Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Démonstrations de formules de Steiner.
Autor: Kollros, Louis
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15547

Démonstrations de formules de Steiner

Par Louis Kollros, Zurich

A C. Carathéodory, en souvenir de deux semestres passés ensemble à Gœttingue il y a 40 ans, avec mes vives félicitations et mes meilleurs vœux de bonheur et de santé à l'occasion de son 70me anniversaire

1. Introduction. Une conique est déterminée par son centre O et trois tangentes. Soient A, B, C les sommets du triangle formé par les trois tangentes, A', B', C' les milieux des côtés a, b, c opposés à A, B, C; r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, x, y, z les distances du centre O aux droites a, b, c et x', y', z' les distances de O aux côtés du triangle $A'B'C'$. Si la conique *inscrite* au triangle ABC est une *ellipse*, son aire E_i est donnée par la formule:

$$E_i^2 = 4\pi^2 r x' y' z' . \tag{1}$$

L'aire E_c de l'ellipse de même centre O *circonscrite* au triangle ABC est donnée par la formule:

$$E_c^2 = \pi^2 r \frac{x^2 y^2 z^2}{x' y' z'} . \tag{2}$$

Si la conique inscrite ou circonscrite à ABC est une *hyperbole* d'axes $2m$ et $2in$, chaque formule donne l'aire de l'ellipse d'axes $2m$ et $2n$.

A ces deux formules indiquées sans démonstration par Steiner (Oeuvres complètes, t. II, p. 329), on peut en ajouter une troisième donnant l'aire E_p de l'ellipse de centre O dont ABC est un *triangle polaire:*

$$E_p^2 = 2\pi^2 r x y z . \tag{3}$$

Si le centre O est à l'intérieur du triangle polaire, la conique est imaginaire; ses demi-axes étant im et in, la formule donne alors l'aire de l'ellipse réelle dont les demi-axes sont m et n.

On a toujours:

$$E_p^2 = E_i E_c .$$

2. Démonstration par affinité. Si la conique est une *ellipse*, on démontre les trois formules très simplement en les transformant en expressions invariantes par affinité. L'affinité conservant le rapport des aires de deux figures correspondantes, il faut introduire des surfaces dans les formules plutôt que les longueurs x, y, z, x', y', z', r.

Soient $T = abc : 4r$ l'aire du triangle ABC, $t = ax$, $t' = by$, $t'' = cz$ les doubles des aires des triangles OBC, OCA, OAB ; on a alors:

$$ax' = T - t, \qquad by' = T - t', \qquad cz' = T - t''.$$

Les trois formules deviennent ainsi:

$$E_i^2 = \frac{\pi^2 (T-t)(T-t')(T-t'')}{T} \tag{1'}$$

$$E_c^2 = \frac{\pi^2 t^2 t'^2 t''^2}{4T(T-t)(T-t')(T-t'')} \tag{2'}$$

$$E_p^2 = \frac{\pi^2 t t' t''}{2T}. \tag{3'}$$

A cause de l'invariance affine, il suffit de les démontrer respectivement pour le cercle inscrit, le cercle circonscrit et le cercle conjugué à un triangle, ce qui est élémentaire.

Pour le cercle *inscrit* de rayon ϱ, on a (si $a + b + c = 2s$):

$$E_i^2 = \pi^2 \varrho^4 = \frac{\pi^2 (\varrho s - \varrho a)(\varrho s - \varrho b)(\varrho s - \varrho c)}{\varrho s} = \frac{\pi^2 (T-t)(T-t')(T-t'')}{T}.$$

Pour le cercle *circonscrit* de rayon r, on a:

$$T = 2r^2 \sin A \sin B \sin C,$$

$$t = r^2 \sin 2A, \qquad t' = r^2 \sin 2B, \qquad t'' = r^2 \sin 2C,$$

$$T - t = 2r^2 \sin A \cos B \cos C; \quad T - t' = 2r^2 \sin B \cos C \cos A;$$
$$T - t'' = 2r^2 \sin C \cos A \cos B.$$

Pour le cercle *conjugué*, dont le centre est l'orthocentre du triangle ABC et dont le rayon R n'est réel que si l'un des angles est obtus (A, par exemple), on a:

$$t = -R^2 \operatorname{tg} A, \qquad t' = R^2 \operatorname{tg} B, \qquad t'' = R^2 \operatorname{tg} C$$

$$\text{et} \quad 2T = -R^2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

3. Démonstration projective. La démonstration suivante est valable aussi bien pour l'*hyperbole* ou (formule 3) pour la *conique imaginaire* que pour l'ellipse. Elle se base sur le fait que:

„Le carré de l'aire cherchée est le produit des puissances des involutions de points conjugués sur deux diamètres conjugués (faisant entre eux l'angle v) multiplié par $(\pi \sin v)^2$.“

Si la conique de centre O est *circonscrite* au triangle ABC, le diamètre d parallèle à BC est le conjugué de OA'; or OA' coupe AB et AC en deux points X et X' conjugués à la conique; d détermine sur AB et sur la parallèle à OB' menée par A les deux points conjugués Y et Y'; on a alors:

$$E_c^2 = OX \cdot OX' \cdot OY \cdot OY' \, (\pi \sin v)^2 .$$

Or

$$OX : OA' = z : z', \qquad OX' : OA' = y : y', \qquad OA' \sin v = x \, ;$$

donc

$$OX \cdot OX' \sin^2 v = \frac{x^2 yz}{y'z'} \tag{4}$$

et

$$OY \cdot OY' = \frac{ryz}{x'} \tag{5}$$

parce que

$$OY \sin B = z \qquad \text{et} \qquad OY' = \frac{y \cdot r \sin B}{x'} .$$

Le produit des égalités (4) et (5) donne la formule (2).

La formule (3) se démontre de la même manière:

Si ABC est un *triangle polaire* de la conique de centre O, le diamètre OA a pour conjugué le diamètre parallèle à BC; celui-ci coupe AB et la parallèle à OA menée par C en deux points X et $\overline{X}$ conjugués à la conique; d'autre part OA coupe BC au point $\overline{A}$ conjugué de A. On a donc:

$$E_p^2 = OA \cdot O\overline{A} \cdot OX \cdot O\overline{X} \, (\pi \sin v)^2 .$$

Or

$$O\overline{A} \sin v = x \, , \quad OA \cdot OX \cdot \sin v = z \cdot AX \quad \text{et} \quad AX \cdot O\overline{X} = 2ry$$

parce que

$$AX : AB = OA : A\overline{A} = y : O\overline{X} \sin C \quad \text{et que} \quad AB = 2r \sin C .$$

Donc:

$$E_p^2 = \pi^2 \cdot 2rxyz .$$

La formule (1) peut se démontrer aussi par cette méthode.

4. Applications. Parmi les nombreuses applications des formules de Steiner (Oeuvres complètes: t. II, p. 330—337 et 669—682) je citerai seulement les suivantes:

1. Les trois aires E_i, E_c et E_p sont des fonctions du point O ; les courbes de niveau de ces fonctions sont du troisième degré pour $E_i(x'y'z' =$ const.) et pour $E_p(xyz =$ const.) et du sixième degré pour E_c.

2. Si m et n sont les demi-axes d'une conique i inscrite au triangle ABC, m' et n' les demi-axes d'une conique k de même centre O circonscrite à ABC, il y a une infinité de triangles inscrits à k et circonscrits à i ; les quatre grandeurs x, y, z, r varient de l'un à l'autre, mais leur produit est constant:

$$2rxyz = mnm'n' .$$

3. Si *k est un cercle:* $m' = n' = r$, les produits xyz et $x'y'z'$ sont constants pour tous les triangles, puisque $2xyz = mnr$ et $4rx'y'z' = m^2n^2$.

4. Si *i est un cercle:* $m = n = x = y = z$, tous les triangles circonscrits à ce cercle i et inscrits à la conique k ont des cercles circonscrits de même rayon:

$$r = \frac{m'n'}{2m} = \frac{m'+n'}{2} .$$ [1]

Les centres de tous ces cercles sont eux-mêmes sur un cercle de centre O et de rayon d, à cause de la relation d'Euler: $d^2 = r^2 - 2rm = r^2 - m'n'$.

5. Si l'un de ces cercles circonscrits K de rayon r est fixe ainsi que le cercle i de centre O et de rayon m, il y a une infinité de triangles inscrits à K et circonscrits à i ; toutes les ellipses k de centre O circonscrites à ces triangles sont égales; leurs axes ont les mêmes longueurs $2m'$ et $2n'$ puisque $m' + n' = 2r$ et $m'n' = r^2 - d^2$ sont des constantes.

6. Le lieu géométrique des centres de toutes les coniques tangentes à quatre droites a, b, c, d est la droite m joignant les milieux M, M', M'' des trois diagonales du quadrilatère complet formé par ces droites.

Soient α, β, γ, δ les angles de m respectivement avec les côtés a, b, c, d. L'aire d'une conique inscrite au quadrilatère $(abcd)$ est donnée par la formule (1) :

$$E_i^2 = 4\pi^2 r\, x'y'z' ,$$

le centre O étant sur la droite m,

---

[1]) Pour qu'il y ait des triangles circonscrits à une ellipse $i\,(m, n)$ et inscrits à une ellipse coaxiale $k\,(m', n')$, il faut et il suffit que $mn' + nm' = m'n'$.

$$x' = OM \sin\alpha, \qquad y' = OM' \sin\beta, \qquad z' = OM'' \sin\gamma;$$

r est le rayon du cercle circonscrit au triangle (abc).

Mais le premier membre de l'égalité:

$$E_i^2 : 4\pi^2 OM \cdot OM' \cdot OM'' = r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

a la même valeur pour chacun des quatre triangles (abc), (bcd), (cda) et (dab) parce que les points M, M', M'' sont sur les droites joignant les milieux des côtés de chaque triangle.

Si l'on désigne par r', r'', r''' les rayons des cercles circonscrits respectivement à (bcd), (cda), (dab), on aura donc:

$$r' : r'' : r''' : r = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma : \sin\delta .$$

L'aire E_i de la conique inscrite au quadrilatère ($abcd$) est une fonction du seul paramètre fixant la position de son centre O sur la droite m. Cette fonction ne s'annulle que si O est en M, M' ou M''. Il y a une position M_e du centre O pour laquelle l'aire E_i de l'ellipse inscrite est un maximum et une position M_h pour laquelle l'aire E_i relative à l'hyperbole est un extremum. La paire de points M_e, M_h constitue la première polaire du point à l'infini de m par rapport au triple de points M, M', M''; le milieu G de M_eM_h est le centre de gravité des trois points M, M', M'' et la distance $M_eG = e$ est donnée par:

$$6e^2 = \overline{GM}^2 + \overline{GM'}^2 + \overline{GM''}^2 .$$

On a ainsi une construction simple du centre de l'ellipse d'aire maximum inscrite à un quadrilatère.

Remarque. Les 4 cercles circonscrits aux triangles (abc), (bcd), (cda), (dab) se coupent au même point F, foyer de la parabole tangente aux 4 droites a, b, c, d, seul point du plan tel que les pieds des perpendiculaires abaissées de F sur a, b, c, d soient en ligne droite.

C'est le cas particulier (pour $n = 1$) du théorème suivant:

„On donne $2n + 1$ droites dans un plan; le lieu géométrique des points F tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de F sur ces droites soient sur une courbe algébrique d'ordre n ayant en F un point multiple d'ordre $n - 1$ est un cercle. Si on a $2n + 2$ droites, il n'y a qu'un point F (commun à $2n + 2$ cercles) jouissant de cette propriété.“

(Reçu le 1er juin 1943.)