Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Die Funktionentheorie der Dirac'schen Differentialgleichungen.
Autor: Fueter, Rud.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15544

Die Funktionentheorie der Dirac'schen Differentialgleichungen

Von Rud. Fueter, Zürich

Seinem lieben Freunde
Constantin Carathéodory
zum siebzigsten Geburtstage
gewidmet!

Im folgenden handelt es sich um die *Dirac*'schen Differentialgleichungen im Falle verschwindender Ruhmasse. Es wird bewiesen, wie diese gleichbedeutend sind mit der Bedingung, daß gewisse Integrale unabhängig sind von der Hyperfläche, über die integriert wird. Damit wird gezeigt, daß sie genau so eine Funktionentheorie zulassen, wie die klassischen Riemann-Cauchy'schen Differentialgleichungen[1]). Es scheint mir dies darum bemerkenswert, weil die Differentialgleichung, der die Komponenten der Funktionen genügen, vom hyperbolischen Typus ist. Von diesem Gesichtspunkt aus ist die Durchführung eine Verallgemeinerung der *Riemann'schen Methode* zur Lösung der Differentialgleichung der schwingenden Saite[2]).

So wird im vierten Teile eine Formel für alle Funktionen (deren Komponenten die Dirac'schen Gleichungen befriedigen) entwickelt, in der die letzteren Lösungen einer *linearen Integralgleichung* sind, falls sie auf einer Hyperfläche gegeben sind. Die Lösungsfunktion läßt sich nicht direkt durch die Werte auf der Hyperfläche darstellen, sondern es tritt im Gegensatze zur *Riemann*'schen Theorie noch ein Glied mit einem Integral über eine bestimmte Hyperkegelwandung hinzu. Auf solche Integrale hat schon *Schrödinger* aufmerksam gemacht[3]), und zwar in einem Falle, der einesteils die allgemeinen Dirac'schen Gleichungen, andernteils aber nur spezielle Lösungen in Betracht zieht.

---

[1]) Ähnliche Bestrebungen sind von *Moisil* und *Théodorescu* veröffentlicht worden. Siehe *Moisil*, Sur un algorithme généralisant la théorie des fonctions monogènes, qui peut être utile pour l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. Annalele Academiei Romane, Memoriile Sectiunii stiintifice, ser. III, tom. XVI, mem. 17, 1941.

[2]) *Riemann*, Gesammelte mathematische Werke, Leipzig, 1892, p. 156.

[3]) *E. Schrödinger*, On the solutions of wave equations for non-vanishing Rest-mass including a source-function. Proceedings of the royal Irish Academy, vol. XLVII, section A, No. 1, 1941.

1. *Algebren*

Wir führen zunächst folgende Clifford'sche Zahlen ein [4]):

$$c_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad c_1=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad c_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad c_3=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

die die Relationen erfüllen:

$$c_k^2=1\,,\quad k=0,1,2,3\,;\quad c_0c_k=c_kc_0=c_k\,,\; k=1,2,3\,;$$
$$c_kc_h=-c_hc_k\,,\; h,k=1,2,3,\; h\neq k\,.$$

Mit diesen bilden wir das Linearsystem $\mathfrak{L}_c$ [5]):

$$z=\sum_{(k)}c_kx_k$$

mit reellen x_k. $\mathfrak{L}_c$ ist keine Algebra, da hierzu noch die Einheiten c_1c_2, c_1c_3, c_2c_3, $c_1c_2c_3$ hinzugenommen werden müßten, wodurch sich die Ordnung $2^3=8$ der Algebra ergäbe. Diese letztere Algebra sei mit $\mathfrak{C}_3$ bezeichnet. $\mathfrak{L}_c$ ist somit ein Linearsystem von $\mathfrak{C}_3$.

Außer $\mathfrak{L}_c$ führen wir ein zweites System von hyperkomplexen Größen ein:

$$e_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad e_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Falls man die Null-Matrix mit 0 identifiziert, bilden die e_k die Basis einer Algebra $\mathfrak{A}_e$, da:

$$e_0e_k=0,\ k=1,2,3;\quad e_ke_0=e_k,\ k=0,1,2,3;\quad e_he_k=0,\ h,k=1,2,3.$$

Zwischen den c_k und e_h finden gemäß dem Matrizenkalkül für die Produkte c_ke_h folgende wichtigen Beziehungen statt, die wir in der *Tafel* niederlegen:

---

[4]) Siehe die Zürcher Dissertation: *P. Boßhard*, Die Clifford'schen Zahlen, ihre Algebra und ihre Funktionentheorie. Zürich 1940.

[5]) Siehe *L. E. Dickson*, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927, p. 80.

Produkt $c_k e_h$:

	e_0	e_1	e_2	e_3
c_0	e_0	e_1	e_2	e_3
c_1	$-e_0$	e_1	e_2	$-e_3$
c_2	e_1	e_0	e_3	e_2
c_3	$-e_2$	e_3	$-e_0$	e_1

Das Produkt einer Größe von $\mathfrak{L}_c$ mit einer Größe von $\mathfrak{A}_e$ liegt daher stets in $\mathfrak{A}_e$. Unter 0 wollen wir stets eine Größe in $\mathfrak{C}_3$ oder $\mathfrak{A}_e$ verstehen, deren Komponenten sämtlich null sind. *Bei der Multiplikation der Größen von $\mathfrak{C}_3$ und $\mathfrak{A}_e$ gilt das assoziative Gesetz.*

2. *Funktionen*

Es sei $z = \sum\limits_{(k)} x_k c_k$ irgend ein Punkt eines Hyperraumes H. In allen Punkten von H seien $u_h(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $h = 0, 1, 2, 3$, vier stetige, stetig differenzierbare reelle Funktionen der reellen Variablen x_k; $w = f(z) = \sum\limits_{(h)} u_h e_h$ heißt dann eine in H gegebene e-Funktion von z.

Definition: *Die e-Funktion $w = f(z)$ heißt in H linksregulär, wenn:*

$$\sum_{(k)} c_k w^{(k)} = 0 \tag{I}$$

ist, wo $w^{(k)}$ die Abkürzung:

$$w^{(k)} = \frac{\partial u_0}{\partial x_k} e_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_k} e_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_k} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_k} e_3$$

bedeutet.

Gemäß den Abmachungen über $\mathfrak{A}_e$ ist I. die Abkürzung für vier Gleichungen, die auf Grund der Tafel so lauten:

$$\begin{aligned} u_0^{(0)} - u_0^{(1)} + u_1^{(2)} - u_2^{(3)} &= 0\,, \\ u_1^{(0)} + u_1^{(1)} + u_0^{(2)} + u_3^{(3)} &= 0\,, \\ u_2^{(0)} + u_2^{(1)} + u_3^{(2)} - u_0^{(3)} &= 0\,, \\ u_3^{(0)} - u_3^{(1)} + u_2^{(2)} + u_1^{(3)} &= 0\,. \end{aligned} \tag{II}$$

Dies sind die *Dirac*'schen Gleichungen bei fehlenden Ruhmassen[6]). Sind die Funktionen u_k zweimal stetig differenzierbar, so folgt aus I. sofort:

$$w^{(00)} - w^{(11)} - w^{(22)} - w^{(33)} = 0 \ . \tag{III}$$

Denn differenziert man I. nach x_l und subtrahiert von der Gleichung mit $l = 0$ diejenigen für $l = 1, 2, 3$, so bleibt links wegen $c_l c_k + c_k c_l = 0$, $l \neq k$; $l, k = 1, 2, 3$ und $c_0 c_k - c_k c_0 = 0$ gerade die Gleichung III. übrig.

Außer den e-Funktionen führen wir die c-Funktionen ein:

$$W = F(z) = \sum_{(h)} U_h(x_0\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3)\ c_h\ ,$$

wobei die Voraussetzungen über die U_h dieselben sind, wie über die u_h.

Definition: *Die c-Funktion $W = F(z)$ heißt in H regulär, wenn:*

$$\sum_{(k)} W^{(k)} c_k = 0 \tag{IV}$$

ist, wobei $W^{(k)}$ die Abkürzung

$$W^{(k)} = \frac{\partial U_0}{\partial x_k} c_0 + \frac{\partial U_1}{\partial x_k} c_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_k} c_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_k} c_3$$

bedeutet.

Die linke Seite von IV. liegt nicht in $\mathfrak{L}_4$, sondern in $\mathfrak{C}_3$. Da 7 Einheiten auftreten, müssen nach unsern Abmachungen 7 Koeffizienten null sein, was die reellen Bedingungsgleichungen ergibt:

$$\begin{array}{l} U_0^{(0)} + U_1^{(1)} + U_2^{(2)} + U_3^{(3)} = 0\ , \\ U_0^{(1)} + U_1^{(0)} = 0\ ,\ U_0^{(2)} + U_2^{(0)} = 0\ ,\ U_0^{(3)} + U_3^{(0)} = 0\ , \\ U_1^{(2)} - U_2^{(1)} = 0\ ,\ U_2^{(3)} - U_3^{(2)} = 0\ ,\ U_3^{(1)} - U_1^{(3)} = 0\ . \end{array} \tag{V}$$

Hätte man (IV) so geschrieben:

$$\sum_{(k)} c_k W^{(k)} = 0\ ,$$

so hätten sich genau dieselben Gleichungen (V) ergeben. Man unterscheidet hier somit nicht zwischen rechts- und linksregulär.

Daß es reguläre Funktionen gibt, wird so gezeigt: Wir definieren die konjugierten Größen in $\mathfrak{C}_3$ durch:

$$\bar{z} = \sum_{(k)} x_k \bar{c}_k\ ,\ \text{wo}\ \bar{c}_0 = c_0\ ,\ \bar{c}_k = -c_k\ ,\ k = 1\,,\ 2\,,\ 3\,.$$

[6]) Siehe etwa die unter [4]) zitierte Dissertation, p. 44.

Unter der Norm von $z : n(z)$ verstehen wir:

$$n(z) = z\bar{z} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \; .$$

Es gelten die beiden leicht zu bestätigenden Hilfsformeln:

$$\sum_{(k)} c_k z c_k = 2(z+\bar{z}) \; , \; \sum_{(k)} \bar{c}_k z c_k = -2\bar{z} \; .$$

Jetzt kann sofort der Satz bewiesen werden:

Satz: *In jedem Hyperraume H, der keine Punkte des Hyperkegels $n(z-d) = 0$ enthält, ist*

$$W = n(z-d)^{-1}(\overline{z-d})^{-1}$$

eine reguläre c-Funktion von z. Dabei ist d irgend eine bezüglich z konstante Größe von $\mathfrak{L}_0$.

Denn:

$$\sum_{(k)} W^{(k)} c_k = - \sum_{(k)} (2n(z-d)^{-1}(\overline{z-d})^{-1}\bar{c}_k(\overline{z-d})^{-1}c_k + n(z-d)^{-2}c_k c_k) = 0 \, ,$$

wegen der beiden Hilfsformeln.

3. *Integrale*

Es sei H ein endlicher abgeschlossener Hyperraum, dessen Grenzhyperfläche R orientierbar ist. R besitze in jedem Punkte ζ eine ins Innere von H gerichtete Normale, die durch den Einheitsvektor ξ_k, $k = 0, 1, 2, 3$, gegeben sei. Man setzt:

$$dZ = \sum_{(k)} \xi_k c_k \, dr \; ,$$

wo dr das Hyperflächenelement von R in ζ ist. Nach dem Gauß'schen Integralsatze gilt für je 16 in H stetige, stetig differenzierbare, endliche und reelle Funktionen P_{hk} der $x_k (h, k = 0, 1, 2, 3)$:

$$\int_{(H)} \sum_{(k)} \frac{\partial P_{hk}}{\partial x_k} \, dh = - \int_{(R)} \sum_{(k)} (P_{hk} \xi_k) \, dr \; , \; h = 0 \, , \, 1 \, , \, 2 \, , \, 3 \; .$$

Multipliziert man diese Gleichung mit e_h und addiert über alle h, so folgt:

$$\int_{(H)} \sum_{(h,k)} \frac{\partial P_{hk} e_h}{\partial x_k} \, dh = - \int_{(R)} \sum_{(h,k)} (P_{hk} \xi_k e_h) \, dr \; .$$

Jetzt sei w eine linksreguläre e-Funktion, W eine reguläre c-Funktion in H. Man wählt für die P_{hk} die eindeutig bestimmten Komponenten von

$$Wc_k w = \sum_{(h)} P_{hk} e_h \, , \quad k = 0, 1, 2, 3 \; .$$

Dann folgt:

$$\int_{(H)} \sum_{(k)} (Wc_k w)^{(k)} \, dh = - \int_{(R)} \sum_{(k)} Wc_k \xi_k \, d_r w = - \int_{(R)} W \, dZ \, w \; .$$

Wegen der Regularitätsbedingung von W und w ist:

$$\sum_{(k)} (Wc_k w)^{(k)} = \sum_{(k)} (W^{(k)} c_k) \, w + W \sum_{(k)} c_k w^{(k)} = 0 \; .$$

Daher muß

$$\int_{(R)} W \, dZ \, w = 0 \tag{VI}$$

sein.

I. Hauptsatz: *Ist w eine in H linksreguläre e-Funktion, W eine in H reguläre c-Funktion, so ist für jede in H liegende geschlossene orientierbare Hyperfläche R:*

$$\int_{(R)} W dZ w = 0 \; .$$

Man sieht ohne weiteres die Umkehrung ein:

Satz: *Ist W eine in H reguläre, in keinem vierdimensionalen Kontinuum verschwindende c-Funktion, und w eine in H stetig und stetig differenzierbare e-Funktion; gilt ferner für jede geschlossene, orientierbare Hyperfläche R in H die Beziehung:*

$$\int_{(R)} W d Z w = 0 \; ,$$

so ist w in H linksregulär.

4. *Zweiter Integralsatz*

Es sei R eine gegebene orientierbare Hyperfläche. Auf derjenigen Seite von R, zu der man von den Punkten von R aus gelangt, indem man in Richtung der negativen x_0-Axe fortschreitet, sei ein abgeschlossener Hyperraum $\mathfrak{H}$ gegeben, zu dessen Begrenzung R gehöre. Die Punkte z von $\mathfrak{H}$ sollen die Eigenschaft haben, daß alle Strahlen aus z, deren Winkel mit der $+x_0$-Axe $\leq \frac{\pi}{4}$ sind, R in einem und nur einem Punkte treffen. In $\mathfrak{H}$ sei $w = f(z)$ eine linksreguläre e-Funktion. Wir wählen einen festen Punkt z

in $\mathfrak{H}$, der nicht auf R liegt, und ziehen von ihm aus alle Strahlen, deren Winkel mit der $+x_0$-Axe $\leqq \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ sind, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$; dieselben, genommen bis zum Schnittpunkt mit R, legen einen Hyperraum H_ε fest, der Teilbereich von $\mathfrak{H}$ ist. Die Begrenzung von H_ε ist der Hyperkreiskegel K_ε und ein Stück R_ε von R. Alle Punkte von H_ε können gegeben werden durch:

$$\zeta = \sum_{(k)} \zeta_k c_k ,$$

$$\begin{aligned}
\zeta_0 - x_0 &= t \cos t_1 , \\
\zeta_1 - x_1 &= t \sin t_1 \sin t_2 , \\
\zeta_2 - x_2 &= t \sin t_1 \cos t_2 \sin t_3 , \\
\zeta_3 - x_3 &= t \sin t_1 \cos t_2 \cos t_3 ,
\end{aligned}
\qquad \text{wo:} \left\{
\begin{aligned}
0 &\leqq t \leqq \varrho , \\
0 &\leqq t_1 \leqq \frac{\pi}{4} - \varepsilon , \\
-\frac{\pi}{2} &\leqq t_2 \leqq \frac{\pi}{2} , \\
0 &\leqq t_3 \leqq 2\pi ,
\end{aligned}\right. \quad \text{ist.}$$

ϱ ist die Länge der Strahlen von z bis zum Schnitt mit R, also eine eindeutige Funktion von $t_1, t_2, t_3, x_0, x_1, x_2, x_3$. Auf K_ε ist $t_1 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$, auf R_ε $t = \varrho$ zu setzen.

Wir schließen jetzt noch z selbst aus H_ε aus, indem wir um z eine kleine Hyperkugelschale K_r mit dem Radius r legen, also nur $t \geqq r$ betrachten. r muß so klein sein, daß K_r keine Punkte mit R gemein hat. Die so amputierten Bereiche H_ε und K_ε seien H'_ε und K'_ε. In H'_ε ist die c-Funktion $n(\zeta - z)^{-1}(\overline{\zeta - z})^{-1}$ regulär. Nach dem ersten Hauptsatz wird somit:

$$\int_{(K_r)} + \int_{(K'_\varepsilon)} + \int_{(\underline{R_\varepsilon})} n(\zeta - z)^{-1}(\overline{\zeta - z})^{-1}\, dZ\, f(\zeta) = 0 , \tag{a}$$

wobei dZ ins Innere von H'_ε gerichtet ist. In dieser Gleichung lassen wir $r \to 0$ gehen. Wegen der Stetigkeit und stetigen Differenzierbarkeit von $f(z)$ ergibt eine elementare Rechnung die Existenz des ersten Integrals:

$$\lim_{r \to 0} \int_{(K_r)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta - z)^2 \sin^2 t_1 \cos t_2}{r^2 \cos^2 2t_1}\, dt_1\, dt_2\, dt_3\, f(\zeta) =$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}-\varepsilon} \frac{\sin^2 t_1}{\cos^2 2t_1}\, dt_1\, f(z) = \pi\,(\operatorname{cotg} 2\varepsilon + lg(\operatorname{tg}\varepsilon))\, f(z) .$$

Daher muß auch das zweite Integral in (a) existieren, und wir können den Grenzwert von (a) für $r \to 0$ so schreiben:

$$f(z) + \frac{1}{\pi(\operatorname{cotg} 2\varepsilon + \lg \operatorname{tg} \varepsilon)} \int_{(K_\varepsilon)} + \frac{1}{\pi(\operatorname{cotg} 2\varepsilon + \lg \operatorname{tg} \varepsilon)} \int_{(R_\varepsilon)} = 0 \,, \qquad \text{(b)}$$

$$\text{für alle } 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4} \,.$$

Wir berechnen jetzt den Grenzwert des mittlern Integrals in (b) für $\varepsilon \to 0$. Auf K_ε ist $t_1 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$, und somit wird, da die Normale ins Innere von K_ε gerichtet ist, nach einer elementaren Rechnung:

$$dZ = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial t} \\ \frac{\partial \zeta_0}{\partial t_2} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial t_2} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial t_2} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial \zeta_0}{\partial t_3} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial t_3} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial t_3} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial t_3} \end{vmatrix} dt\, dt_2\, dt_3 = \frac{1}{t} (\overline{\zeta - z})_{-\varepsilon}\, dr \,,$$

wo $dr = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) t^2 \cos t_2\, dt\, dt_2\, dt_3$ das Hyperflächenelement von K_ε in ζ ist, und der Index $-\varepsilon$ in $(\zeta - z)_{-\varepsilon}$ bedeutet, daß an Stelle von $t_1 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ der Wert $t_1 = \frac{\pi}{4} + \varepsilon$ zu setzen ist. Nun ist auf K_ε: $n(\zeta - z) = t^2 \sin 2\varepsilon$. Der Faktor $(\overline{\zeta - z})^{-1} (\overline{\zeta - z})_{-\varepsilon}$ bleibt für $\varepsilon \to 0$ endlich und ergibt in der Form $n(\zeta - z)^{-1} (\zeta - z) (\overline{\zeta - z})_{-\varepsilon}$ geschrieben wegen:

$$\frac{d(\zeta - z)}{d\varepsilon} = (\overline{\zeta - z})_{-\varepsilon} \,, \qquad \frac{d(\overline{\zeta - z})_{-\varepsilon}}{d\varepsilon} = -(\zeta - z) \,,$$

den Grenzwert:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\overline{\zeta - z})^{-1} (\overline{\zeta - z})_{-\varepsilon} = - \frac{(\zeta - z) - (\overline{\zeta - z})}{(\zeta - z) + (\overline{\zeta - z})} \,.$$

Daraus folgt, daß der Grenzwert des mittlern Integrals in (b) für $\varepsilon \to 0$ existiert und gleich:

$$- \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{(K_0)} \frac{(\zeta - z) - (\overline{\zeta - z})}{((\zeta - z) + (\overline{\zeta - z}))^4}\, dr\, f(\zeta)$$

ist. Somit muß auch der Grenzwert des dritten Integrals in (b) existieren, und (b) geht über in:

$$f(z) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{(K_0)} \frac{(\zeta - z) - (\overline{\zeta - z})}{((\zeta - z) + (\overline{\zeta - z}))^4}\, dr\, f(\zeta) +$$
$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi(\operatorname{cotg} 2\varepsilon + \lg \operatorname{tg} \varepsilon)} \int\limits_{(R_\varepsilon)} n(\zeta - z)^{-1}\, (\overline{\zeta - z})^{-1}\, dZ\, f(\zeta) = 0\ . \tag{c}$$

Um den letzten Grenzwert zu berechnen, bezeichnen wir die zweidimensionale Schnittfläche des Hyperkegels, für den $t_1 =$ konst. ist, mit R_ε durch F_{t_1}. Für $\varepsilon = 0$ ist sie der Schnitt von K_0 mit R und sei kurz mit F bezeichnet. Setzt man $dZ = dZ^* dt_1$, so wird nach bekannten Rezepten:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi(\operatorname{cotg} 2\varepsilon + \lg \operatorname{tg} \varepsilon)} \int\limits_{(R_\varepsilon)} = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{(F_{\frac{\pi}{4}-\varepsilon})} \frac{n(\zeta - z)^{-2}(\zeta - z)\, dZ^*\, f(\zeta)}{-\frac{2}{\sin^2 2\varepsilon} + \frac{1}{\sin\varepsilon\, \cos\varepsilon}}\,.$$

Wie früher gezeigt wurde, ist für $t_1 = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ die Norm $n(\zeta - z) = t^2 \sin 2\varepsilon$ und $t = \frac{1}{\sqrt{2}}((\zeta - z) + (\overline{\zeta - z}))$. Daher ergibt der Grenzwert, falls man noch $dZ^* = \Delta\, df$ setzt, wo df das Flächenelement in ζ auf F ist, den Ausdruck:

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{(F)} \frac{(\zeta - z)\,\Delta}{((\zeta - z) + (\overline{\zeta - z}))^4}\, df\, f(\zeta)\ .$$

Setzt man dies in (c) ein, so entsteht der

II. Hauptsatz: *Ist $f(z)$ im Hyperraume H eine linksreguläre e-Funktion (d. h. eine Lösungsfunktion der Dirac'schen Differentialgleichungen), wo H eine feste Hyperfläche R in seiner Umgrenzung enthält und die weitere Eigenschaft hat, daß in jedem seiner Punkte z die positive Seite der Erzeugenden des Hyperkreiskegels:*

$$(\zeta_0 - x_0)^2 - (\zeta_1 - x_1)^2 - (\zeta_2 - x_2)^2 - (\zeta_3 - x_3)^2 = 0 \tag{1}$$

die Hyperfläche R nur in einem Punkte schneidet, so gilt die Formel:

$$f(z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{(K)} \frac{(\zeta - z) - (\overline{\zeta - z})}{((\zeta - z) + (\overline{\zeta - z}))^4}\, dr\, f(\zeta) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{(F)} \frac{(\zeta - z)\,\Delta}{((\zeta - z) + (\overline{\zeta - z}))^4}\, df\, f(\zeta)\ , \tag{VII}$$

wo K die Mantelhyperfläche des Hyperkreiskegels (1) zwischen z und R, und F die Schnittfläche dieser Mantelhyperfläche mit R ist.

Im ersten Integral über K ist:

$$\zeta - z = \frac{t}{\sqrt{2}} (c_0 + \sin t_2 c_1 + \cos t_2 \sin t_3 c_2 + \cos t_2 \cos t_3 c_3)\,,$$

im zweiten über F:

$$\zeta - z = \frac{\varrho}{\sqrt{2}} (c_0 + \sin t_2 c_1 + \cos t_2 \sin t_3 c_2 + \cos t_2 \cos t_3 c_3)$$

zu setzen, wo ϱ die Länge der Erzeugenden von (1) zwischen der Spitze des Hyperkegels und R ist. Das Vorzeichen von Δ ist durch die Richtung der Normalen auf R *gegen* H bestimmt. Sein Wert ist

$$\Delta = \frac{dZ^*}{df}\,, \quad \text{wo:} \quad dZ^* = \pm \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ \dfrac{\partial \zeta_0}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \zeta_3}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial \zeta_0}{\partial t_2} & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial t_2} & \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial t_2} & \dfrac{\partial \zeta_3}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial \zeta_0}{\partial t_3} & \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial t_3} & \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial t_3} & \dfrac{\partial \zeta_3}{\partial t_3} \end{vmatrix} dt_2\, dt_3 \text{ ist}\,,$$

wobei $t_1 = \frac{\pi}{4}$ und $t = \varrho$, d. h. die betreffende Funktion ϱ von t_1, t_2, t_3 einzusetzen ist.

Der wichtigste Fall für das physikalische Problem ist wohl derjenige, in dem R die Hyperebene x_0 = Zeit = konst. ist. Nimmt man an, daß $f(z)$ auf R, also zu einer gegebenen Zeit bekannt ist, so zeigt der II. Hauptsatz, daß $f(z)$ in irgend einem andern Momente *durch eine lineare Integralgleichung* gegeben ist. *Dabei hängt der Wert im Punkte z nur von den Werten der Funktion in der Schnittkurve F des Kegels* (1) *mit R ab.* Die Funktion ist eindeutig bestimmt, und es ist die Möglichkeit gegeben, die Funktion nach den Eigenfunktionen der Kern-c-Funktion von VII zu entwickeln. Ich behalte mir vor, in einer weitern Arbeit darauf zurückzukommen.

(Eingegangen den 28. März 1943.)