**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 16 (1943-1944)

**Artikel:** Zur Theorie der Strahlklassenkörper der quadratisch reellen Zahlen
**Autor:** Gut, Max
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-15546

# Zur Theorie der Strahlklassenkörper der quadratisch reellen Zahlkörper

Von Max Gut, Zürich

*Herrn Constantin Carathéodory zum siebzigsten Geburtstage gewidmet!*

*Bezeichnungen und Inhaltsangabe.* In dieser Arbeit bedeute $k_0$ den Körper der rationalen Zahlen und $k$ einen quadratisch *reellen* [1]) Zahlkörper, also $k = k_0(\sqrt{m})$, wo $m$ eine von 1 verschiedene quadratfreie natürliche Zahl ist. Unter „*Ideal*" soll immer ein *ganzes* Ideal von $k$ verstanden werden, und außer den (endlichen) Idealen führen wir folgende beiden unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_\infty$ und $\mathfrak{p}'_\infty$ ein: Ist $\nu$ eine beliebige von 0 verschiedene Zahl von $k = k_0(\sqrt{m})$ und $\nu'$ ihre konjugierte, so bedeute

$$\begin{aligned} \nu &\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\infty} &&: \nu \text{ ist positiv,} \\ \nu &\not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\infty} &&: \nu \text{ ist negativ,} \\ \nu &\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}'_\infty} &&: \nu' \text{ ist positiv,} \\ \nu &\not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}'_\infty} &&: \nu' \text{ ist negativ.} \end{aligned}$$

Unter einem *Stammideal* verstehen wir wie in *G. I.* ein (endliches) Ideal, dessen *Norm* eine Primzahl oder eine Primzahlpotenz ist, alle anderen (endlichen) Ideale außer 0 und 1 bezeichnen wir als *zusammengesetzte* Ideale.

Ist dann $\mathfrak{f}$ ein beliebiges vom Nullideal verschiedenes endliches Ideal von $k$, so bedeute $K\{\mathfrak{f}\}$ den Strahlklassenkörper, der zur vollständigen Idealklassengruppe mod. $\mathfrak{f}\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty$ gehört, und $k\{\mathfrak{f}\}$ den maximalen Unterkörper von $K\{\mathfrak{f}\}$, der absolut abelsch ist [2]).

---

[1]) Für quadratisch *imaginäre* Grundkörper $k$ habe ich die entsprechenden Untersuchungen schon durchgeführt in der Arbeit: *Gut, Max*, Zur Theorie der Klassenkörper der Kreiskörper, insbesondere der Strahlklassenkörper der quadratisch imaginären Zahlkörper. Comment. Math. Helvet., vol. 15 (1942/43), pg. 81—119. In der vorliegenden Arbeit wird sie mit *G. I.* zitiert, und die Bezeichnungen sind *mutatis mutandis* natürlich hier die gleichen wie dort.

[2]) In *G. I.* bedeutet im 3. Alinea, pg. 81, der Körper $K\{\mathfrak{f}\}$ natürlich auch den Strahlklassenkörper, der zur vollständigen Idealklassengruppe mod. $\mathfrak{f}$ gehört. Die Bezeichnung „*Führer*" ist an jener Stelle so gebraucht worden, wie sie *Rud. Fueter* in seinen: Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen, 1. Teil (1924), 2. Teil (1927), B. G. Teubner, Berlin und Leipzig, pg. 109 und pg. 263, verwendet, während sonst „*Führer*" in *G. I.* und in der vorliegenden Arbeit natürlich immer die Bedeutung hat, wie dieses Wort bei *Takagi* und *Hasse* gebraucht wird; vgl. *Takagi, Teiji*, Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers, Journal of the College of Science, Imp. Univ. of Tokyo, Bd. 41, Art. 9 (1920), und *Hasse, Helmut*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 35 (1926), pg. 1—55 und Bd. 36 (1927), pg. 233—311.

*In der vorliegenden Arbeit bestimmen wir einerseits $k\{\mathfrak{f}\}$ für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{f}$ und geben anderseits für ein Stammideal $\mathfrak{f}$ einen genauen Überblick über die Struktur der Erweiterung von $K\{1\}$ zu $K\{\mathfrak{f}\}$.*

Wegen der in $k$ enthaltenen unendlichen multiplikativen Einheitengruppe zeigt es sich, daß für viele $K\{\mathfrak{f}\}$ das Ideal $\mathfrak{f}\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty$ nur Erklärungsmodul, aber nicht der Führer ist, so daß insbesondere für Stammideale $\mathfrak{f}$ von der Form $p^w$, bzw. $\mathfrak{p}^w$, beim Aufbau des Körpertums $K\{\mathfrak{f}\}$, falls $w$ von einem geeignet gewählten Werte $w_0$ an unbeschränkt wächst, nie mehr ein *nicht*-absolut abelscher Körper adjungiert wird oder sogar alle diese Körper identisch sind in großem Gegensatze zur Struktur der Strahlklassenkörper der quadratisch imaginären Zahlkörper.

Weil die Einheitengruppe von $k$ uneigentlich diskontinuierlich ist, ist meines Wissens eine *funktionentheoretische* Festlegung der Körper $K\{\mathfrak{f}\}$ bis jetzt noch ausständig. Die vorliegende Arbeit gibt vielleicht eine weitere Anregung zu deren Bestimmung, z. B. durch geeignete Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher.

Der 1. Abschnitt enthält die Bestimmung der Strahlklassenanzahl und einige allgemeine Bemerkungen. Hierauf führen wir die erwähnten Untersuchungen durch für ein *Stammideal* gemäß folgender Übersicht [3]):

$\mathfrak{f}$ *ist ein ungerades* [4]) *Stammideal:*

2. Abschnitt: 1. Hauptfall: $p = \mathfrak{p}, n(\mathfrak{p}) = p^2$.
3. Abschnitt: 2. Hauptfall: $p = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}', \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}', n(\mathfrak{p}) = n(\mathfrak{p}') = p$.
4. Abschnitt: 3. Hauptfall: $p = \mathfrak{p}^2, n(\mathfrak{p}) = p$.

$\mathfrak{f}$ *ist ein gerades Stammideal:*

5. Abschnitt: $m \equiv 3 \pmod{4}$.
6. Abschnitt: $m \equiv \pm 2 \pmod{8}$.
7. Abschnitt: $m \equiv 5 \pmod{8}$.
8. Abschnitt: $m \equiv 1 \pmod{8}$.

Der 9. Abschnitt enthält die Bestimmung von $k\{\mathfrak{f}\}$ für ein beliebiges *zusammengesetztes* Ideal $\mathfrak{f}$ und *zwei bemerkenswerte Sätze über die Struktur von $K\{\mathfrak{f}\}$ für zusammengesetztes* $\mathfrak{f}$.

Für jede natürliche Zahl $m^*$ sei wie in *G. I.* der Körper der $m^*$-ten Einheitswurzel mit $c(m^*) = k_0(e^{\frac{2\pi i}{m^*}})$ bezeichnet.

[3]) Für $\mathfrak{f} = 1$ ist $k\{1\}$ schon bestimmt worden in *G. I.*, pg. 87.

[4]) Wie in *G. I.* nennen wir ein Ideal *ungerade*, wenn es durch keinen Primidealteiler von (2) teilbar ist, *gerade*, wenn es vom Einheitsideal verschieden und nur durch Primidealteiler von (2) teilbar ist.

1. Ist $h$ die Klassenanzahl von $k$ im gewöhnlichen weiteren Sinne, $\varepsilon$ die Grundeinheit von $k$ mit $\varepsilon > 1$ und für ein endliches Ideal $\mathfrak{f}$ der Exponent $G(\mathfrak{f})$ die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\varepsilon^{G(\mathfrak{f})} \equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\, \mathfrak{f}), \tag{1}$$

so ist die Strahlklassenanzahl mod. $\mathfrak{f}\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty$ offenbar:

$$h(\mathfrak{f}\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{4\varphi(\mathfrak{f})}{2G(\mathfrak{f})}\cdot h, \text{ falls } n(\varepsilon) = +1, & \text{oder aber } n(\varepsilon) = -1 \text{ und} \\ & \text{gleichzeitig } G(\mathfrak{f}) \text{ gerade ist} \\ \dfrac{4\varphi(\mathfrak{f})}{4G(\mathfrak{f})}\cdot h, \text{ falls } n(\varepsilon) = -1 & \text{und gleichzeitig } G(\mathfrak{f}) \text{ unge-} \\ & \text{rade ist} \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Bezeichnen wir daher allgemein mit

$$H(\mathfrak{f}) = (K\{\mathfrak{f}\} : K\{1\})$$

den Relativgrad von $K\{\mathfrak{f}\}$ in bezug auf $K\{1\}$, so ergibt sich, da für $\mathfrak{f} = 1$ gemäß (2):

$$h(\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty) = \begin{cases} 2h, & \text{falls } n(\varepsilon) = +1 \text{ ist} \\ h, & \text{falls } n(\varepsilon) = -1 \text{ ist}, \end{cases}$$

für diese Funktion:

$$H(\mathfrak{f}) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\varphi(\mathfrak{f})}{G(\mathfrak{f})} \text{ im allgemeinen,} \\ \dfrac{2\varphi(\mathfrak{f})}{G(\mathfrak{f})}, \text{ falls } n(\varepsilon) = -1 \text{ und gleichzeitig } G(\mathfrak{f}) \text{ gerade ist.} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, bzw. $p$ eine Primzahl, so gibt es, wenn $u$ die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft, immer wieder einen Wert $u$, so daß

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon^{G(\mathfrak{p}^u)} = 1 + \pi_u, \text{ wo } \pi_u \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \mathfrak{p}^u),\ \pi_u \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \mathfrak{p}^{u+1}), \text{ bezw.} \\ \varepsilon^{G(p^u)} = 1 + \pi_u, \text{ wo } \pi_u \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, p^u),\ \pi_u \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, p^{u+1}) \end{array}\right\} \tag{4}$$

ist. Im folgenden bedeute

$$u_1 < u_2 < u_3 < \cdots\cdots, \quad u_1 \geqq 1, \tag{5}$$

die *vollständige* Reihe der natürlichen Zahlen $u$ mit dieser Eigenschaft. Da

$$\varepsilon^{pG(\mathfrak{p}^u)} = 1 + p\pi_u + \cdots + \pi_u^p, \quad \text{bezw.} \quad \varepsilon^{pG(p^u)} = 1 + p\pi_u + \cdots + \pi_u^p,$$

wird für alle $j \geqq 1$:

$$G(\mathfrak{p}^{u_j+1}) = p\,G(\mathfrak{p}^{u_j})\ , \quad \text{bezw.}\quad G(p^{u_j+1}) = p\,G(p^{u_j})\ . \tag{6}$$

Insbesondere sind, was im folgenden bei der Benutzung der Formel (3) zur Bestimmung des Quotienten $H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w)$, bzw. $H(p^{w+1}) : H(p^w)$, $w \geqq 1$, beachtet werden möge, für *ungerades* $\mathfrak{p}$, bzw. *ungerades* $p$ die Größen $G(\mathfrak{p}^w)$, bzw. $G(p^w)$ für $w \geqq 1$ alle von gleicher Parität gemäß (4) und (6).

2. In diesem Abschnitt soll $p$ eine *ungerade* Primzahl sein, für welche in $k = k_0(\sqrt{m})$ die Gleichung $p = \mathfrak{p}$, $n(\mathfrak{p}) = p^2$ gilt. Es ist mithin $p$ zur Diskriminanten von $k$ teilerfremd.

Wie in *G. I.*, pg. 92, ergibt sich:

$$\underline{k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\}\,(c(p^w))\ , \quad w \geqq 1\ .}$$

Der Fall, daß $n(\varepsilon) = -1$ und gleichzeitig $G(\mathfrak{p})$ ungerade ist, kann nicht eintreten, denn aus

$$\varepsilon^{2x+1} \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p})$$

mit ganzem rationalem $x$ würde wegen $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ folgen, daß

$$\varepsilon'^{2x+1} \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p})\ ,$$

also

$$-1 = (\varepsilon\varepsilon')^{2x+1} \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{p})\ ,$$

was einen Widerspruch ergibt.

Gemäß Formel (3) wird daher:

$$H(\mathfrak{p}) = \begin{cases} (p-1)\cdot\dfrac{p+1}{G(\mathfrak{p})}\ , & \text{falls } n(\varepsilon) = +1\ , \\[2ex] (p-1)\cdot\dfrac{2(p+1)}{G(\mathfrak{p})}\ , & \text{falls } n(\varepsilon) = -1\ . \end{cases}$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{\mathfrak{p}\}$ wird mithin der Körper $c(p)$ adjungiert und ein *nicht*-absolut abelscher Körper vom Relativgrade $\dfrac{p+1}{G(\mathfrak{p})}$, bzw. $\dfrac{2(p+1)}{G(\mathfrak{p})}$.

Falls $u_1 > 1$ ist, wird für $1 \leqq w < u_1$ gemäß (3), (4) und (5):

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = p^2\ ,$$

und daher wird beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^w\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ der Körper $c(p^{w+1})$ vom Relativgrade $p$ adjungiert und ein *nicht*-absolut abelscher Körper, der relativ-zyklisch vom Grade $p$ ist.

In jedem Falle ist für $w \geqq u_1 \geqq 1$, weil gemäß (4), (5) und (6) die Gleichungen $u_{j+1} = u_j + 1$, $j \geqq 1$ gelten:

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = p\,,$$

und daher

$$K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} = K\{\mathfrak{p}^w\}(c(p^{w+1}))\,, \quad w \geqq u_1\,,$$

wobei $c(p^{w+1})$ in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^w\}$ den Relativgrad $p$ hat.

**3.** In diesem Abschnitt soll $p$ weiter eine *ungerade* Primzahl bedeuten, für welche in $k$ die Gleichung $p = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, $n(\mathfrak{p}) = n(\mathfrak{p}') = p$ gilt. Es ist mithin $p$ wiederum zur Diskriminanten von $k$ teilerfremd.

Wie in *G. I.*, pg. 91 und pg. 95, ergibt sich

$$k\{\mathfrak{p}^{w_1}\mathfrak{p}'^{w_2}\} = k\{p^w\},\ w = \text{Min.}\,(w_1, w_2)\,,$$

insbesondere also

$$k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\}\,, \quad w \geqq 1\,,$$

und

$$\underline{k\{p^w\} = k\{1\}\ (c(p^w))\,,\ w \geqq 1\,.}$$

Gemäß Formel (3) wird:

$$H(\mathfrak{p}) = \begin{cases} \dfrac{p-1}{G(\mathfrak{p})} & \text{im allgemeinen,} \\[2ex] \dfrac{2(p-1)}{G(\mathfrak{p})}, & \text{falls } n(\varepsilon) = -1 \text{ und gleichzeitig } G(\mathfrak{p}) \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{\mathfrak{p}\}$ wird mithin ein *nicht*-absolut abelscher Körper vom Relativgrade $\dfrac{p-1}{G(\mathfrak{p})}$, bzw. $\dfrac{2(p-1)}{G(\mathfrak{p})}$ adjungiert.

Falls $u_1 > 1$ ist, wird für $1 \leqq w < u_1$:

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = p\,,$$

und daher entsteht $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^w\}$ durch Adjunktion eines relativ-zyklischen Körpers vom Relativgrade $p$, der *nicht*-absolut abelsch ist.

In jedem Falle ist für $w \geqq u_1 \geqq 1$ wegen $u_{j+1} = u_j + 1$, $j \geqq 1$:

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = 1\,,$$

d. h. für $w \geqq u_1$ sind die Strahlklassengruppen mod. $\mathfrak{p}^{w+1}\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty$ alle gleich der Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{p}^{u_1}\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty$, und daher ist

$$K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} = K\{\mathfrak{p}^{u_1}\}\,, \quad w \geqq u_1\,.$$

Ferner wird gemäß der Formel (3), da der Fall, daß $n(\varepsilon) = -1$ und gleichzeitig $G(p)$ ungerade ist, nicht eintreten kann [5]):

$$H(p) = \begin{cases} (p-1)\cdot\dfrac{p-1}{G(p)}\,, & \text{falls } n(\varepsilon) = +1 \text{ ist,} \\[2ex] (p-1)\cdot\dfrac{2(p-1)}{G(p)}\,, & \text{falls } n(\varepsilon) = -1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{p\}$ wird also der Körper $c(p)$ adjungiert und ein *nicht*-absolut abelscher Körper vom Relativgrad $\frac{p-1}{G(p)}$, bzw. $\frac{2(p-1)}{G(p)}$.

Falls $u_1 > 1$ ist, wird für $1 \leqq w < u_1$:

$$H(p^{w+1}) : H(p^w) = p^2\,,$$

und daher wird beim Übergang von $K\{p^w\}$ zu $K\{p^{w+1}\}$ der Körper $c(p^{w+1})$ vom Relativgrade $p$ adjungiert und ein *nicht*-absolut abelscher Körper, der relativ-zyklisch vom Grade $p$ ist.

In jedem Falle ist für $w \geqq u_1 \geqq 1$ wegen $u_{j+1} = u_j + 1$, $j \geqq 1$:

$$H(p^{w+1}) : H(p^w) = p\,,$$

und daher

$$K\{p^{w+1}\} = K\{p^w\}\,(c(p^{w+1}))\,, \quad w \geqq u_1\,,$$

wobei $c(p^{w+1})$ in bezug auf $K\{p^w\}$ den Relativgrad $p$ hat.

Über den Zusammenhang zwischen den Körpern $K\{\mathfrak{p}^w\}$, $K\{\mathfrak{p}'^w\}$ und $K\{p^w\}$, $w \geqq 1$, schalten wir noch folgende Bemerkung ein, die wir für den Beweis der letzten Aussage des 2. Satzes von Abschnitt 9 brauchen.

Zwischen den Größen $G(\mathfrak{p}^w)$, $G(\mathfrak{p}'^w)$ und $G(p^w)$, $w \geqq 1$, besteht, wie man auf Grund der Definition (1) leicht erkennt, folgender Zusammenhang:

Es ist im allgemeinen:

$$G(\mathfrak{p}^w) = G(\mathfrak{p}'^w) = G(p^w)\,;$$

[5]) Beweis wie in Abschnitt 2.

dagegen, falls $n(\varepsilon) = -1$ und gleichzeitig $G(\mathfrak{p}^w)$ ungerade ist:

$$G(\mathfrak{p}'^w) = G(p^w) = 2G(\mathfrak{p}^w)\,,$$

und falls $n(\varepsilon) = -1$ und gleichzeitig $G(\mathfrak{p}'^w)$ ungerade ist:

$$G(\mathfrak{p}^w) = G(p^w) = 2G(\mathfrak{p}'^w)\,.$$

Die vollständige Reihe der Größen $u_j$ in (5) ist mithin weil $p$ ungerade ist, wegen der Gleichungen (6) die gleiche, falls in $\mathfrak{p}^w$ oder $\mathfrak{p}'^w$ oder $p^w$ der Exponent $w$ die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft. Da ferner der Körper $K\{p^w\}$, $w \geqq 1$, sowohl die Körper $K\{\mathfrak{p}^w\}$ und $K\{\mathfrak{p}'^w\}$ als natürlich auch $K\{p^{w-1}\}$ enthält, ergibt sich:

Es wird in jedem Falle:

$$H(p) : H(\mathfrak{p}) = H(p) : H(\mathfrak{p}') = p - 1\,,$$

und zwar entsteht $K\{p\}$ aus $K\{\mathfrak{p}\}$ oder aus $K\{\mathfrak{p}'\}$ durch Adjunktion von $c(p)$, welcher Körper in bezug auf jeden dieser beiden Körper den Relativgrad $p-1$ hat.

Für $1 \leqq w < u_1$ entsteht $K\{p^{w+1}\}$ aus $K\{p^w\}$ durch Adjunktion des Körpers $c(p^{w+1})$ vom Relativgrade $p$ in bezug auf $K\{p^w\}$ und durch beliebige Adjunktion eines der beiden Körper $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ oder $K\{\mathfrak{p}'^{w+1}\}$, von denen ein jeder in bezug auf $K\{p^w\}$ und in bezug auf $K\{p^w\}\,(c(p^{w+1}))$ den Relativgrad $p$ hat.

4. In diesem Abschnitt sei die *ungerade* Primzahl $p$ Teiler der Diskriminanten von $k$, also $p = \mathfrak{p}^2$, $n(\mathfrak{p}) = p$.

Zur Bestimmung des Führers der Erweiterung von $k$ zu $k(c(p^h))$, $h \geqq 1$, hat man 3 Hauptfälle zu betrachten [6]):

1. *Hauptfall:* $p \equiv 1 \pmod 4$ und $m = p = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p$;
2. *Hauptfall:* Es sei $p \neq 3$ und nicht gleichzeitig $p \equiv 1 \pmod 4$ und
$$m = p = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p \text{ (2 Unterfälle!)};$$
3. *Hauptfall:* $p = 3$ (2 Unterfälle!).

[6]) In *G. I.*, pg. 101 bis pg. 103, ist beim 2. Hauptfall im 1. und 2. Unterfall $p \not\equiv 3$ vorauszusetzen, und es ist dann noch der Fall $p = 3$ *gesondert* zu betrachten. Es gibt daher zwei weitere Unterfälle, je nachdem $\mathfrak{p}$ in $k(\sqrt{-3})$ ein Primideal 2. Relativgrades wird oder sich in $k(\sqrt{-3})$ in zwei voneinander verschiedene Primideale vom 1. Relativgrad zerlegt. Die Ordnung von $\mathfrak{G}$ bleibt $n = p^{h-1}(p-1)$, aber die Werte für die $n_j$ und $v_j$ sind die gleichen wie im Schema pg. 103. Das auf pg. 102 angegebene Resultat bleibt auch in diesen beiden Unterfällen erhalten. Im Falle d), pg. 115/116, sind die beiden Unterfälle $p \not\equiv 3$ oder $p = 3$, dann aber $w \geqq 3$ *einerseits*, und $p = 3$, $w = 1$ oder $w = 2$ *anderseits* zu betrachten. Alle angeführten Schlüsse bleiben erhalten.

Analog wie in *G. I.*, pg. 101/103 sieht man dann sofort, daß

$$\underline{k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\}\left(c\left(p^{\left[\frac{w+}{2}\right]}\right)\right)\,, \quad w \geqq 1\ .} \tag{7}$$

Bei der Anwendung der Formel (7) ist zu beachten, daß falls $p = 3$ ist, der Körper $k_0(\sqrt{-3}) = c(3)$ schon in $k\{1\}$ enthalten ist.

Falls $n(\varepsilon) = -1$ ist, muß $G(\mathfrak{p}) = 4$ sein. Denn es gibt, weil $n(\mathfrak{p}) = p$ ist, ein ganzes rationales $a$, so daß

$$\varepsilon \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist, folglich

$$\varepsilon' \equiv a \pmod{\mathfrak{p}},$$

mithin

$$-1 = \varepsilon\varepsilon' \equiv a^2 \pmod{\mathfrak{p}},$$

also

$$\varepsilon^2 \equiv a^2 \equiv -1 \pmod{\mathfrak{p}},$$

und daher

$$\varepsilon^4 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Gemäß Formel (3) wird folglich:

$$H(\mathfrak{p}) = \begin{cases} \dfrac{p-1}{2} \cdot \dfrac{2}{G(\mathfrak{p})}\,, & \text{falls } n(\varepsilon) = +1 \text{ ist}\,, \\[2ex] \dfrac{p-1}{2}\,, & \text{falls } n(\varepsilon) = -1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{\mathfrak{p}\}$ wird also der Körper $c(p)$ adjungiert, der vom Relativgrade $\frac{p-1}{2}$ in bezug auf $K\{1\}$ ist [7]), und, falls $n(\varepsilon) = +1$ und gleichzeitig $G(\mathfrak{p}) = 1$ ist, außerdem ein relativ-quadratischer Zahlkörper, der *nicht*-absolut abelsch ist.

Wegen (7) und

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = p \cdot \frac{G(\mathfrak{p}^w)}{G(\mathfrak{p}^{w+1})}\,, \quad w \geqq 1\,,$$

ergibt sich sofort, daß alle $u_j$ der Reihe (5) *ungerade* sein müssen, und es folgt:

Für alle $w \geqq 1$ entsteht der Körper $K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ durch Adjunktion von $c(p^{w+1})$, welcher Körper in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ den Relativgrad $p$ hat.

[7]) Falls $p = 3$ ist, ist $c(p)$ schon in $K\{1\}$, da es ja in $k\{1\}$ enthalten ist.

Für die weiteren Adjunktionen, *die nur noch* ***nicht*****-absolut** *abelsch sind*, haben wir 3 Unterfälle zu unterscheiden [8]):

*1. Unterfall.*

Ist $u_1 > 1$, so ist für alle $1 \leqq w \leqq \frac{u_1 - 1}{2}$:

$$H(\mathfrak{p}^{2w}) : H(\mathfrak{p}^{2w-1}) = p ,$$

und $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ entsteht aus $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ durch Adjunktion eines relativ-zyklischen Körpers vom Relativgrad $p$. Dagegen ist für alle $w \geqq \frac{u_1 + 1}{2}$:

$$K\{\mathfrak{p}^{2w}\} = K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\} ,$$

da für alle $w \geqq \frac{u_1 + 1}{2}$ die Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{p}^{2w}\mathfrak{p}_\infty\mathfrak{p}'_\infty$ gleich der Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{p}^{2w-1}\mathfrak{p}_\infty\mathfrak{p}'_\infty$ ist.

*2. Unterfall.*

Ist $u_1 = 1$ und $u_2 \geqq 5$, was nur für $p = 3$ eintreten kann, so entsteht für alle $2 \leqq w \leqq \frac{u_2 - 1}{2}$ der Körper $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ durch Adjunktion eines relativ-zyklischen Körpers vom Relativgrad $p$. Dagegen ist für $w = 1$ und alle $w \geqq \frac{u_2 + 1}{2}$:

$$K\{\mathfrak{p}^{2w}\} = K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\} .$$

*3. Unterfall.*

Ist $u_1 = 1$ und $u_2 = 3$, so ist für alle $w \geqq 1$:

$$K\{\mathfrak{p}^{2w}\} = K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\} .$$

**5.** In diesem Abschnitt sei $p = 2$ und $m \equiv 3 \pmod{4}$. Da 2 in der Diskriminanten von $k$ aufgeht, ist $2 = \mathfrak{p}^2$, $n(\mathfrak{p}) = 2$.

---

[8]) Daß alle diese drei Unterfälle auch wirklich auftreten können, sieht man sofort an konkreten Beispielen. Vgl. z. B. die Tabellen am Schlusse des Buches: *J. Sommer*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlkörper, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1907; oder *C. F. Degen*, Canon Pellianus sive Tabula simplicissimam aequationis celebratissimae: $y^2 = ax^2 + 1$ solutionem, pro singulis numeri dati valoribus ab 1 usque ad 1000 in numeris rationalibus iisdemque integris exhibens. Hafniae, apud Gerhardum Bonnierum, 1817.

Wie in *G. I.*, pg. 105/106 ergibt sich, daß

$$\underline{k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\}\left(c\left(2^{\left[\frac{w+2}{2}\right]}\right)\right) \; , \quad w \geqq 1 \, .} \tag{8}$$

Dabei ist aber zu beachten, daß $k_0(\sqrt{-1}) = c(2^2)$ in $k\{1\}$ enthalten ist.

Es ist klar, daß $n(\varepsilon)$ in diesem Falle nicht gleich $-1$ sein kann. Denn aus

$$\varepsilon = x + y\sqrt{m} \; , \quad x, y \text{ ganz rational}$$

folgt

$$\varepsilon\varepsilon' = x^2 - y^2 m \equiv x^2 + y^2 \not\equiv -1 \pmod{4}.$$

Zunächst ist $\varphi(\mathfrak{p}) = 1$ und $G(\mathfrak{p}) = 1$ und daher gemäß (3):

$$K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\} \, .$$

Ferner ist nach jener Formel für $w \geqq 1$ :

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = 2\,\frac{G(\mathfrak{p}^w)}{G(\mathfrak{p}^{w+1})} \; , \quad w \geqq 1 \, .$$

In Verbindung mit Formel (8) und der darauf folgenden Bemerkung ergibt sich hieraus, daß höchstens $u_1 = 1$ sein kann, aber sonst alle $u_j$ gerade sind.

Für alle $w \geqq 2$ entsteht der Körper $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ durch Adjunktion von $c(2^{w+1})$, welcher Körper in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ relativ-quadratisch ist.

Für alle weiteren Adjunktionen, *die nur noch* **nicht**-*absolut abelsch sind,* haben wir wieder 3 Unterfälle zu unterscheiden [9]). Zunächst kann nämlich die Grundeinheit $\varepsilon$ nicht von der Form

$$\varepsilon \equiv \pm 1 + 2\sqrt{m} \pmod{4}$$

sein, denn aus

$$\varepsilon = \pm 1 + 2\sqrt{m} + 4(x + y\sqrt{m}), \; x, \; y \text{ ganz rational,}$$

folgt:

$$1 = \varepsilon\varepsilon' = 1 - 4m \pm 8x - 16ym + 16(x^2 - y^2 m) \, ,$$

also die unmögliche Kongruenz:

$$0 \equiv 4 \pm 8x \pmod{16} \, .$$

---

[9]) Auch hier sieht man wieder sofort an konkreten Beispielen, daß diese drei Unterfälle alle wirklich auftreten können.

Mithin ergeben sich folgende 3 Unterfälle:

*1. Unterfall:* $\varepsilon = 1 + 4(x + y\sqrt{m})$.

Es ist $u_1 \geqq 4$ und daher wird beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^2\}$ und für $1 \leqq w \leqq \frac{u_1}{2} - 1$ beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\}$ je ein relativ-quadratischer Zahlkörper adjungiert, während für $w \geqq \frac{u_1}{2}$:

$$K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\} = K\{\mathfrak{p}^{2w}\},$$

da für $w \geqq \frac{u_1}{2}$ die Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{p}^{2w+1}\mathfrak{p}_\infty\mathfrak{p}'_\infty$ gleich der Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{p}^{2w}\mathfrak{p}_\infty\mathfrak{p}'_\infty$ ist.

*2. Unterfall:* $\varepsilon = 3 + 4(x + y\sqrt{m})$.

Es ist

$$\varepsilon^2 = 9 + 24(x + y\sqrt{m}) + 16(x + y\sqrt{m})^2,$$

und mithin $u_1 = 2$, $u_2 \geqq 6$. Beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^2\}$ und für $2 \leqq w \leqq \frac{u_2}{2} - 1$ beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\}$ wird je ein relativ-quadratischer Zahlkörper adjungiert, während für $w = 1$ und $w \geqq \frac{u_2}{2}$:

$$K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\} = K\{\mathfrak{p}^{2w}\}.$$

*3. Unterfall:* $\varepsilon = \sqrt{m} + 2(x + y\sqrt{m}) = 1 + (\sqrt{m} - 1) + 2(x + y\sqrt{m})$.

Es wird

$$\varepsilon^2 = m + 4\sqrt{m}(x + y\sqrt{m}) + 4(x + y\sqrt{m})^2$$

und

$$\varepsilon^4 = m^2 + 8m\sqrt{m}(x + y\sqrt{m}) + 24m(x + y\sqrt{m})^2 + 32\sqrt{m}(x + y\sqrt{m})^3 + \\ + 16(x + y\sqrt{m})^4.$$

Daher ist $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ und $u_3 \geqq 6$. Für $2 \leqq w \leqq \frac{u_3}{2} - 1$ wird beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\}$ je ein relativ-quadratischer Zahlkörper adjungiert, während

$$K\{\mathfrak{p}^3\} = K\{\mathfrak{p}^2\} = K\{\mathfrak{p}\},$$

und für $w \geqq \frac{u_3}{2}$:

$$K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\} = K\{\mathfrak{p}^{2w}\}.$$

6. In diesem Abschnitt sei $p = 2$ und $m \equiv \pm 2 \pmod{8}$. Da 2 in der Diskriminanten von $k$ aufgeht, ist wiederum $2 = \mathfrak{p}^2$, $n(\mathfrak{p}) = 2$.

Zunächst ist $\varphi(\mathfrak{p}) = 1$ und $G(\mathfrak{p}) = 1$ und daher gemäß (3) wiederum

$$K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\}.$$

Ferner wird $\varphi(\mathfrak{p}^2) = 2$, und zwar werden die beiden zu $\mathfrak{p}^2$ teilerfremden Restklassen festgelegt durch 1 und $1 + \sqrt{m}$, so daß sich für $\varepsilon$ nur die beiden Möglichkeiten ergeben, daß $\varepsilon \equiv 1 \pmod{2}$ und $\varepsilon \equiv 1 + \sqrt{m} \pmod{2}$ ist.

Ist $\varepsilon \equiv 1 \pmod{2}$, also für ganze rationale $x$, $y$:

$$\varepsilon = 1 + 2(x + y\sqrt{m}),$$

so wird

$$\varepsilon\varepsilon' = 1 + 4x + 4(x^2 - y^2 m) \equiv 1 \pmod{4}.$$

In diesem Falle ist mithin $n(\varepsilon) = +1$. Ferner ist $u_1 \geqq 2$ und $G(\mathfrak{p}^2) = 1$.

Ist $\varepsilon \equiv 1 + \sqrt{m} \pmod{2}$, also für ganze rationale $x$, $y$:

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{m} + 2(x + y\sqrt{m}),$$

so wird

$$\varepsilon\varepsilon' = 1 - m + 4(x - ym) + 4(x^2 - y^2 m) \equiv -1 \pmod{4}.$$

In diesem Falle ist mithin $n(\varepsilon) = -1$. Ferner ist $u_1 = 1$ und wegen

$$\varepsilon^2 = 1 + m + 2\sqrt{m} + 4(x + y\sqrt{m})\left((x+1) + (y+1)\sqrt{m}\right) \tag{9}$$

wird $G(\mathfrak{p}^2) = 2$.

Gemäß Formel (3) wird mithin in jedem Falle:

$$H(\mathfrak{p}^2) : H(\mathfrak{p}) = 2.$$

Da $\sqrt{\pm 2}$ in $k\{1\}$ liegt, dagegen *nicht* $\sqrt{-1}$, ergibt sich wie in $G.\,I.$, pg. 108 oben, daß

$$k\{\mathfrak{p}^2\} = k\{1\}\,(c(2^2)) = k\{1\}\,(c(2^3))$$

ist, und daß auf jeden Fall $K\{\mathfrak{p}^2\}$ aus $K\{\mathfrak{p}\}$ entsteht durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$:

$$K\{\mathfrak{p}^2\} = K\{\mathfrak{p}\}\,(\sqrt{-1}).$$

Zur Bestimmung des Führers der Erweiterung von $k$ zu $k(c(2^{h_0}))$, $h_0 \geqq 4$, hat man 3 Fälle zu betrachten:

1. Fall: $m \equiv 8 \pm 2 \pmod{16}$;
2. Fall: $m \equiv \pm 2 \pmod{16}$, $m \neq 2$;
3. Fall: $m = 2$.

Beachtet man, daß im 3. Falle $K\{1\} = k\{1\} = k = k_0(\sqrt{2})$ ist, so ergibt sich wie in *G. I.*, pg. 108/109, daß für $w \geqq 2$:

$$\underline{k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\}\left(c\left(2^{\left[\frac{w+3}{2}\right]}\right)\right), \quad w \geqq 2\,.} \tag{10}$$

Für $w = 1$ ist diese Formel also wesentlich *ungültig*.

Da im Falle $n(\varepsilon) = -1$ der Exponent $G(\mathfrak{p}^2)$ gerade ist, gilt in jedem Falle für $w \geqq 2$ nach (3):

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = 2 \cdot \frac{G(\mathfrak{p}^w)}{G(\mathfrak{p}^{w+1})}\,, \quad w \geqq 2\,. \tag{11}$$

Für alle $w \geqq 2$ entsteht der Körper $K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ durch Adjunktion von $c(2^{w+2})$, welcher Körper in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ relativ-quadratisch ist.

*Alle weiter unten angegebenen Adjunktionen sind nur noch* **nicht**-*absolut abelsch.*

Es sei zunächst $\underline{n(\varepsilon) = +1}$. Da $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ ist, gibt es nur die beiden Möglichkeiten, daß $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^3}$ oder $\varepsilon \equiv -1 \pmod{\mathfrak{p}^3}$ ist.

Sei $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^3}$, also von der Form

$$\underline{\varepsilon = 1 + 2(2x + y\sqrt{m})\,,}$$

wo $x$ und $y$ ganz rational sind.

Es ist $u_1 \geqq 3$ und $G(\mathfrak{p}^3) = 1$, also nach (11):

$$H(\mathfrak{p}^3) : H(\mathfrak{p}^2) = 2\,.$$

Der Körper $K\{\mathfrak{p}^3\}$ entsteht mithin durch Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers aus $K\{\mathfrak{p}^2\}$.

Wegen (10) und (11) ist $u_1$ ungerade.

Falls $u_1 \geqq 5$ ist, entsteht für alle $2 \leqq w \leqq \frac{u_1 - 1}{2}$ der Körper $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ durch Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers.

Dagegen ist in jedem Falle für $w \geqq \frac{u_1 + 1}{2}$ die Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{p}^{2w} \mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty$ gleich der Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{p}^{2w-1} \mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'_\infty$, folglich:

$$K\{\mathfrak{p}^{2w}\} = K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}.$$

Es sei weiter $n(\varepsilon) = +1$, aber $\varepsilon \equiv -1 \pmod{\mathfrak{p}^3}$, also von der Form:

$$\underline{\varepsilon = -1 + 2(2x + y\sqrt{m})},$$

wo $x$ und $y$ ganz rational sind.

Es ist $u_1 = 2$ und $G(\mathfrak{p}^3) = 2$, mithin

$$K\{\mathfrak{p}^3\} = K\{\mathfrak{p}^2\}.$$

Wegen

$$\varepsilon^2 = 1 - 4(2x + y\sqrt{m}) + 4(2x + y\sqrt{m})^2$$

wird $u_2 \geqq 5$, und zwar ist wegen (10) und (11) die Größe $u_2$ ungerade.

Für alle $2 \leqq w \leqq \frac{u_2 - 1}{2}$ entsteht der Körper $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ durch Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers.

Dagegen ist für $w \geqq \frac{u_2 + 1}{2}$:

$$K\{\mathfrak{p}^{2w}\} = K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}.$$

Es sei jetzt

$$\underline{n(\varepsilon) = -1;\ \varepsilon = 1 + \sqrt{m} + 2(x + y\sqrt{m})},$$

wo $x$ und $y$ ganz rational sind.

Wegen (9) ist $u_2 = 2$, also $G(\mathfrak{p}^3) = 4$, mithin wegen (11):

$$K\{\mathfrak{p}^3\} = K\{\mathfrak{p}^2\}.$$

Weiter wird wegen

$$\varepsilon^4 \equiv 1 + 4\sqrt{m} \pmod{8}$$

$u_3 = 5$.

Aus (11) folgt daher sofort, daß der Körper $K\{\mathfrak{p}^4\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^3\}$ durch Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers entsteht. Dagegen ist für alle $w \geqq \frac{u_3 + 1}{2} = 3$:

$$K\{\mathfrak{p}^{2w}\} = K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}.$$

7. In diesem Abschnitt sei $p = 2$ und $m \equiv 5 \pmod{8}$. Es wird $2 = \mathfrak{p}$, $n(\mathfrak{p}) = 2^2$, und die Diskriminante von $k$ ist ungerade.

Wie in *G. I.*, pg. 110/111, ergibt sich, daß für alle $w \geqq 1$:

$$k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\}\,(c(2^w)),\; w \geqq 1\,. \tag{12}$$

Es ist $\varphi(\mathfrak{p}) = 3$ und die Größen $1, \omega = \frac{-1+\sqrt{m}}{2}$ und $\omega' = \frac{-1-\sqrt{m}}{2}$ bilden ein Restsystem der zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden ganzen Zahlen von $k$.

Ist $\varepsilon \equiv 1 \pmod{2}$, also von der Form

$$\varepsilon = x + y\sqrt{m}\;,$$

wo die beiden zueinander teilerfremden ganzen rationalen Zahlen $x$ und $y$ nicht beide ungerade sind, so ist $G(\mathfrak{p}) = 1$, folglich

$$H(\mathfrak{p}) = 3,$$

und $K\{\mathfrak{p}\}$ entsteht aus $K\{1\}$ durch Adjunktion eines relativ-kubischen Körpers, der *nicht*-absolut abelsch ist, da jeder von der Identität verschiedene Automorphismus der Galois-Gruppe von $c(2^{h_0})$, $h_0 \geqq 2$, eine Ordnung hat, die eine Potenz von 2 ist.

Ist $\varepsilon \equiv \omega \pmod{2}$ oder $\varepsilon \equiv \omega' \pmod{2}$, so ist $G(\mathfrak{p}) = 3$, folglich

$$H(\mathfrak{p}) = 1\,,$$

und

$$K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\}\,.$$

Für die höheren Potenzen von $\mathfrak{p}$ sind zwei Unterfälle zu unterscheiden[10]):

*1. Unterfall:* $u_1 \geqq 2$.

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $n(\varepsilon) = +1$ ist. Denn aus

$$\varepsilon^{G(\mathfrak{p})} = 1 + 4\,(x + y\,\omega)\;,\quad x\,,\; y \text{ ganz rational,}$$

folgt

$$\varepsilon'^{G(\mathfrak{p})} = 1 + 4\,(x + y\,\omega')\;,$$

also, da $G(\mathfrak{p})$ ungerade ist:

$$n(\varepsilon) = n(\varepsilon)^{G(\mathfrak{p})} = 1 + 4\,(2x - y) + 16\,(x + y\omega)\,(x + y\omega') \equiv 1 \pmod{4}.$$

[10]) Auch hier sieht man wieder an konkreten Beispielen, daß beide Unterfälle wirklich auftreten können.

Gemäß Formel (3) wird mithin:

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = 4\,\frac{G(\mathfrak{p}^w)}{G(\mathfrak{p}^{w+1})}\ , \quad w \geqq 1\ .$$

Da für $j \geqq 1$ in diesem Falle $u_{j+1} = u_j + 1$ ist, ergibt sich aus (12) unmittelbar:

Für $1 \leqq w < u_1$ entsteht der Körper $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^w\}$ durch Adjunktion von $c(2^{w+1})$, welcher Körper in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^w\}$ relativ-quadratisch ist und Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers, der *nicht*-absolut abelsch ist.

Für alle $w \geqq u_1$ entsteht $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^w\}$ durch Adjunktion von $c(2^{w+1})$ allein, welcher Körper in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^w\}$ relativ-quadratisch ist.

2. *Unterfall* $u_1 = 1$.

Dann ist $G(\mathfrak{p}^2) = 2G(\mathfrak{p})$, also $G(\mathfrak{p}^2)$ gerade.

Falls $n(\varepsilon) = +1$ ist, wird mithin gemäß (3):

$$H(\mathfrak{p}^2) : H(\mathfrak{p}) = 2\,,$$

und $K\{\mathfrak{p}^2\}$ entsteht aus $K\{\mathfrak{p}\}$ durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$.

Falls $n(\varepsilon) = -1$ ist, wird gemäß (3):

$$H(\mathfrak{p}^2) : H(\mathfrak{p}) = 4\,,$$

und $K\{\mathfrak{p}^2\}$ entsteht aus $K\{\mathfrak{p}\}$ durch Adjunktion von $k_0(\sqrt{-1})$, welcher Körper relativ-quadratisch in bezug auf $K\{\mathfrak{p}\}$ ist und Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers, der *nicht*-absolut abelsch ist.

Da $G(\mathfrak{p}^2)$ gerade ist, ist — welches Vorzeichen auch $n(\varepsilon)$ habe — für alle $w \geqq 2$ gemäß (3):

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = 4\cdot\frac{G(\mathfrak{p}^w)}{G(\mathfrak{p}^{w+1})}\ , \quad w \geqq 2\ .$$

Ist mithin $u_2 > 2$, so entsteht für alle $2 \leqq w < u_2$ der Körper $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^w\}$ durch Adjunktion von $c(2^{w+1})$, welcher Körper in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^w\}$ relativ-quadratisch ist und Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers, der *nicht*-absolut abelsch ist.

Für jeden Wert von $u_2$ entsteht $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^w\}$ für alle $w \geqq u_2$ durch Adjunktion von $c(2^{w+1})$ allein, welcher Körper relativ-quadratisch in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^w\}$ ist.

8. In diesem Abschnitt sei $\underline{p = 2}$ und $\underline{m \equiv 1 \text{ (mod. } 8)}$. Es wird $p = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, $n(\mathfrak{p}) = n(\mathfrak{p}') = 2$ und die Diskriminante von $k$ ist weiter ungerade.

Wie in *G. I.*, pg. 91 und pg. 113, ergibt sich

$$k\{\mathfrak{p}^{w_1}\mathfrak{p}'^{w_2}\} = k\{p^w\},\ w = \text{Min.}\,(w_1, w_2)\,,$$

insbesondere also

$$k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\},\ w \geqq 1\,,$$

und

$$\underline{k\{p^w\} = k\{1\}\,(c(2^w))\,,\ w \geqq 1\,.} \tag{13}$$

Sei $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{m}}{2}$, $\omega' = \dfrac{-1-\sqrt{m}}{2}$, also $\omega + \omega' = -1$, $\omega \cdot \omega' = \dfrac{1-m}{4}$, mithin gerade und $\mathfrak{p} = (2, \omega)$; $\mathfrak{p}' = (2, \omega')$.

Da $\varphi(2) = 1$ ist, bilden die Zahlen $1, \omega, \omega', 0$ ein Restsystem mod. 2, von denen nur 1 zu 2 teilerfremd ist. Es muß mithin $\varepsilon$ von der Form sein:

$$\varepsilon = X + Y\sqrt{m}\,,$$

wo die beiden zueinander teilerfremden ganzen rationalen Zahlen $X$ und $Y$ nicht beide ungerade sind.

Aus

$$\varepsilon\varepsilon' = X^2 - Y^2 m \equiv X^2 - Y^2 \text{ (mod. } 8)$$

folgt:

Ist $\underline{n(\varepsilon) = +1}$, so muß $X$ ungerade und $Y$ durch 4 teilbar sein, d. h. $\varepsilon$ für ganze rationale $x$ und $y$ von der Form:

$$\varepsilon = (2x+1) + 4y\sqrt{m} = 1 + 2(x + 2y\sqrt{m})\,. \tag{14}$$

Ist $\underline{n(\varepsilon) = -1}$, so muß $Y$ ungerade und $X$ durch 4 teilbar sein, d. h. $\varepsilon$ von der Form:

$$\varepsilon = 4x + (2y+1)\sqrt{m} = 1 + 2(y + \omega) + 4(x + y\omega)\,. \tag{15}$$

Wir betrachten zuerst die Körper $K\{\mathfrak{p}^w\}$, $w \geqq 1$, die aus $K\{1\}$ *nur durch* ***nicht***-*absolut abelsche Adjunktionen entstehen können.*

Da $\varphi(\mathfrak{p}) = 1$, also auch $G(\mathfrak{p}) = 1$ ist, ist:

$$K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\}\,.$$

Im folgenden sind zwei Unterfälle zu betrachten:

*1. Unterfall:* $u_1 \geqq 2$.

Gemäß Formel (3) wird für $1 \leqq w < u_1$:

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = 2,$$

und daher entsteht für $1 \leqq w < u_1$ der Körper $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^w\}$ durch Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers.

Da $G(\mathfrak{p}^{u_1+1}) = 2$ ist, wird gemäß (3):

$$H(\mathfrak{p}^{u_1+1}) : H(\mathfrak{p}^{u_1}) = 2^{\frac{1-n(\varepsilon)}{2}},$$

so daß, falls $n(\varepsilon) = +1$ ist, $K\{\mathfrak{p}^{u_1+1}\} = K\{\mathfrak{p}^{u_1}\}$ ist, dagegen, falls $n(\varepsilon) = -1$ ist, $K\{\mathfrak{p}^{u_1+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{u_1}\}$ durch Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers entsteht.

Für $w > u_1$ wird gemäß (3):

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = 1,$$

so daß für alle $w > u_1$:

$$K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} = K\{\mathfrak{p}^{u_1+1}\}.$$

*2. Unterfall:* $u_1 = 1$.

Es wird $\varphi(\mathfrak{p}^2) = 2$, $G(\mathfrak{p}^2) = 2$ und daher gemäß (3):

$$H(\mathfrak{p}^2) : H(\mathfrak{p}) = 2^{\frac{1-n(\varepsilon)}{2}}.$$

Falls $n(\varepsilon) = +1$ ist, ist mithin

$$K\{\mathfrak{p}^2\} = K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\}.$$

Falls $n(\varepsilon) = -1$ ist, entsteht $K\{\mathfrak{p}^2\}$ aus $K\{\mathfrak{p}\}$ durch Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers. Für alle mir bekannten Zahlen-Beispiele ist allerdings, falls $n(\varepsilon) = -1$ ist, $u_1 > 1$, dafür dann natürlich gemäß Formel (15) die Größe $u_1 = 1$ für das konjugierte Primideal $\mathfrak{p}'$.

Nach (14) und (15) wird $u_2 \geqq 3$.

Für $2 \leqq w < u_2$ wird:

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = 2,$$

und daher entsteht für $2 \leqq w < u_2$ der Körper $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^w\}$ durch Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers. Endlich ist gemäß (3) für alle $w \geqq u_2$:

$$H(\mathfrak{p}^{w+1}) : H(\mathfrak{p}^w) = 1,$$

also für alle $w \geqq u_2$:

$$K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} = K\{\mathfrak{p}^{u_2}\}.$$

Wir betrachten zum Schlusse die Körper $K\{p^w\}$, $w \geqq 1$.

Da $\varphi(2) = 1$ ist, ist $G(2) = 1$ und folglich

$$K\{p\} = K\{1\}.$$

Gemäß (13) wird beim Übergang von $K\{p^w\}$ zu $K\{p^{w+1}\}$, $w \geqq 1$, jedenfalls *immer* der Körper $c(2^{w+1})$ adjungiert, der in bezug auf $K\{p^w\}$ relativ-quadratisch ist. *Gleichzeitig* wird aber jeweilen noch ein relativ-quadratischer Körper adjungiert werden, der *nicht*-absolut abelsch ist, wenn der Relativgrad gleich 4 ist. Über diese Relativgrade sind zwei Unterfälle zu unterscheiden:

*1. Unterfall:* $u_1 \geqq 2$.

Dieser Fall kann nur eintreten, falls $n(\varepsilon) = +1$ ist. Denn wegen (15) ist, falls $n(\varepsilon) = -1$ ist, $u_1 = 1$. Nach (3) wird für alle $1 \leqq w < u_1$:

$$H(p^{w+1}) : H(p^w) = 4.$$

Dagegen wird für $w \geqq u_1$:

$$H(p^{w+1}) : H(p^w) = 2.$$

*2. Unterfall:* $u_1 = 1$.

Es wird $\varphi(4) = 4$, $G(4) = 2$, und daher gemäß (3):

$$H(p^2) : H(p) = 2^{\frac{3-n(\varepsilon)}{2}}.$$

Aus (14) und (15) ergibt sich, daß $u_2 \geqq 3$ ist. Für $2 \leqq w < u_2$ wird gemäß (3):

$$H(p^{w+1}) : H(p^w) = 4.$$

Für $w \geqq u_2$ ist:

$$H(p^{w+1}) : H(p^w) = 2.$$

Über den Zusammenhang zwischen den Körpern $K\{\mathfrak{p}^w\}$, $K\{\mathfrak{p}'^w\}$ und $K\{p^w\}$, $w > 1$, schalten wir noch folgende Bemerkung ein, die wir für den Beweis der letzten Aussage des 2. Satzes im nächsten Abschnitt brauchen.

Zwischen den Größen $G(\mathfrak{p}^w)$, $G(\mathfrak{p}'^w)$, $G(p^w)$, $w \geqq 1$, besteht, wie man leicht erkennt, folgender Zusammenhang.

Es ist

$$G(\mathfrak{p}) = G(\mathfrak{p}') = G(p) = 1. \tag{16}$$

Für $w > 1$ ist allgemein:

$$G(\mathfrak{p}^w) = G(\mathfrak{p}'^w) = G(p^w)\,, \tag{17}$$

dagegen, falls $n(\varepsilon) = -1$ und gleichzeitig $G(\mathfrak{p}^w)$ ungerade ist:

$$G(\mathfrak{p}'^w) = G(p^w) = 2G(\mathfrak{p}^w),\ w > 1\,, \tag{18}$$

und, falls $n(\varepsilon) = -1$ und gleichzeitig $G(\mathfrak{p}'^w)$ ungerade ist:

$$G(\mathfrak{p}^w) = G(p^w) = 2G(\mathfrak{p}'^w),\ w > 1\,. \tag{19}$$

Wenn in $\mathfrak{p}^w$, bzw. $\mathfrak{p}'^w$, bzw. $p^w$ der Exponent $w$ die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft, sei das allgemeine Glied der Reihe (5) mit $(u_j)_\mathfrak{p}$, bzw. $(u_j)_{\mathfrak{p}'}$, bzw. $(u_j)_p$ bezeichnet.

Falls $n(\varepsilon) = +1$ ist, erkennt man auf Grund der Relationen (16) und (17) sofort, daß für alle $j \geqq 1$:

$$(u_j)_\mathfrak{p} = (u_j)_{\mathfrak{p}'} = (u_j)_p$$

ist, so daß wir diesen gemeinsamen Wert mit $u_j$ bezeichnen können.

Falls $n(\varepsilon) = -1$ ist, so bezeichne die nicht negative ganze rationale Zahl $\xi$ den Exponenten der Potenz von 2, die in der Zahl $x$ der Formel (15) aufgeht. Betrachtet man dann einerseits die Potenzen, in denen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ in den Idealen $(\varepsilon - 1)$ und $(\varepsilon^2 - 1)$ aufgehen [11], wo $\varepsilon$ durch (15) definiert ist, benutzt man anderseits die Formeln (4), (6) und (16) bis (19), so erkennt man: Es ist entweder

$$(u_1)_\mathfrak{p} = \xi + 2,\ (u_1)_{\mathfrak{p}'} = (u_1)_p = 1\ ;$$

oder

$$(u_1)_\mathfrak{p} = (u_1)_p = 1,\ (u_1)_{\mathfrak{p}'} = \xi + 2\,.$$

Dagegen wird für $j \geqq 2$:

$$(u_j)_\mathfrak{p} = (u_j)_{\mathfrak{p}'} = (u_j)_p = \xi + j + 1\,,$$

so daß wir auch hier für $j \geqq 2$ diesen gemeinsamen Wert mit $u_j$ bezeichnen können, was für das folgende genügt.

Benutzt man schließlich wieder die Tatsache, daß der Körper $K\{p^w\}$,

---

[11]) Man beachte hiebei, daß $(\varepsilon - 1)(\varepsilon' - 1) = -(\varepsilon + \varepsilon')$, ferner $(\varepsilon + 1)(\varepsilon' + 1) = (\varepsilon + \varepsilon')$, endlich $\varepsilon^2 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)$ ist.

$w \geqq 1$, sowohl die Körper $K\{\mathfrak{p}^w\}$ und $K\{\mathfrak{p}'^w\}$, als auch $K\{p^{w-1}\}$ enthält, so ergibt sich: Ist

$$n(\varepsilon) = +1 \text{ und } u_1 \geqq 2, \text{ so gilt für } 1 \leqq w < u_1 :$$
$$n(\varepsilon) = +1 \text{ und } u_1 = 1, \text{ so gilt für } 2 \leqq w < u_2 :$$
$$n(\varepsilon) = -1, \text{ so gilt für } 1 \leqq w < u_2 :$$

Der Körper $K\{p^{w+1}\}$ entsteht aus $K\{p^w\}$ durch Adjunktion des relativquadratischen Körpers $c(2^{w+1})$ und durch beliebige Adjunktion eines der beiden Körper $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ oder $K\{\mathfrak{p}'^{w+1}\}$, von denen jeder relativ-quadratisch in bezug auf $K\{p^w\}$ und in bezug auf $K\{p^w\}$ $(c(2^{w+1}))$ ist.

**9.** Da auch für die quadratisch *reellen* Grundkörper die beiden Sätze gelten, daß $K\{\mathfrak{f}\}$ in bezug auf $k$ eine höchstens durch die Primidealteiler von $\mathfrak{f}$ teilbare Relativdiskriminante hat, und für zwei zueinander teilerfremde Ideale $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ der Körper $K\{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\}$ das Kompositum $K\{\mathfrak{f}_1\}(K\{\mathfrak{f}_2\})$ enthält, ergibt sich wie in *G. I.*, Abschnitt 12, pg. 113—119 der Beweis [12]) des Satzes:

**1. Satz.** *Ist $\mathfrak{f}$ ein beliebiges vom Einheitsideal und von einem Stammideal verschiedenes Ideal von $k$, so stelle man $\mathfrak{f}$ als Produkt von Stammidealen dar, deren* ***Normen*** *zueinander teilerfremd sind:*

$$\mathfrak{f} = \prod_{t=1}^{T} \mathfrak{f}_t, \quad (n(\mathfrak{f}_s), n(\mathfrak{f}_t)) = 1, \; s \neq t. \tag{20}$$

*Dann ist $k\{\mathfrak{f}\}$ ein Ausgangskreiskörper, und zwar das Kompositum der in den Abschnitten 2—8 bestimmten (Ausgangs-Kreis-) Körper $k\{\mathfrak{f}_t\}$, $t = 1, 2, \ldots T$.*

Sind allgemeiner $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_T$ je zu zweit zueinander teilerfremde Ideale, so ist

$$\varphi\left(\prod_{t=1}^{T} \mathfrak{f}_t\right) = \prod_{t=1}^{T} \varphi(\mathfrak{f}_t) \tag{21}$$

und $G\left(\prod_{t=1}^{T} \mathfrak{f}_t\right)$ gemäß Definition (1) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Größen $G(\mathfrak{f}_t)$, $t = 1, 2, \ldots T$, also

$$\frac{\prod_{t=1}^{T} G(\mathfrak{f}_t)}{G\left(\prod_{t=1}^{T} \mathfrak{f}_t\right)} = \left( \frac{\prod_{t=1}^{T} G(\mathfrak{f}_t)}{G(\mathfrak{f}_1)}, \frac{\prod_{t=1}^{T} G(\mathfrak{f}_t)}{G(\mathfrak{f}_2)}, \ldots, \frac{\prod_{t=1}^{T} G(\mathfrak{f}_t)}{G(\mathfrak{f}_T)} \right), \tag{22}$$

[12]) Im Falle d), pg. 115/116, sind die beiden Unterfälle $p \not\equiv 3$ oder $p = 3$, dann aber $w \geqq 3$ *einerseits*, und $p = 3$, $w = 1$ oder $w = 2$ *anderseits* zu betrachten. Vgl. hier Anmerkung 6.

wo die Klammer auf der rechten Seite von (22) den größten gemeinschaftlichen Teiler der in ihr auftretenden Größen bedeutet. Aus Formel (3) ergibt sich daher unter Berücksichtigung der Gleichungen (21) und (22):

$$H\left(\prod_{t=1}^{T}\mathfrak{f}_t\right) : \prod_{t=1}^{T} H(\mathfrak{f}_t) = \frac{1}{2^{T'-1}}\left(\frac{\prod_{t=1}^{T} G(\mathfrak{f}_t)}{G(\mathfrak{f}_1)}, \frac{\prod_{t=1}^{T} G(\mathfrak{f}_t)}{G(\mathfrak{f}_2)}, \ldots, \frac{\prod_{t=1}^{T} G(\mathfrak{f}_t)}{G(\mathfrak{f}_T)}\right). \tag{23}$$

Dabei ist $T' = 1$ im allgemeinen, dagegen $T'$ die Anzahl unter den Größen $G(\mathfrak{f}_1), G(\mathfrak{f}_2), \ldots, G(\mathfrak{f}_T)$, die *gerade* sind, falls $n(\varepsilon) = -1$ und gleichzeitig $G(\prod_{t=1}^{T}\mathfrak{f}_t)$ gerade ist.

Speziell wird (23) für *zwei* zueinander teilerfremde Ideale $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$:

$$H(\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2) : H(\mathfrak{f}_1)\, H(\mathfrak{f}_2) = \begin{cases} (G(\mathfrak{f}_1), G(\mathfrak{f}_2)) & \text{im allgemeinen;} \\ \frac{1}{2}(G(\mathfrak{f}_1), G(\mathfrak{f}_2)), & \text{falls } n(\varepsilon) = -1 \text{ und gleichzeitig } G(\mathfrak{f}_1) \text{ und } G(\mathfrak{f}_2) \textit{ beide} \text{ gerade sind.} \end{cases} \tag{24}$$

Aus dem 1. Alinea und dem 1. Satze dieses Abschnittes, der Formel (24), und unseren Ausführungen in Abschnitt 3 und 8 folgt der

**2. Satz.** *Sind $\mathfrak{f}_1 \neq 1$ und $\mathfrak{f}_2 \neq 1$ zwei zueinander teilerfremde Ideale von $k$, so ist $K\{\mathfrak{f}_1\}$ ($K\{\mathfrak{f}_2\}$) Unterkörper von $K\{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\}$, und der Relativgrad wird durch Formel* (24) *gegeben. Ist dieser Relativgrad größer als* 1 *und sind die* **Normen** *von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ zueinander teilerfremd, so wird die Galoissche Gruppe von $K\{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\}$ in bezug auf $K\{\mathfrak{f}_1\}$ ($K\{\mathfrak{f}_2\}$) durch keinen Kreiskörper reduziert, sind dagegen die Normen von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ Potenzen der gleichen Primzahl $p$* [13]*), so entsteht $K\{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\}$ aus $K\{\mathfrak{f}_1\}$ ($K\{\mathfrak{f}_2\}$) durch Adjunktion eines geeigneten Kreiskörpers, dessen Diskriminante nur durch $p$ teilbar ist.*

Schließlich gilt der

**3. Satz.** *Ist allgemein $\mathfrak{f}_t$ von der Form*

$$\mathfrak{f}_t = \mathfrak{p}_t^{w_t}, \quad w_t \geqq 1 \ , \tag{25}$$

*wo $\mathfrak{p}_t$ ein Primideal ist, oder auch, falls für die rationale Primzahl $p_t$ die Primidealzerlegung $p_t = \mathfrak{p}_t \cdot \mathfrak{p}_t'$, $\mathfrak{p}_t \neq \mathfrak{p}_t'$ gilt, von der Form*

$$\mathfrak{f}_t = p_t^{w_t}, \quad w_t \geqq 1 \ , \tag{26}$$

[13]) Dabei gilt $p$ als 1. Potenz von $p$.

*und gilt (20), so gibt es für jeden Index $t = 1, 2, \ldots, T$ einen geeignet gewählten Wert $(w_t)_0$, so daß der in $K\{\mathfrak{f}\}$ enthaltene* ***nicht****-absolut abelsche Bestandteil* ***derselbe bleibt,*** *falls für jedes $t$ der Exponent $w_t$ den Wert $(w_t)_0$ beliebig übertrifft. Weitere* ***eigentliche*** *Adjunktionen* ***nicht****-absolut abelscher, aber in bezug auf k relativ-abelscher Körper können also höchstens dadurch erfolgen, daß die* ***Anzahl*** *$T$ der Stammidealteiler von $\mathfrak{f}$, deren* ***Normen*** *zueinander teilerfremd sind, beständig vergrößert wird.*

Zum Beweise des 3. Satzes seien zunächst in (25) und (26) die Exponenten $w_1 = w_2 = \cdots = w_T = 1$ gesetzt und für jedes festgehaltene $t$ dann die nicht negative ganze rationale Zahl $v_t$ der genaue Exponent der Potenz, in der die Primzahl $p_t$ in

$$\frac{\prod\limits_{s=1}^{T} G(\mathfrak{f}_s)}{G(\mathfrak{f}_t)}$$

aufgeht.

In den Abschnitten 2—8 hat sich ergeben, daß für ein Ideal von der Form (25) oder (26) beim Aufbau des Körpertums $K\{\mathfrak{f}_t\}$, falls $w_t$ von einem geeignet gewählten Wert $(w_t)_0^*$ an weiter beliebig wächst, nie mehr ein *nicht*-absolut abelscher Körper adjungiert wird oder sogar alle diese Körper identisch sind.

Wegen der Formeln (6) kann ferner $(w_t)_0^{**}$ so groß gewählt werden, daß für $w_t \geqq (w_t)_0^{**}$ der Exponent $G(\mathfrak{f}_t)$ durch $p_t^{v_t}$ teilbar ist.

Es sei jetzt für jedes $t = 1, 2, \ldots, T$:

$$(w_t)_0 = \text{Max.}\,\left( (w_t)_0^*\,,\ (w_t)_0^{**} \right)\ .$$

Setzt man für jedes $t = 1, 2, \ldots, T$ diesen Wert $(w_t)_0$ in $\mathfrak{f}_t$, und dann die $\mathfrak{f}_t$ in Formel (23) ein, so erkennt man, daß der Körper

$$K\{\mathfrak{f}\}\ ,\quad \mathfrak{f} = \prod_{t=1}^{T} \mathfrak{f}_t\ ,$$

von *endlichem* Grade in bezug auf das Kompositum der $T$ Körper $K\{\mathfrak{f}_t\}$, $t = 1, 2, \ldots, T$, ist, und daß dieser endliche Relativgrad, d. h. die rechte Seite von (23) wegen der Formeln (6) konstant bleibt, falls die Größen $w_t$ beliebig weiter zunehmen.

(Eingegangen den 17. April 1943.)