engeren Sinn. Jede Drehung kann durch zwei spezielle Rotationen ersetzt werden. Gleichung (11) stellt uns bei freiem  $a$  die Gesamtheit der Drehungen um die  $x_0$ -Axe dar.

Betrachten wir nun die allgemeine lineare Transformation, so haben wir folgende Einteilung:

$$\begin{aligned} x' &= a x b & n(a)n(b) = 1 & \text{starre Transformation um } 0, \\ x' &= a x b + c & & \text{Ähnlichkeitstransformation,} \\ x' &= (a x + b)(c x + d)^{-1} & & \text{konforme Transformation}^{15}). \end{aligned}$$

Dabei achtet man bei den entsprechenden Bewegungen nur auf Anfangs- und Endlage.

Die uneigentlichen Transformationen erhalten wir, indem wir die eigentlichen mit der speziellen uneigentlichen Transformation  $x' = \bar{x}$  zusammensetzen.

So erhalten wir die Spiegelungen und uneigentlichen Bewegungen. Insbesondere läßt sich auch die Spiegelung an der  $x_j$ -Axe so zusammensetzen.

$$\begin{aligned} x' &= \bar{x} & \text{Spiegelung an der } x_0\text{-Axe} & \\ x' &= i_j \bar{x} i_j, \quad j = 1, 2, 3. & \text{Spiegelung an der } x_j\text{-Axe} & \end{aligned} \tag{12}$$

Diese läßt sich also durch eine Spiegelung an der  $x_0$ -Axe und darauf folgender beidseitiger Rotation längs der  $x_0 x_j$ -Ebene um  $90^\circ$  erzeugen.

Gerade diese Spiegelungen und ihre Zusammensetzungen werden uns im folgenden beschäftigen.

### 3. Die regulären Quaternionenfunktionen und das Differential

Unter einer Quaternionenfunktion  $w$  verstehen wir die Zusammenfassung von vier reellen Funktionen  $u_h$  der Komponenten  $x_0, x_1, x_2, x_3$  eines variablen Quaternions  $x$  zu einem abhängig variablen Quaternion  $w$ .

$$w = \sum_{(h)} u_h(x_0, x_1, x_2, x_3) i_h, \quad h = 0, 1, 2, 3. \tag{16}$$

---

<sup>15)</sup> E. Study, Math. papers Chicago Congress (1893).

Anmerkung: Die im ersten Abschnitt zitierten Arbeiten behandeln in der Regel auch die Bewegungen im vierdimensionalen euklidischen Raum, und wurden deshalb nicht mehr erwähnt.

<sup>16)</sup> R. Fueter, I S. 308.

Von den  $u_h$  verlangen wir weiter, daß sie stetig und stetig partiell differenzierbar sind.

Dann existieren die 16 partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_k} = u_h^{(k)}, \quad \left. \begin{matrix} h \\ k \end{matrix} \right\} = 0, 1, 2, 3 .$$

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf die Funktionen, deren Wronskische Funktionaldeterminante nicht identisch verschwindet.

$$|u_h^{(k)}| \neq 0 .$$

Solche Funktionen bezeichnet man vom Range 4.

Es sei  $H$  ein endliches Gebiet des vierdimensionalen, euklidischen Raumes, in welchem die  $u_h$  definiert sind und den obigen Bedingungen entsprechen. Dann bildet jede Funktion vom Range 4 das Gebiet  $H$  topologisch auf ein Bildgebiet  $H^*$  ab.

Eine Quaternionenfunktion wird differenziert, indem man jede Komponente differenziert.

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = w^{(k)} = \sum_{(h)} u_h^{(k)} i_h .$$

Damit erhalten wir das Differential

$$dw = \sum_{(k)} w^{(k)} dx_k .$$

Der Zuwachs der Funktion ist von der Fortschreitungsrichtung abhängig. Die Abbildung ist im Infinitesimalen zentro-affin.

Nun definiert man nach R. Fueter<sup>17)</sup> reguläre Quaternionenfunktionen, indem man verlangt, daß die  $u_h^{(k)}$  gewisse lineare partielle Differentialgleichungen erfüllen. Diese sind formale Übertragungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und zerfallen wegen der Nichtkommutativität der Quaternionen in zwei Systeme.

Regularitätsbedingung:

$$\sum_{(k)} w^{(k)} i_k = 0, \quad (13) \quad \sum_{(k)} i_k w^{(k)} = 0, \quad k = 0 \dots 3 . \quad (14)$$

Diejenigen Funktionen, welche die Gleichungen (13) erfüllen, nennt man rechtsreguläre Quaternionenfunktionen; diejenigen, welche die Gleichungen (14) erfüllen, linksreguläre.

Ist eine Funktion sowohl rechts- wie linksregulär, so nennt man sie zweiseitig-regulär.

---

<sup>17)</sup> R. Fueter, I S. 310.

Durch die Regularitätsbedingung werden die Funktionen eingeschränkt. Kennt man 3 partielle Ableitungen in einem Punkt, so ist damit die 4. bestimmt. Das Differential ist spezialisiert.

$$dw = - \sum_{k=1}^3 w^{(k)} i_k dx_0 + w^{(1)} dx_1 + w^{(2)} dx_2 + w^{(3)} dx_3 .$$

Die zentro-affine Abbildung ist eine spezielle. Ist diese geometrisch ausgezeichnet, und besteht ein Zusammenhang mit den konformen Abbildungen? Letzteres läßt sich vermuten, da die Regularitätsbedingung in die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen entarten kann.

Wir packen diese Fragen an, indem wir zunächst untersuchen, unter welchen Bedingungen die durch eine reguläre Quaternionenfunktion vermittelte Abbildung im Infinitesimalen konform wird.

#### 4. Die infinitesimal konforme Abbildung

Wir betrachten im Definitionsbereich einer regulären Quaternionenfunktion  $W = F(X)$  einen festen Punkt  $P$ . In diesem sind die partiellen Ableitungen  $W^{(k)}$  konstant, und wir schreiben:

$$W^{(0)} = D ; \quad W^{(1)} = A ; \quad W^{(2)} = B ; \quad W^{(3)} = C .$$

Die infinitesimale Umgebung des Punktes  $P$  wird linear abgebildet.

$$dW = D dX_0 + A dX_1 + B dX_2 + C dX_3 .$$

Durch die Regularitätsbedingung wird diese lineare Transformation eingeschränkt. Wir begnügen uns mit der Darstellung der rechtsregulären Funktionen. Die entsprechenden Resultate für linksreguläre werden wir durch Symmetrieüberlegungen ohne weiteres erhalten.

Rechtsregularität (13) im Punkte  $P$ :

$$D = - (A i_1 + B i_2 + C i_3) .$$

Damit erhalten wir die spezielle Transformation

$$dW = - (A i_1 + B i_2 + C i_3) dX_0 + A dX_1 + B dX_2 + C dX_3 . \quad (15)$$

Die infinitesimale Abbildung besitzt nur noch 12 freie Parameter und die zugehörige Matrix hat die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} A_1 + B_2 + C_3 & A_0 & B_0 & C_0 \\ -A_0 + B_3 - C_2 & A_1 & B_1 & C_1 \\ -A_3 - B_0 + C_1 & A_2 & B_2 & C_2 \\ A_2 - B_1 - C_0 & A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Nun fragen wir nach den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit die Abbildung konform wird. Diese sind genau dieselben, welche die Transformation (15) zur Ähnlichkeitstransformation machen. Dazu aber ist notwendig und hinreichend, daß in der Matrix (16) die Produkte von je zwei Spalten verschwinden und die Quadrate aller Spalten gleich groß sind. Damit erhalten wir 9 Konformitätsbedingungen:

$$s(\bar{A} B) = s(\bar{A} C) = s(\bar{B} C) = 0, \quad (17^a)$$

$$s(i_2 \bar{B} + i_3 \bar{C}) A = s(i_1 \bar{A} + i_3 \bar{C}) B = s(i_1 \bar{A} + i_2 \bar{B}) C = 0, \quad (17^b)$$

$$n(A) = n(B) = n(C) = n(A i_1 + B i_2 + C i_3). \quad (17^c)$$

Da die Matrix (16) durch die Regularitätsbedingung spezialisiert ist, müssen wir untersuchen, ob diese 9 Bedingungen unabhängig und miteinander verträglich sind. Wir werden zeigen, daß bereits die Bedingungen (17<sup>a</sup>) und (17<sup>b</sup>) Konformität vermitteln, und (17<sup>c</sup>) zur Folge haben. Um die Rechnung zu vereinfachen, spalten wir in  $W$  den Linksfaktor  $A$  ab.

$$W = A w, \quad \sum_{(k)} W^{(k)} i_k = A \sum_{(k)} w^{(k)} i_k = 0. \quad (18)$$

Die Funktion  $w$  ist dann immer noch rechtsregulär, und  $w^{(1)} = 1$  in  $P$ . Leistet  $w$  eine konforme Abbildung, so auch  $W$ , da die Multiplikation mit  $A$  eine Drehstreckung bedeutet.

Wir verlangen nun von der Funktion  $w$ , daß ihre Ableitungen im Punkte  $P$  den Bedingungen (17<sup>a</sup>) und (17<sup>b</sup>) genügen. Diese vereinfachen sich folgendermaßen, wobei wir die entsprechenden Ableitungen mit kleinen Buchstaben bezeichnen:

$$\begin{aligned} b_0 = c_0 = b_0 c_0 + b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0, \\ b_2 + c_3 &= 0, \\ b_0 c_3 - b_1 - b_1 c_2 + b_2 c_1 - b_3 c_0 &= 0, \\ -b_0 c_2 - b_1 c_3 + b_2 c_0 + b_3 c_1 - c_1 &= 0. \end{aligned}$$

---

<sup>18)</sup> R. Fueter, I S. 312.

Diese 6 Gleichungen verringern die 12 freien Parameter der infinitesimalen Abbildung auf 6, und wegen der speziellen Wahl von  $a$  kann die Transformationsmatrix (16) somit durch 2 Parameter, etwa  $b_1$  und  $b_2$ , dargestellt werden. Wir erhalten:

$$c_1 = \frac{-b_1 b_2}{b_3 - 1}, \quad c_2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 - b_3}{b_3 - 1}, \quad = \frac{1 - b_3 - b_2^2}{b_3 - 1}, \quad c_3 = -b_2.$$

Daraus erfolgt sofort:

$$n(b) = n(c) = n(ai_1 + bi_2 + ci_3) = n(a) = 1.$$

Mit Gleichungen (17<sup>a</sup>) und (17<sup>b</sup>) ist auch (17<sup>c</sup>) erfüllt. Die Regularitätsbedingung ersetzt also 3 Konformitätsbedingungen. Damit erhalten wir die Matrix der konformen Abbildung, welche die reguläre Quaternionenfunktion im Punkte  $P$  leistet.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-b_2^2 + b_1^2 \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} & 0 & b_1 & b_1 b_2 \frac{1 + \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} \\ b_1 b_2 \frac{1 + \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} & 0 & b_2 & \frac{-b_1^2 + b_2^2 \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} \\ -b_1 & 0 & +\sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2} & -b_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Nun fragt es sich, ob die Regularitätsbedingung, die doch aus 4 reellen Bedingungsgleichungen besteht, nicht überhaupt 4 Konformitätsbedingungen äquivalent ist. Dann müßte jede Ähnlichkeitstransformation den Regularitätsbedingungen (13) oder (14) genügen. Das ist nicht der Fall. Um das einzusehen, betrachten wir die lineare Abbildung

$$dw = ddx_0 + a dx_1 + b dx_2 + c dx_3,$$

wobei wir uns wieder auf den Fall  $a = 1$  beschränken.

Die Abbildung soll konform sein. Wegen der speziellen Wahl von  $a$  wird dann die lineare Transformation sogar orthogonal, und ihre zugehörige Matrix lautet:

$$\left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{b_2 c_3 + b_1 \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - c_3^2} \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} & 0 & b_1 & \frac{b_2 \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - c_3^2} - b_1 c_3 \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} \\ \frac{-b_1 c_3 + b_2 \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - c_3^2} \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} & 0 & b_2 & \frac{-b_1 \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - c_3^2} - b_2 c_3 \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} \\ -\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - c_3^2} & 0 & +\sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2} & c_3 \end{array} \right) \quad (19)$$

Die Regularitätsbedingung

$$d = -(a i_1 + b i_2 + c i_3)$$

ist nicht erfüllt.

Verlangen wir aber nur die Gültigkeit einer Komponentengleichung, so sind die andern drei auch sofort erfüllt.

Zum Beispiel:  $d_0 = a_1 + b_2 + c_3 .$

Da  $d_0 = a_1 = 0$  ist, erhalten wir  $c_3 = -b_2$ , womit die orthogonale Matrix in die Matrix (18) der regulären konformen Abbildung übergeht. Diese ist also eine einmal spezialisierte orthogonale Abbildung. Damit ist gezeigt:

Drei der vier Regularitätsgleichungen können durch drei beliebige Orthogonalitätsbedingungen ersetzt werden, während die vierte Regularitätsgleichung die Abbildung spezialisiert.

Was ist die geometrische Bedeutung dieser vierten Regularitätsgleichung, oder wie ist die konforme Abbildung ausgezeichnet, welche die reguläre Funktion  $W = F(X)$  im Punkte  $P$  leistet?

Die Abbildung ist sicher ähnlich, und zwar speziell. Jede ähnliche Abbildung läßt sich aber durch direkte Zusammensetzung einer rechts- und einer linksseitigen Schiebung (10) erzeugen. Damit muß sich  $dW$ , je nachdem die Transformationsdeterminante positiv oder negativ ist, auf eine der folgenden beiden Weisen darstellen lassen.

$$dW = M dX N \quad \text{oder} \quad dW = M d\bar{X} N .$$

Welche dieser Darstellungen ist mit der Regularitätsbedingung verträglich, und wie formuliert sich jetzt die vierte Regularitätsgleichung analytisch?

Aus  $dW = M dX N$  folgt:

$$W^{(k)} = M i_k N \quad \text{und} \quad \sum_{(k)} W^{(k)} i_k = M \sum_{(k)} i_k N i_k = -2 M \bar{N} \quad {}^{19)} .$$

Dieses Produkt kann nur mit  $M$  oder  $N$  verschwinden.

Eine *reguläre konforme* Abbildung ist also immer eine uneigentliche Ähnlichkeitstransformation, d. h. eine Spiegelung an der  $X_0$ -Axe gefolgt von einer Ähnlichkeitstransformation.

Aus  $dW = M d\bar{X} N$  folgt: (20)

$$W^{(k)} = M \bar{i}_k N \quad \text{und} \quad \sum_{(k)} W^{(k)} i_k = M \sum_{(k)} \bar{i}_k N i_k = 4 M N_0 ,$$

entsprechend

$$\sum_{(k)} i_k W^{(k)} = \sum_{(k)} i_k M \bar{i}_k N = 4 M_0 N .$$

Die infinitesimale Abbildung  $dW = M d\bar{X} N$  ist rechtsregulär, wenn der Realteil von  $N$  verschwindet, linksregulär, wenn der Realteil von  $M$  verschwindet. Damit hat die vierte Regularitätsgleichung eine Form gefunden, die sich unmittelbar geometrisch übersetzen läßt.

Wir wollen vorher noch zeigen, daß die 9 Konformitätsgleichungen (17) in dieser Schreibweise enthalten sind, und die Faktoren  $M$  und  $N$  explizite durch die Ableitungen von  $W$  ausdrücken.

$$dW = -(A i_1 + B i_2 + C i_3) dX_0 + A dX_1 + B dX_2 + C dX_3 = M d\bar{X} N .$$

Durch Vergleich der Ableitungen erhalten wir die 4 Quaternionengleichungen

$$\begin{aligned} -A i_1 - B i_2 - C i_3 &= M N , \\ A &= M \bar{i}_1 N , \\ B &= M \bar{i}_2 N , \\ C &= M \bar{i}_3 N . \end{aligned}$$

Von diesen 16 reellen Gleichungen benötigen wir 7 zur Bestimmung der unabhängigen Komponenten von  $M$  und  $N$ , während die andern 9 den Konformitätsgleichungen (17<sup>a</sup>, 17<sup>b</sup>, 17<sup>c</sup>) äquivalent sind.

Durch Rechtsmultiplikation mit  $i_k$  und Addition ergibt sich die bekannte Regularitätsbedingung:

$$\sum_{(k)} M i_k N i_k = 0 \quad \text{d. h.} \quad N_0 = 0 .$$

---

<sup>19)</sup> R. Fueter, I S. 308.

Durch Linksmultiplikation mit  $i_k$  und Addition erhalten wir  $N$  selber bis auf einen Proportionalitätsfaktor:

$$\sum_{(k)} i_k \overline{M i_k} N = 4 M_0 N = i_1 A - A i_1 + i_2 B - B i_2 + i_3 C - C i_3 .$$

$$N = \frac{1}{4 M_0} (i_1 A - A i_1 + i_2 B - B i_2 + i_3 C - C i_3) . \quad (21)$$

Ist  $N$  bekannt, so läßt sich  $M$  aus jeder der 4 Gleichungen berechnen.

$$M = AN^{-1}i_1 = BN^{-1}i_2 = CN^{-1}i_3 = (-Ai_1 - Bi_2 - Ci_3)N^{-1} . \quad (22)$$

Da  $N$  den Faktor  $\frac{1}{M_0}$  besitzt, dürfen wir den Realteil von  $M$  beliebig wählen. Wir brauchen also für  $M$  und  $N$  genau 7 Gleichungen, und somit stellt (22) noch 9 weitere Bedingungsgleichungen für die Ableitungen dar. Diese sind mit den Konformitätsbedingungen (17<sup>a</sup>, 17<sup>b</sup>, 17<sup>c</sup>) identisch.

Es folgt sofort:

$$n(A) = n(B) = n(C) = n(Ai_1 + Bi_2 + Ci_3) .$$

Ferner folgt etwa aus der Gleichung  $AN^{-1}i_1 = BN^{-1}i_2$ :

$$ANi_1 = BNi_2 , \quad \text{weil} \quad N^{-1} = \frac{-N}{n(N)} .$$

Durch Linksmultiplikation mit  $\overline{A}$  und  $\overline{B}$  erhalten wir

$$\overline{B}ANi_1 = n(B)Ni_2 \longrightarrow \overline{B}AN = n(B)Ni_3 ,$$

$$\overline{A}BNi_2 = n(A)Ni_1 \longrightarrow \overline{A}BN = -n(A)Ni_3 ,$$

und somit wegen  $n(A) = n(B)$

$$(\overline{A}B + \overline{B}A)N = 0 , \quad \text{also} \quad s(\overline{A}B) = 0 .$$

Auf entsprechende Weise zeigen wir die Existenz der andern Gleichungen (17<sup>a</sup>) und (17<sup>b</sup>).

Die Umkehrung beweisen wir, indem wir  $M$  und  $N$  aus den Ableitungen, welche den Konformitätsbedingungen genügen, berechnen. Diese Ableitungen kennen wir für den Spezialfall  $\alpha = 1$ . Auf diesen ist die Darstellung (20) aber sofort zurückführbar.

$$dW = A dw = A m d\bar{x} n = M d\bar{x} N .$$

Ist  $m$  und  $n$  bekannt, so ist damit auch  $M$  und  $N$  berechnet.

$$M = A m , \quad N = n .$$

$m$  und  $n$  erhalten wir aus (21) und (22), wenn wir für die Ableitungen die speziellen Werte der regulärkonformen Abbildung (18) einsetzen.

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{4 m_0} (2(b_3 - c_2) i_1 + 2(c_1 - a_3) i_2 + 2(a_2 - b_1) i_3) \\ &= \frac{1}{2 m_0} \left( b_1^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} i_1 + b_1 b_2 \frac{1 + \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} i_2 - b_1 i_3 \right) . \end{aligned}$$

Da wir über den Realteil von  $m$  beliebig verfügen dürfen, wählen wir  $m_0 = \frac{1}{2}$ , und finden somit:

$$\begin{aligned} N = n &= b_1^2 \frac{1 + \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} i_1 + b_1 b_2 \frac{1 + \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} i_2 - b_1 i_3 , \\ n(N) &= 2 b_1^2 \frac{1 + \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{b_1^2 + b_2^2} \quad \text{und} \quad N_0 = 0 . \end{aligned}$$

Setzen wir dieses  $n$  in (22) ein, so sind alle 4 Gleichungen erfüllt. Wir erhalten:

$$m = n^{-1} i_1 = - \frac{n i_1}{n(n)} = \frac{1}{2} + \frac{1 - \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{2 b_1} i_2 + \frac{b_2}{2 b_1} i_3 ,$$

$$n(m) = \frac{1}{n(n)} .$$

Damit ist auch  $M$  gefunden:

$$\begin{aligned} M &= A \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - \sqrt{1 - b_1^2 - b_2^2}}{2 b_1} i_2 + \frac{b_2}{2 b_1} i_3 \right) , \\ n(M) &= \frac{n(A)}{n(N)} . \end{aligned}$$

Damit haben wir folgenden Satz über die konforme Abbildung<sup>20)</sup> durch eine reguläre Quaternionenfunktion bewiesen:

**1. Satz.** *Eine reguläre Quaternionenfunktion  $W = F(X)$  bildet die infinitesimale Umgebung des Punktes  $P$  konform ab, wenn sich das Differential  $dW$  im Punkte  $P$  in der Form*

$$\begin{aligned} dW &= M d\bar{X} N \quad \text{schreiben läßt, dabei ist} \\ N_0 &= 0, \quad \text{wenn } W \text{ rechtsregulär ist,} \\ M_0 &= 0, \quad \text{wenn } W \text{ linksregulär ist, und} \\ M_0 &= N_0 = 0, \quad \text{wenn } W \text{ beidseitig regulär ist.} \end{aligned}$$

Der geometrische Inhalt dieses Satzes ist offensichtlich. Die Abbildung ist eine uneigentliche Drehstreckung, d. h. eine Spiegelung an der reellen Axe, gefolgt von einer Drehstreckung. Diese setzt sich aus einer rechts- und einer linksseitigen Schiebung zusammen. Das Verschwinden des Realteiles von  $M$  oder  $N$  besagt, daß die Drehung der entsprechenden Schiebung einen Drehwinkel von  $90^\circ$  besitzt (8).

Der Satz 1 entsprechende geometrische Satz lautet also:

**2. Satz.** *Bildet eine reguläre Quaternionenfunktion  $W = F(X)$  die infinitesimale Umgebung eines Punktes  $P$  konform ab, so ist die Abbildung eine uneigentliche Drehstreckung; zu dieser gehört eine rechtsseitige Drehung um  $90^\circ$ , wenn  $W$  rechtsregulär ist, eine linksseitige Drehung um  $90^\circ$ , wenn  $W$  linksregulär ist, und eine links- und rechtsseitige Drehung um  $90^\circ$ , wenn  $W$  beidseitig regulär ist.*

Damit überblicken wir die infinitesimal konforme Abbildung völlig, und wenden uns der allgemeinen infinitesimalen Abbildung zu, die durch eine reguläre Quaternionenfunktion geleistet wird.

## 5. Die allgemeine infinitesimale Abbildung

Jede lineare Quaternionenfunktion  $l(x)$  läßt sich in einer der beiden Formen darstellen:

$$l(x) = m_1 x n_1 + m_2 x n_2 + m_3 x n_3 + m_4 x n_4$$

oder

$$l(x) = m_1 \bar{x} n_1 + m_2 \bar{x} n_2 + m_3 \bar{x} n_3 + m_4 \bar{x} n_4 .$$

---

<sup>20)</sup> Da es nur uneigentlich konforme reguläre Abbildungen gibt, und somit eine Verwechslung unmöglich ist, sprechen wir im folgenden schlechthin von konformen Abbildungen.

Dabei dürfen die  $m$  oder die  $n$  beliebig, aber linear unabhängig<sup>21)</sup>, gewählt werden. Die allgemeine lineare Abbildung ist also eine Summe von vier eigentlichen oder uneigentlichen konformen Abbildungen.

Nun stellt sich die Frage, ob die durch eine reguläre Quaternionenfunktion  $W$  vermittelte infinitesimale Abbildung

$$dW = -(Ai_1 + Bi_2 + Ci_3) dX_0 + AdX_1 + BdX_2 + CdX_3$$

immer als Summe von *regulär-konformen* Abbildungen erhalten werden kann. Zu diesem Zweck stellen wir  $dW$ , das uns hier als Funktion der Komponenten von  $dX$  gegeben ist, explizite als Funktion von  $d\bar{X}$  dar. Das ist leicht möglich. Aus

$$dX_0 = \frac{1}{4} \sum_{(j)} \bar{i}_j d\bar{X} i_j \quad ^{22)}$$

folgt für die andern Komponenten

$$dX_k = \frac{1}{4} \sum_{(j)} \bar{i}_j d\bar{X} i_k i_j .$$

Damit erhalten wir  $dW$  als Funktion von  $d\bar{X}$ .

$$dW = \frac{-Bi_3 + Ci_2}{2} d\bar{X} i_1 + \frac{Ai_3 - Ci_1}{2} d\bar{X} i_2 + \frac{-Ai_1 + Bi_2}{2} d\bar{X} i_3 . \quad (23)$$

Jeder dieser Summanden ist für sich schon regulär. Die infinitesimale Abbildung ist in der Tat eine Summe von regulär-konformen Abbildungen, und zwar erhalten wir mit drei Abbildungen schon den allgemeinen Fall. Wir können demnach von den drei konformen Komponenten der Abbildung sprechen; diese selber ist natürlich in der Regel nicht mehr konform. Die konformen Komponenten sind spezielle Abbildungen; sie gehen durch einseitige Schiebung aus den Spiegelungen um die imaginären Axen hervor. Dies sehen wir sofort, wenn wir (23) umformen.

$$dW = \frac{Bi_2 + Ci_3}{2} i_1 d\bar{X} i_1 + \frac{Ai_1 + Ci_3}{2} i_2 d\bar{X} i_2 + \frac{Ai_1 + Bi_2}{2} i_3 d\bar{X} i_3 .$$

Nun ist nach (12)  $x' = i_j x i_j$  eine Spiegelung an der  $x_j$ -Axe. Die infinitesimale Abbildung läßt sich somit aus den drei Spiegelungen um

<sup>21)</sup> W. R. Hamilton, Proc. R. Ir. Ac. Dublin (1) 8 (1864).

<sup>22)</sup> R. Fueter, I S. 308.

die imaginären Axen zusammensetzen. Dabei folgt jeder Spiegelung eine linksseitige Schiebung, wenn die Funktion rechts-regulär ist.

Schreiben wir noch für die Koeffizienten der Komposition

$$\frac{Bi_2 + Ci_3}{2} = R ; \quad \frac{Ai_1 + Ci_3}{2} = S ; \quad \frac{Ai_1 + Bi_2}{2} = T ,$$

so erhalten wir als endgültige Form für das Differential:

$$dW = Ri_1 d\bar{X}i_1 + Si_2 d\bar{X}i_2 + Ti_3 d\bar{X}i_3 .$$

Die Ableitungen  $W^{(k)}$  lassen sich mit  $R$ ,  $S$  und  $T$  sofort berechnen, und genügen natürlich der Regularitätsbedingung.

$$\left. \begin{aligned} W^{(0)} &= -R - S - T , \\ W^{(1)} &= (R - S - T) i_1 , \\ W^{(2)} &= (S - T - R) i_2 , \\ W^{(3)} &= (T - R - S) i_3 . \end{aligned} \right\} \sum W^{(k)} i_k = 0 .$$

Entsprechendes folgt sofort für linksreguläre Funktionen. Diese Darstellung können wir geradezu als neue Formulierung der Regularitätsbedingung ansehen.

**3. Satz.** *Eine Quaternionenfunktion  $W = F(X)$  ist im Punkte  $P$  rechtsregulär, wenn sich daselbst  $dW$  in der Form*

$$dW = Ri_1 d\bar{X}i_1 + Si_2 d\bar{X}i_2 + Ti_3 d\bar{X}i_3$$

*darstellen läßt,*

*linksregulär, wenn sich daselbst  $dW$  in der Form*

$$dW = i_1 d\bar{X}i_1 R + i_2 d\bar{X}i_2 S + i_3 d\bar{X}i_3 T$$

*darstellen läßt, und*

*beidseitigregulär, wenn als weitere Bedingung noch*

$$R_1 = S_2 = T_3 = 0$$

*erfüllt ist.*

Daraus läßt sich die geometrische Kennzeichnung der infinitesimalen Abbildung, welche eine reguläre Quaternionenfunktion im Punkte  $P$  leistet, mühelos ablesen.

Eine infinitesimale Hyperkugel um  $P$  geht in ein infinitesimales Hyperellipsoid über, dessen Axen mit  $R$ ,  $S$  und  $T$  beschränkt sind.

$$|dW| \leq (|R| + |S| + |T|) |d\bar{X}| .$$

Die Abbildung ist linear und setzt sich aus konformen zusammen. Darüber wissen wir:

**4. Satz.** *Jede durch eine reguläre Quaternionenfunktion vermittelte Abbildung der infinitesimalen Umgebung des Punktes  $P$  läßt sich aus drei regulär-konformen Abbildungen additiv zusammensetzen. Diese entstehen aus den drei Spiegelungen an den imaginären Axen durch linksseitige Schiebung, wenn die Funktion rechtsregulär ist, und durch rechtsseitige Schiebung, wenn die Funktion linksregulär ist. Ist die Funktion beidseitig-regulär, so sind die konformen Komponenten auch schon beidseitig regulär.*

Diese allgemeine infinitesimale Abbildung artet offensichtlich in eine konforme aus, wenn zwei ihrer Komponenten verschwinden. Die so erhaltenen konformen Abbildungen besitzen nur 4 Parameter, während die allgemeinsten regulären konformen Abbildungen (20) deren 6 besitzen.

$$dW = M_i d\bar{X}_i N, \quad \text{mit} \quad N_j = 0 \quad \text{oder} \quad M_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Diese können immer aus der Spiegelung an der  $x_0$ -Axe erhalten werden, wobei eine der Schiebungen einen Drehwinkel von  $90^\circ$  besitzt (8).

Die 6 wesentlichen Konformitätsbedingungen lauten jetzt:

$$\begin{aligned} s(\bar{S} R i_1) &= s(\bar{T} R i_1) = 0, \\ s(\bar{R} S i_2) &= s(\bar{T} S i_2) = 0, \\ s(\bar{R} T i_3) &= s(\bar{S} T i_3) = 0. \end{aligned}$$

Nun wenden wir uns abschließend der Frage zu, wann eine reguläre Quaternionenfunktion ein ganzes Gebiet konform abbildet.

## 6. Die konformen regulären Quaternionenfunktionen

Vermittelt eine reguläre Quaternionenfunktion in jedem Punkte ihres Regularitätsbereiches eine konforme Abbildung, so nennen wir die Funktion konform.

Beispiele solcher konformer Funktionen erhalten wir, wenn wir die linearen Funktionen der infinitesimalen konformen Abbildung auf den gesamten Regularitätsbereich ausdehnen. Dabei lassen sich die für die infinitesimale Abbildung geltenden Sätze ohne weiteres übertragen.

$$W = M\bar{X}N, \quad \text{mit} \quad N_0 = 0.$$

Die Funktion ist im ganzen endlichen  $R_4$  regulär. Die Abbildung setzt sich aus einer Spiegelung des Gesamtraumes an der  $x_0$  Axe und darauf folgender links- und rechtsseitiger Schraubung zusammen, wobei letztere einen Drehwinkel von  $90^\circ$  besitzt.

Üben wir nach dieser Abbildung noch eine Translation aus, so wird die Konformität sicher nicht zerstört. Wir behaupten, daß die so entstehenden Abbildungen die allgemeinsten regulär-konformen Abbildungen sind.

$$W = M\bar{X}N + L, \text{ mit } N_0 = 0.$$

Nach einem Satz von Liouville<sup>23)</sup> sind die konformen Abbildungen im  $R^4$  immer Kollineationen, also höchstens gebrochene lineare Funktionen.

$$w = (a\bar{x} + b)(c\bar{x} + d)^{-1}.$$

Die Funktion  $w$  hat für  $\bar{x} = -c^{-1}d$  einen Pol 1. Ordnung. Aus der Reihenentwicklung<sup>24)</sup> der regulären Quaternionenfunktionen folgt aber, daß eine isolierte Singularität mindestens ein Pol 3. Ordnung ist. Somit kann die Funktion  $w$  nicht regulär sein.

Dies sehen wir auch sofort durch Bildung der Ableitungen:

$$w^{(k)} = (a - (a\bar{x} + b)(c\bar{x} + d)^{-1}c) \bar{i}_k (c\bar{x} + d)^{-1}$$

$$\sum_{(k)} w^{(k)} i_k = 2(a - (a\bar{x} + b)(c\bar{x} + d)^{-1}c) \frac{s(c\bar{x}) + 2d_0}{n(c\bar{x} + d)}.$$

$\sum_{(k)} w^{(k)} i_k$  kann nur auf der Hyperebene  $s(cx) = -2d_0$  verschwinden.

Es gibt also kein vierdimensionales Gebiet, in dem  $w$  regulär ist. Die linearen regulären Quaternionenfunktionen sind also immer ganz linear. Daraus folgt für die konformen regulären Quaternionenfunktionen:

**5. Satz.** *Bildet eine reguläre Quaternionenfunktion ein vierdimensionales Gebiet konform ab, so ist die Funktion ganz linear:*

$$W = M\bar{X}N + L, \quad N_0 = 0 \quad \text{oder} \quad M_0 = 0.$$

*Dabei verschwindet der Realteil von  $M$ ,  $N$  oder von beiden, je nachdem die Funktion  $W$  links-, rechts- oder beidseitigregulär ist.*

(Eingegangen den 7. August 1944.)

---

<sup>23)</sup> G. Monges et Hachette, Applications de l'analyse à la géométrie, Nouv. éd. annotée p. Liouville, Paris (1850).

<sup>24)</sup> R. Fueter, III S. 329.