Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Die Funktionentheorie der Dirac'schen Differentialgleichungen.

Autor: Fueter, Rud.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15544

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Funktionentheorie der Dirac'schen Differentialgleichungen

Von Rud. Fueter, Zürich

Seinem lieben Freunde
Constantin Carathéodory
zum siebzigsten Geburtstage
gewidmet!

Im folgenden handelt es sich um die Dirac'schen Differentialgleichungen im Falle verschwindender Ruhmasse. Es wird bewiesen, wie diese gleichbedeutend sind mit der Bedingung, daß gewisse Integrale unabhängig sind von der Hyperfläche, über die integriert wird. Damit wird gezeigt, daß sie genau so eine Funktionentheorie zulassen, wie die klassischen Riemann-Cauchy'schen Differentialgleichungen¹). Es scheint mir dies darum bemerkenswert, weil die Differentialgleichung, der die Komponenten der Funktionen genügen, vom hyperbolischen Typus ist. Von diesem Gesichtspunkt aus ist die Durchführung eine Verallgemeinerung der Riemann'schen Methode zur Lösung der Differentialgleichung der schwingenden Saite²).

So wird im vierten Teile eine Formel für alle Funktionen (deren Komponenten die Dirac'schen Gleichungen befriedigen) entwickelt, in der die letzteren Lösungen einer linearen Integralgleichung sind, falls sie auf einer Hyperfläche gegeben sind. Die Lösungsfunktion läßt sich nicht direkt durch die Werte auf der Hyperfläche darstellen, sondern es tritt im Gegensatze zur Riemann'schen Theorie noch ein Glied mit einem Integral über eine bestimmte Hyperkegelwandung hinzu. Auf solche Integrale hat schon Schrödinger aufmerksam gemacht³), und zwar in einem Falle, der einesteils die allgemeinen Dirac'schen Gleichungen, andernteils aber nur spezielle Lösungen in Betracht zieht.

¹⁾ Ähnliche Bestrebungen sind von Moisil und Théodorescu veröffentlicht worden. Siehe Moisil, Sur un algorithme généralisant la théorie des fonctions monogènes, qui peut être utile pour l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. Annalele Academiei Romane, Memorille Sectionii stiintifice, ser. III, tom. XVI, mem. 17, 1941.

²⁾ Riemann, Gesammelte mathematische Werke, Leipzig, 1892, p. 156.

^{*)} E. Schrödinger, On the solutions of wave equations for non-vanishing Rest-mass including a source-function. Proceedings of the royal Irish Academy, vol. XLVII, section A, No. 1, 1941.

1. Algebren

Wir führen zunächst folgende Clifford'sche Zahlen ein 4):

$$c_{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c_{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, c_{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die die Relationen erfüllen:

$$c_k^2 = 1$$
, $k = 0$, 1, 2, 3; $c_0 c_k = c_k c_0 = c_k$, $k = 1$, 2, 3; $c_k c_k = -c_k c_k$, h , $k = 1$, 2, 3, $h \neq k$.

Mit diesen bilden wir das Linearsystem $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{a}}^{5}$):

$$z = \sum_{(k)} c_k x_k$$

mit reellen x_k . \mathfrak{L}_c ist keine Algebra, da hierzu noch die Einheiten c_1c_2 , c_1c_3 , c_2c_3 , $c_1c_2c_3$ hinzugenommen werden müßten, wodurch sich die Ordnung $2^3=8$ der Algebra ergäbe. Diese letztere Algebra sei mit \mathfrak{C}_3 bezeichnet. \mathfrak{L}_c ist somit ein Linearsystem von \mathfrak{C}_3 .

Außer \mathfrak{L}_{σ} führen wir ein zweites System von hyperkomplexen Größen ein:

Falls man die Null-Matrix mit 0 identifiziert, bilden die e_k die Basis einer . Algebra \mathfrak{A}_{ϵ} , da:

$$e_0e_k=0, k=1, 2, 3; e_ke_0=e_k, k=0, 1, 2, 3; e_ke_k=0, h, k=1, 2, 3.$$

Zwischen den c_k und e_h finden gemäß dem Matrizenkalkül für die Produkte $c_k e_h$ folgende wichtigen Beziehungen statt, die wir in der Tafel nicderlegen:

⁴⁾ Siehe die Zürcher Dissertation: P. Boβhard, Die Clifford'schen Zahlen, ihre Algebra und ihre Funktionentheorie. Zürich 1940.

⁵⁾ Siehe L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927, p. 80.

		e _o	e_1	e_2	e ₂
Produkt c _k e _k :	$c_{ m o}$	e _o	e_1	e ₂	e ₃
	c_1	$-e_0$	e_1	e ₂	$-e_3$
	<i>c</i> ₂	e_1	e_{0}	e_3	e ₂
	<i>c</i> ₃	$-e_2$	e_3	$-e_{o}$	e_1

Das Produkt einer Größe von \mathfrak{L}_c mit einer Größe von \mathfrak{A}_s liegt daher stets in \mathfrak{A}_s . Unter 0 wollen wir stets eine Größe in \mathfrak{C}_3 oder \mathfrak{A}_s verstehen, deren Komponenten sämtlich null sind. Bei der Multiplikation der Größen von \mathfrak{C}_3 und \mathfrak{A}_s gilt das assoziative Gesetz.

2. Funktionen

Es sei $z = \sum_{(k)} x_k c_k$ irgend ein Punkt eines Hyperraumes H. In allen Punkten von H seien $u_h(x_0, x_1, x_2, x_3)$, h = 0, 1, 2, 3, vier stetige, stetig differenzierbare reelle Funktionen der reellen Variablen x_k ; $w = f(z) = \sum_{(k)} u_k e_k$ heißt dann eine in H gegebene e-Funktion von z.

Definition: Die e-Funktion w = f(z) heißt in H linksregulär, wenn:

$$\sum_{(k)} c_k \, w^{(k)} = 0 \tag{I}$$

ist, wo $w^{(k)}$ die Abkürzung:

$$w^{(k)} = \frac{\partial u_0}{\partial x_k} e_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_k} e_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_k} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_k} e_3$$

bedeutet.

Gemäß den Abmachungen über A. ist I. die Abkürzung für vier Gleichungen, die auf Grund der Tafel so lauten:

$$u_0^{(0)} - u_0^{(1)} + u_1^{(2)} - u_2^{(3)} = 0 ,$$

$$u_1^{(0)} + u_1^{(1)} + u_0^{(2)} + u_3^{(3)} = 0 ,$$

$$u_2^{(0)} + u_2^{(1)} + u_3^{(2)} - u_0^{(3)} = 0 ,$$

$$u_3^{(0)} - u_3^{(1)} + u_2^{(2)} + u_1^{(3)} = 0 .$$
(II)

Dies sind die Dirac'schen Gleichungen bei fehlenden Ruhmassen 6). Sind die Funktionen u_{λ} zweimal stetig differenzierbar, so folgt aus I. sofort:

$$\boldsymbol{w}^{(00)} - \boldsymbol{w}^{(11)} - \boldsymbol{w}^{(22)} - \boldsymbol{w}^{(33)} = 0 . \tag{III}$$

Denn differenziert man I. nach x_i und subtrahiert von der Gleichung mit l = 0 diejenigen für l = 1, 2, 3, so bleibt links wegen $c_l c_k + c_k c_l = 0$, $l \neq k$; l, k = 1, 2, 3 und $c_0 c_k - c_k c_0 = 0$ gerade die Gleichung III. übrig. Außer den e-Funktionen führen wir die c-Funktionen ein:

$$W=F(z)=\sum\limits_{(h)}\,U_{\,h}(x_0\,,\,\,x_1\,,\,\,x_2\,,\,\,x_3)\,\,\,c_{\,h}\,\,\,,$$

wobei die Voraussetzungen über die U_h dieselben sind, wie über die u_h .

Definition: Die c-Funktion W = F(z) heißt in H regulär, wenn:

$$\sum_{(k)} W^{(k)} c_k = 0 \tag{IV}$$

ist, wobei W^(k) die Abkürzung

$$W^{(k)} = \frac{\partial U_0}{\partial x_k} c_0 + \frac{\partial U_1}{\partial x_k} c_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_k} c_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_k} c_3$$

bedeutet.

Die linke Seite von IV. liegt nicht in \mathfrak{L}_{\bullet} , sondern in \mathfrak{C}_{3} . Da 7 Einheiten auftreten, müssen nach unsern Abmachungen 7 Koeffizienten null sein, was die reellen Bedingungsgleichungen ergibt:

$$U_0^{(0)} + U_1^{(1)} + U_2^{(2)} + U_3^{(3)} = 0 ,$$

$$U_0^{(1)} + U_1^{(0)} = 0 , \quad U_0^{(2)} + U_2^{(0)} = 0 , \quad U_0^{(3)} + U_3^{(0)} = 0 ,$$

$$U_1^{(2)} - U_2^{(1)} = 0 , \quad U_2^{(3)} - U_2^{(2)} = 0 , \quad U_2^{(1)} - U_1^{(3)} = 0 .$$
(V)

Hätte man (IV) so geschrieben:

$$\sum_{(k)} c_k W^{(k)} = 0 ,$$

so hätten sich genau dieselben Gleichungen (V) ergeben. Man unterscheidet hier somit nicht zwischen rechts- und linksregulär.

Daß es reguläre Funktionen gibt, wird so gezeigt: Wir definieren di konjugierten Größen in Cz durch:

$$\overline{z} = \sum_{(k)} x_k \overline{c}_k$$
, wo $\overline{c}_0 = c_0$, $\overline{c}_k = -c_k$, $k = 1, 2, 3$.

Siehe etwa die unter 4) zitierte Dissertation, p. 44.

Unter der Norm von z:n(z) verstehen wir:

$$n(z) = z\bar{z} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Es gelten die beiden leicht zu bestätigenden Hilfsformeln:

$$\sum\limits_{(k)} c_k \, z c_k = 2 \, (z + \overline{z}) \; , \; \sum\limits_{(k)} \overline{c}_k \, z \, c_k = -2 \, \overline{z} \; .$$

Jetzt kann sofort der Satz bewiesen werden:

Satz: In jedem Hyperraume H, der keine Punkte des Hyperkegels n(z-d) = 0 enthält, ist

$$W = n(z-d)^{-1}(\overline{z-d})^{-1}$$

eine reguläre c-Funktion von z. Dabei ist d irgend eine bezüglich z konstante Größe von $\mathfrak{L}_{\mathfrak{o}}$.

Denn:

$$\sum_{(k)} W^{(k)} c_k = -\sum_{(k)} \left(2n(z-d)^{-1} (\overline{z-d})^{-1} \overline{c_k} (\overline{z-d})^{-1} c_k + n(z-d)^{-2} c_k c_k \right) = 0 ,$$

wegen der beiden Hilfsformeln.

3. Integrale

Es sei H ein endlicher abgeschlossener Hyperraum, dessen Grenzhyperfläche R orientierbar ist. R besitze in jedem Punkte ζ eine ins Innere von H gerichtete Normale, die durch den Einheitsvektor ξ_k , k=0,1,2,3, gegeben sei. Man setzt:

$$dZ = \sum_{(k)} \xi_k c_k dr ,$$

wo dr das Hyperflächenelement von R in ζ ist. Nach dem Gauß'schen Integralsatze gilt für je 16 in H stetige, stetig differenzierbare, endliche und reelle Funktionen P_{hk} der $x_k(h, k=0, 1, 2, 3)$:

$$\int\limits_{(B)} \sum_{(k)} \frac{\partial P_{hk}}{\partial x_k} dh = -\int\limits_{(R)} \sum_{(k)} (P_{hk} \xi_k) dr, h = 0, 1, 2, 3.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit e_{λ} und addiert über alle h, so folgt:

$$\int\limits_{(R)} \sum_{(h,k)} \frac{\partial P_{hk} e_h}{\partial x_k} dh = -\int\limits_{(R)} \sum_{(h,k)} (P_{hh} \xi_k e_h) dr.$$

Jetzt sei w eine linksreguläre e-Funktion, W eine reguläre c-Funktion in H. Man wählt für die P_{kk} die eindeutig bestimmten Komponenten von

$$Wc_k w = \sum_{(k)} P_{kk} e_k$$
, $k = 0, 1, 2, 3$.

Dann folgt:

$$\int_{(R)} \sum_{(k)} (Wc_k w)^{(k)} dh = -\int_{(R)} \sum_{(k)} Wc_k \xi_k drw = -\int_{(R)} W dZ w .$$

Wegen der Regularitätsbedingung von W und w ist:

$$\sum_{(k)} (W c_k w)^{(k)} = \sum_{(k)} (W^{(k)} c_k) w + W \sum_{(k)} c_k w^{(k)} = 0.$$

Daher muß

$$\int_{(R)} W \, dZ \, w = 0 \tag{VI}$$

sein.

I. Hauptsatz: Ist w eine in H linksreguläre e-Funktion, W eine in H reguläre c-Funktion, so ist für jede in H liegende geschlossene orientierbare H yperfläche R:

$$\int\limits_{(R)} WdZw = 0.$$

Man sieht ohne weiteres die Umkehrung ein:

Satz: Ist W eine in H reguläre, in keinem vierdimensionalen Kontinuum verschwindende c-Funktion, und w eine in H stetig und stetig differenzierbare e-Funktion; gilt ferner für jede geschlossene, orientierbare Hyperfläche R in H die Beziehung:

$$\int\limits_{(R)} WdZw = 0 ,$$

so ist w in H linksregulär.

4. Zweiter Integralsatz

Es sei R eine gegebene orientierbare Hyperfläche. Auf derjenigen Seite von R, zu der man von den Punkten von R aus gelangt, indem man in Richtung der negativen x_0 -Axe fortschreitet, sei ein abgeschlossener Hyperraum $\mathfrak S$ gegeben, zu dessen Begrenzung R gehöre. Die Punkte z von $\mathfrak S$ sollen die Eigenschaft haben, daß alle Strahlen aus z, deren Winkel mit $\det + x_0$ -Axe $\leq \frac{\pi}{4}$ sind, R in einem und nur einem Punkte treffen. In $\mathfrak S$ sei w = f(z) eine linksreguläre e-Funktion. Wir wählen einen festen Punkt z

in \mathfrak{F} , der nicht auf R liegt, und ziehen von ihm aus alle Strahlen, deren Winkel mit der $+x_0$ -Axe $\leq \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ sind, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$; dieselben, genommen bis zum Schnittpunkt mit R, legen einen Hyperraum H_{ε} fest, der Teilbereich von \mathfrak{F} ist. Die Begrenzung von H_{ε} ist der Hyperkreiskegel K_{ε} und ein Stück R_{ε} von R. Alle Punkte von H_{ε} können gegeben werden durch:

$$\zeta = \sum_{(k)} \zeta_{k} c_{k},$$

$$\zeta_{0} - x_{0} = t \cos t_{1},$$

$$\zeta_{1} - x_{1} = t \sin t_{1} \sin t_{2},$$

$$\zeta_{2} - x_{2} = t \sin t_{1} \cos t_{2} \sin^{2} t_{3},$$

$$\zeta_{3} - x_{3} = t \sin t_{1} \cos t_{2} \cos t_{3},$$

$$0 \le t \le \varrho,$$

$$0 \le t_{1} \le \frac{\pi}{4} - \varepsilon,$$
ist.
$$-\frac{\pi}{2} \le t_{2} \le \frac{!\pi}{2},$$

$$0 \le t_{3} \le 2\pi,$$

 ϱ ist die Länge der Strahlen von z bis zum Schnitt mit R, also eine eindeutige Funktion von t_1 , t_2 , t_3 , x_0 , x_1 , x_2 , x_3 . Auf K_s ist $t_1 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$, auf R_s $t = \varrho$ zu setzen.

Wir schließen jetzt noch z selbst aus H_{ϵ} aus, indem wir um z eine kleine Hyperkugelschale K_{τ} mit dem Radius r legen, also nur $t \geq r$ betrachten. r muß so klein sein, daß K_{τ} keine Punkte mit R gemein hat. Die so amputierten Bereiche H_{ϵ} und K_{ϵ} seien H'_{ϵ} und K'_{ϵ} . In H'_{ϵ} ist die c-Funktion $n(\zeta-z)^{-1}(\overline{\zeta-z})^{-1}$ regulär. Nach dem ersten Hauptsatz wird somit:

$$\int_{(K_f)} + \int_{(K_g')} + \int_{(R_g)} n(\zeta - z)^{-1} (\overline{\zeta - z})^{-1} dZ f(\zeta) = 0 , \qquad (a)$$

wobei dZ ins Innere von H'_{\bullet} gerichtet ist. In dieser Gleichung lassen wir $r \to 0$ gehen. Wegen der Stetigkeit und stetigen Differenzierbarkeit von f(z) ergibt eine elementare Rechnung die Existenz des ersten Integrals:

$$\lim_{r\to 0} \int = \int \int \int \int \int \frac{(\zeta-z)^2 \sin^2 t_1 \cos t_2}{r^2 \cos^2 2t_1} dt_1 dt_2 dt_3 f(\zeta) =$$

$$= 4\pi \int \int \frac{\sin^2 t_1}{\cos^2 2t_1} dt_1 f(z) = \pi \left(\cot 2z + \lg(\tan z)\right) f(z) .$$

Daher muß auch das zweite Integral in (a) existieren, und wir können den Grenzwert von (a) für $r \to 0$ so schreiben:

$$f(z) + \frac{1}{\pi \left(\cot g \, 2s + \lg \operatorname{tg} s\right)} \int_{(K_s)} + \frac{1}{\pi \left(\cot g \, 2s + \lg \operatorname{tg} s\right)} \int_{(R_s)} = 0 , \quad (b)$$
für alle $0 < s < \frac{\pi}{4}$.

Wir berechnen jetzt den Grenzwert des mittlern Integrals in (b) für $\varepsilon \to 0$. Auf K_{ε} ist $t_1 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$, und somit wird, da die Normale ins Innere von K_{ε} gerichtet ist, nach einer elementaren Rechnung:

$$dZ = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial t} \\ \frac{\partial \zeta_0}{\partial t_2} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial t_2} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial t_2} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial \zeta_0}{\partial t_3} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial t_3} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial t_3} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial t_3} \end{vmatrix} dt dt_2 dt_3 = \frac{1}{t} (\overline{\zeta} - z)_{-\epsilon} dr ,$$

wo $dr = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) t^2 \cos t_2 dt dt_2 dt_3$ das Hyperflächenelement von K_s in ζ ist, und der Index $-\varepsilon$ in $(\zeta - z)_{-s}$ bedeutet, daß an Stelle von $t_1 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ der Wert $t_1 = \frac{\pi}{4} + \varepsilon$ zu setzen ist. Nun ist auf K_s : $n(\zeta - z) = t^2 \sin 2\varepsilon$. Der Faktor $(\overline{\zeta - z})^{-1} (\overline{\zeta - z})_{-s}$ bleibt für $\varepsilon \to 0$ endlich und ergibt in der Form $n(\zeta - z)^{-1} (\zeta - z) (\overline{\zeta - z})_{-s}$ geschrieben wegen:

$$\frac{d(\zeta-z)}{d\varepsilon}=(\overline{\zeta-z})_{-\varepsilon}, \quad \frac{d(\overline{\zeta-z})_{-\varepsilon}}{d\varepsilon}=-(\zeta-z),$$

den Grenzwert:

$$\lim_{s\to 0} (\overline{\zeta-z})^{-1} (\overline{\zeta-z})_{-s} = -\frac{(\zeta-z)-(\overline{\zeta-z})}{(\zeta-z)+(\overline{\zeta-z})}.$$

Daraus folgt, daß der Grenzwert des mittlern Integrals in (b) für $\varepsilon \to 0$ existiert und gleich:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{(K_0)}^{(\zeta-z)}\frac{(\zeta-z)-(\overline{\zeta-z})}{((\zeta-z)+(\overline{\zeta-z}))^4}\,dr\,f(\zeta)$$

ist. Somit muß auch der Grenzwert des dritten Integrals in (b) existieren, und (b) geht über in:

$$f(z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{(K_0)}^{\infty} \frac{(\zeta - z) - (\overline{\zeta - z})}{((\zeta - z) + (\overline{\zeta - z}))^4} dr f(\zeta) + \lim_{s \to 0} \frac{1}{\pi(\cot g \ 2\varepsilon + \lg \lg \varepsilon)} \int_{(R_0)}^{\infty} n(\zeta - z)^{-1} (\overline{\zeta - z})^{-1} dZ f(\zeta) = 0.$$

Um den letzten Grenzwert zu berechnen, bezeichnen wir die zweidimensionale Schnittfläche des Hyperkegels, für den $t_1 = \text{konst.}$ ist, mit R_{ϵ} durch F_{t_1} . Für $\epsilon = 0$ ist sie der Schnitt von K_0 mit R und sei kurz mit F bezeichnet. Setzt man $dZ = dZ^*dt_1$, so wird nach bekannten Rezepten:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi (\cot g \, 2\varepsilon + \lg \lg g \, \varepsilon)} \int_{(R_s)}^{\varepsilon} = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{(P_{\overline{A}} - s)}^{\varepsilon} \frac{n \, (\zeta - z)^{-2} \, (\zeta - z) \, dZ^* \, f(\zeta)}{2}.$$

Wie früher gezeigt wurde, ist für $t_1 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ die Norm $n(\zeta - z) = t^2 \sin 2\varepsilon$ und $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\zeta - z) + (\overline{\zeta - z}) \right)$. Daher ergibt der Grenzwert, falls man noch $dZ^* = \Delta df$ setzt, wo df das Flächenelement in ζ auf F ist, den Ausdruck:

$$=\frac{2}{\pi}\int_{(F)}^{(\zeta-z)}\frac{(\zeta-z)\Delta}{((\zeta-z)+(\overline{\zeta-z}))^4}\,df\,f(\zeta).$$

Setzt man dies in (c) ein, so entsteht der

II. Hauptsatz: Ist f(z) im Hyperraume H eine linksreguläre e-Funktion (d. h. eine Lösungsfunktion der Dirac'schen Differentialgleichungen), wo H eine feste Hyperfläche R in seiner Umgrenzung enthält und die weitere Eigenschaft hat, daß in jedem seiner Punkte z die positive Seite der Erzeugenden des Hyperkreiskegels:

$$(\zeta_0 - x_0)^2 - (\zeta_1 - x_1)^2 - (\zeta_2 - x_2)^2 - (\zeta_3 - x_3)^2 = 0$$
 (1)

die Hypersläche R nur in einem Punkte schneidet, so gilt die Formel:

$$f(z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{(K)}^{(\zeta-z) - (\overline{\zeta-z})} \frac{(\zeta-z) - (\overline{\zeta-z})}{((\zeta-z) + (\overline{\zeta-z}))^4} dr f(\zeta) - \frac{2}{\pi} \int_{(K)}^{(\zeta-z) - (\overline{\zeta-z})} \frac{(\zeta-z) \Delta}{((\zeta-z) + (\overline{\zeta-z}))^4} df f(\zeta) ,$$
(VII)

wo K die Mantelhyperfläche des Hyperkreiskegels. (1) zwischen z und R, und F die Schnittfläche dieser Mantelhyperfläche mit R ist.

Im ersten Integral über K ist:

$$\zeta - z = \frac{t}{\sqrt{2}} (c_0 + \sin t_2 c_1 + \cos t_2 \sin t_3 c_2 + \cos t_2 \cos t_3 c_3),$$

im zweiten über F:

$$\zeta - z = \frac{\varrho}{\sqrt{2}} \left(c_0 + \sin t_2 c_1 + \cos t_2 \sin t_3 c_2 + \cos t_2 \cos t_3 c_3 \right)$$

zu setzen, wo ϱ die Länge der Erzeugenden von (1) zwischen der Spitze des Hyperkegels und R ist. Das Vorzeichen von Δ ist durch die Richtung der Normalen auf R gegen H bestimmt. Sein Wert ist

$$arDelta=rac{dZ^*}{df}$$
, wo: $dZ^*=\pmegin{array}{cccc} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \ rac{\partial \zeta_0}{\partial t_1} & rac{\partial \zeta_1}{\partial t_1} & rac{\partial \zeta_2}{\partial t_1} & rac{\partial \zeta_3}{\partial t_1} \ rac{\partial \zeta_0}{\partial t_2} & rac{\partial \zeta_1}{\partial t_2} & rac{\partial \zeta_2}{\partial t_2} & rac{\partial \zeta_3}{\partial t_2} \ rac{\partial \zeta_0}{\partial t_3} & rac{\partial \zeta_1}{\partial t_3} & rac{\partial \zeta_2}{\partial t_3} & rac{\partial \zeta_3}{\partial t_2} \ rac{\partial \zeta_0}{\partial t_3} & rac{\partial \zeta_1}{\partial t_3} & rac{\partial \zeta_2}{\partial t_3} & rac{\partial \zeta_3}{\partial t_3} \ \end{array}
ight]$

wobei $t_1 = \frac{\pi}{4}$ und $t = \varrho$, d.h. die betreffende Funktion ϱ von t_1 , t_2 , t_3 einzusetzen ist.

Der wichtigste Fall für das physikalische Problem ist wohl derjenige, in dem R die Hyperebene $x_0 = \text{Zeit} = \text{konst.}$ ist. Nimmt man an, daß f(z) auf R, also zu einer gegebenen Zeit bekannt ist, so zeigt der II. Hauptcatz, daß f(z) in irgend einem andern Momente durch eine lineare Integralgleichung gegeben ist. Dabei hängt der Wert im Punkte z nur von Ien Werten der Funktion in der Schnittkurve F des Kegels (1) mit R ab. Die Funktion ist eindeutig bestimmt, und es ist die Möglichkeit gegeben, die Funktion nach den Eigenfunktionen der Kern-c-Funktion von VII zu entwickeln. Ich behalte mir vor, in einer weitern Arbeit darauf zurückzukommen.

(Eingegangen den 28. März 1943.)