Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Über gewisse ganze Funktionen vom Exponentialtypus.
Autor: Pfluger, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15543

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über gewisse ganze Funktionen vom Exponentialtypus

Herrn Carathéodory zum siebzigsten Geburtstage gewidmet!

Von A. Pfluger, Fribourg

1. Den Anlaß zur vorliegenden Arbeit gaben die Untersuchungen von *R. Paley* und *N. Wiener*, *M. L. Cartwright* und *N. Levinson*[1]) über ganze Funktionen vom Exponentialtypus[2]).

Wir bezeichnen diese Funktionen mit $\pi(z)$, ihre von null verschiedenen Nullstellen, dem Betrage nach geordnet, mit $z_1, z_2, \ldots, z_n = r_n e^{i\theta_n}, \ldots$, mit $n(r)$ ihre Anzahl in $|z| \leqslant r$ und mit $n_+(r)$ bzw. $n_-(r)$ ihre Anzahl in $|z| \leqslant r$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Die Funktion

$$h(\varphi) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{1}{r} \log |\pi(re^{i\varphi})|$$

heißt Indikator oder Strahltypus und ist Stützfunktion eines konvexen Bereiches, des Indikatordiagrammes der Funktion $\pi(z)$.

Das Hauptresultat der genannten Untersuchungen[3]) lautet dann:

Voraussetzung 1. *Das Indikatordiagramm von $\pi(z)$ ist eine Strecke auf der imaginären Achse.*

Voraussetzung 2. *Der Grenzwert* $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_1^R \log |\pi(x) \cdot \pi(-x)| \cdot \frac{dx}{x^2}$ *existiert*[4]) *und ist endlich.*

---

[1]) a) *R. Paley* and *N. Wiener*, On entire functions, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933).

b) —, Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 19 (1934), chap. 5.

c) *M. L. Cartwright*, On functions which are regular and of finite order in an angle, Proc. London Math. Soc. (2) 38 (1935), p. 158—179.

d) —, On certain integral functions of order 1 and mean type, Proc. Cambridge Phil. Soc. 34 (1935), p. 347—350.

e) *N. Levinson*, On the closure of $\{e^{i\lambda_n x}\}$ and integral functions, Proc. Cambridge Phil. Soc. 31 (1935), p. 335—346.

f) —, Gap and Density Theorems, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 26 (1940).

[2]) d. h. ganze Funktionen für die $|\pi(z)| < e^{K|z|}$ ist.

[3]) Für gerade Funktionen stammt das Resultat von *Paley* und *Wiener*, für beliebiges $\pi(z)$ wurde es von *Cartwright* und *Levinson* bewiesen, zunächst mit andern Voraussetzungen, welche die obigen in sich schließen. Für die vorliegende Form vgl. *N. Levinson* in Fußnote 1 f), S. 25.

[4]) x und y sind im folgenden immer reell.

Schweizer Spende - Bücherhilfe
Don Suisse - Aide par le Livre
Swiss Relief - Book Donations

Behauptung.

a) $$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = 2A > 0 ,$$

b) $$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r)}{r} = A ,$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \theta_n|}{r_n} < \infty .$$

Die Behauptung a) besagt, daß die Nullstellen die Dichte $2A$ besitzen; gemäß b) sind sie in der rechten und linken Halbebene gleich dicht und nach c) schließlich liegen sie hauptsächlich in Richtung der reellen Achse.

Wir stellen die Frage, welchen Anteil jede der Voraussetzungen am Zustandekommen der drei Behauptungen hat. Ist vielleicht die erste Voraussetzung überflüssig? Wenn nicht, worin kommt sie in der Behauptung zum Ausdruck? In der Tat werden wir zeigen, daß aus Voraussetzung 2 allein schon die Behauptungen a) und c) folgen und umgekehrt, und daß erst die Voraussetzung 1 die Behauptung b) nach sich zieht. Als Ganzes läßt sich der Satz nicht umkehren. Dazu ist die Behauptung b) zu schwach. Wodurch ist sie dann zu ersetzen, damit der Satz umkehrbar wird? Oder welches ist unter den Voraussetzungen a) und b) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich das Indikatordiagramm auf eine Strecke der imaginären Achse, oder allgemeiner, auf eine vertikale Strecke reduziert?

2. Die Produktdarstellung ganzer Funktionen der Ordnung 1

$$G(z) = z^m \cdot e^{a+bz} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}}, \tag{2.1}$$

zeigt, daß die Lage jeder einzelnen Nullstelle schon einen wesentlichen Einfluß auf das Wachstum der ganzen Funktion hat; und nicht erst ihre asymptotische Verteilung, wie dies bei nichtganzer Ordnung der Fall ist. Diesbezügliche Untersuchungen von *Wiman*, *Pringsheim*, *Lindelöf* und *Cartwright*[5]) haben gezeigt, daß der Ausdruck

$$S(r) = b + \sum_{|z_n| < r} z_n^{-1}$$

[5]) *A. Wiman*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 1 (1904).
A. Pringsheim, Math. Ann. 58 (1904).
E. Lindelöf, Sur les fonctions entières d'ordre entier, Annales sci. de l'Ecole Normale (3) 22 (1905), p. 369—395.
M. L. Cartwright, Integral functions of integral order, Proc. London Math. Soc. (2) 33 (1932), p. 209—224.

hier von ebenso großer Bedeutung ist wie die Anzahlfunktion $n(r)$. Innerhalb der gegebenen Voraussetzungen werden wir also genau abzuklären haben, welche Rolle der Funktion $S(r)$ beim Zustandekommen des Indikatordiagrammes zugewiesen ist.

Der Faktor $z^m \cdot e^{a+bz}$ in (2.1) bewirkt nur eine Parallelverschiebung des Indikatordiagramms. Wir lassen ihn weg und beschränken uns auf kanonische Produkte der Form

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}} . \tag{2.2}$$

Dann wird

$$S(r) := \sum_{|z_n| < r} z_n^{-1} . \tag{2.3}$$

Die Bedingung

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r)}{r} = 2A \tag{2.4}$$

soll als Grundvoraussetzung im folgenden immer erfüllt sein.

Zunächst behandeln wir den Fall ganzer Funktionen mit lauter reellen Nullstellen und setzen dann $z_n = \lambda_n$.

3. Beginnen wir mit der Betrachtung zweier entgegengesetzter Spezialfälle. Wohlbekannt ist die Situation bei symmetrisch gelegenen Nullstellen.

Satz A. *Es sei*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) . \tag{3.1}$$

Die Anzahlfunktion der reellen Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ *genüge der Bedingung* (2.4).

Dann ist für $\varphi \neq 0$ *und* π [6])

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log |F(re^{i\varphi})| = 2\pi A \, |\sin \varphi| . \tag{3.2}$$

Hier ist das Indikatordiagramm die vertikale Strecke mit den Endpunkten $\pm 2\pi i A$.

Der andere Spezialfall — unsymmetrische Lage, „wenige" Nullstellen — stammt von *M. L. Cartwright* [7]).

---

[6]) Der Grenzwert existiert auch für $\varphi = 0$ und π, wenn r auf einer geeigneten Menge von linearer Dichte 1 gegen ∞ strebt.

[7]) in Fußnote 5, S. 212. Der Satz wird dort allgemein für den Mitteltypus ganzer Ordnungen ρ und beliebige Nullstellen mit $n(r) = o(r^{\rho})$ ausgesprochen.

Satz B. *Sei die Funktion*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n}}$$

vom Exponentialtypus, ihre Nullstellen reell und $n(r) = o(r)$.

Dann ist für $\varphi \neq 0$ *und* π [8])

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{r} \log |f(re^{i\varphi})| - S(r) \cos\varphi\right) = 0 .$$

Mit $\limsup\limits_{r\to\infty} S(r) = p + q$ und $\liminf\limits_{r\to\infty} S(r) = p - q$ folgt dann

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log |f(r^{-i\varphi})| = p \cos\varphi + q\,|\cos\varphi| . \tag{3.3}$$

Hier ist das Indikatordiagramm eine Strecke auf der reellen Achse. Diese Strecke reduziert sich dann und nur dann auf einen Punkt, wenn $S(r)$ konvergiert. Insbesondere ist es der Nullpunkt, wenn die Nullstellen symmetrisch liegen.

4. Das asymptotische Verhalten der beiden Funktionen $F(z)$ (Satz A) und $f(z)$ (Satz B) ist von wesentlich verschiedenem Charakter. In (3.2) existiert der Grenzwert für alle $\varphi \neq 0$ und π, in (3.3) dagegen nur für $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ [9]). Deutlicher wird der Unterschied bei folgender Schreibweise:

$$\frac{1}{r} \log |F(re^{i\varphi})| = 2\pi A\,|\sin\varphi| + \varepsilon(r, \varphi)\ ^{10)} , \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{r} \log |f(re^{i\varphi})| = S(r) \cos\varphi + \varepsilon(r, \varphi) . \tag{4.2}$$

Die Funktionen $2\pi A\,|\sin\varphi|$ und $S(r)\cos\varphi$ charakterisieren das asymptotische Verhalten von $F(z)$ bzw. $f(z)$. Beide, als Funktionen von φ, sind Stützfunktionen konvexer Bereiche, einer Strecke bzw. eines Punktes. Die erste Funktion hängt nur von φ ab, die zweite auch von r. Während bei $r \to \infty$ die Strecke also fest bleibt — „festes Indikatordiagramm — wandert der Punkt auf der reellen Achse hin und her und charakterisiert für jedes r durch seine Lage das Verhalten der Funktion — „bewegliches" Indikatordiagramm.

---

[8]) vgl. Fußnote 6.

[9]) sofern die Strecke sich nicht auf einen Punkt reduziert.

[10]) Für $\varphi \neq 0$ und π gilt $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r, \varphi) = 0$. Es strebt $\varepsilon(r, \varphi)$ auch für $\varphi = 0$ und π gegen Null, wenn r auf einer geeigneten Menge von linearer Dichte 1 gegen ∞ strebt.

Kombinieren wir nun Satz A und B der Nr. 3 durch Betrachtung des Produktes $\pi(z) = f(z) \cdot F(z)$. Gemäß (4.1) und (4.2) gilt

$$\frac{1}{r} \log |\pi(re^{i\varphi})| = S(r) \cos\varphi + 2\pi A |\sin\varphi| + \varepsilon(r, \varphi)\,^{11)} .$$

Hier ist das bewegliche Indikatordiagramm die Strecke mit den Endpunkten $S(r) \pm 2\pi i A$; sie ist parallel zur imaginären Achse und von konstanter Länge $4\pi A$, während ihr Mittelpunkt $S(r)$ auf der reellen Achse hin und her wandert. Bei gleichen Bezeichnungen wie am Schluß der Nr. 3 ist dann

$$h(\varphi) = p \cos\varphi + q |\cos\varphi| + 2\pi A |\sin\varphi| .$$

Das feste Indikatordiagramm ist also ein achsenparalleles Rechteck, das durch die bewegliche Strecke „erzeugt" wird.

Das letztere Beispiel zeigt, daß der Satz in Nr. 1 nicht umkehrbar ist. Denn die Nullstellen von $\pi(z)$ erfüllen die Bedingungen a), b) und c) der Nr. 1, aber das Indikatordiagramm ist im allgemeinen ein Rechteck. Erst wenn $S(r)$ konvergiert, reduziert es sich auf eine vertikale Strecke. Dies läßt aber bereits vermuten, daß die Konvergenz von $S(r)$ die gesuchte notwendige und hinreichende Bedingung ist.

5. Zunächst wollen wir zeigen, daß bei reellen Nullstellen die Bedingung (2.4) mit zwei andern gleichwertig ist.

Satz 1. *Sämtliche Nullstellen des kanonischen Produktes*

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n}}$$

seien reell. — Dann sind die Bedingungen

$$\alpha) \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = 2A ,$$

$$\beta) \qquad \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{|y|} \log |\pi(iy)| = \pi A ,$$

$$\gamma) \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \log |\pi(x)| \cdot \frac{dx}{x^2} = -\pi^2 A\,^{12)}$$

einander äquivalent.

---

[11]) vgl. Anmerkung 10.

[12]) Umgeht man den Nullpunkt zunächst durch einen kleinen Halbkreis, dessen Radius man dann gegen Null streben läßt, so erkennt man wegen $\pi(0) = 1$ sofort, daß das Integral bei $x = 0$ konvergiert.

Der Satz ist eine triviale Verallgemeinerung des bekannten Resultates von *Paley* und *Wiener*[13]) im Falle symmetrischer Nullstellenverteilung und wird durch die Betrachtung der Funktion

$$\pi(z) \cdot \pi(-z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = F(z) \tag{5.1}$$

auf letzteres zurückgeführt. Ersetzen wir nämlich in α, β, γ die Funktion $\pi(z)$ durch $F(z)$ und die rechten Seiten durch B, πB und $-\pi^2 B$, so erhalten wir die Bedingungen von *Paley* und *Wiener*. Die letztern sind aber mit $B = 2A$ den obigen äquivalent, was sich direkt bzw. aus $|\pi(-iy)| = |\pi(iy)|$ sofort ergibt.

In diesem Satze wird von der Funktion nur verlangt, daß sie vom Geschlecht $\leqslant 1$ sei, also die Reihe $\sum \lambda_n^{-2}$ konvergiere. Der Satz ist auch auf ganze Funktionen vom Maximaltypus der Ordnung 1 anwendbar, z. B. die reziproke Gammafunktion.

Die Äquivalenz der Bedingungen α, β, γ gilt unter der Voraussetzung, daß die Nullstellen reell sind. Im allgemeinen ist Bedingung γ die stärkere (vergleiche Nr. 9).

6. Wir nehmen den Gedanken am Schluß der Nr. 4 wieder auf und beweisen

Satz 2. *Sämtliche Nullstellen des kanonischen Produktes $\pi(z)$ seien reell, eine der Bedingungen α, β, γ in Satz 1 erfüllt und $S(r)$ beschränkt.*

Dann ist $\pi(z)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtypus und das Indikatordiagramm von der Breite $2\pi A$, nämlich

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pi A \quad . \tag{6.1}$$

Beweis: Nach einem Satz von *E. Lindelöf*[14]) ist eine ganze Funktion dann und nur dann vom Exponentialtypus, wenn $S(r)$ und $\frac{n(r)}{r}$ für $r \to \infty$ beschränkt sind. Der Rest ergibt sich aus Bedingung β des Satz 1 oder aus folgender Betrachtung.

Wir setzen

$$F(z) = \pi(z) \cdot \pi(-z) \ , \quad \Phi(z) = \frac{\pi(z)}{\pi(-z)} \ . \tag{6.2}$$

Dann ist

$$\pi^2(z) = F(z) \cdot \Phi(z) \ . \tag{6.3}$$

---

[13]) Fußnote 1 b), S. 70 und 74.

[14]) Fußnote 5, S. 375.

Das Verhalten von $F(z)$ ist nach (5.1) und Satz A bekannt. Wegen $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$ und $\Phi(z) \cdot \Phi(-z) = 1$ ist $|\Phi(iy)| = 1$. Daraus folgt (6.1).

7. Wann ist nun das Indikatordiagramm eine vertikale Strecke? Eine notwendige Bedingung ergibt sich sofort aus folgendem Satz von *M. L. Cartwright* [15]: *Gilt für eine ganze Funktion vom Exponentialtypus*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta ,$$

so ist

$$\lim_{r\to\infty} S(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)\, e^{-i\theta} \cdot d\theta .$$

Seien also die Voraussetzungen des Satz 2 erfüllt und das Indikatordiagramm eine vertikale Strecke. Dann ist wegen (6.1)

$$h(\varphi) = p \cos\varphi + \pi A \,|\sin\varphi|$$

und daher

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta = 2A \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta) \cdot e^{-i\theta} \cdot d\theta = p .$$

Gemäß Bedingung α) des Satz 1 ist also die Voraussetzung des obigen Satzes erfüllt und daher $\lim\limits_{r\to\infty} S(r) = p$. Wir werden zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Es gilt also

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen des Satz 2 reduziert sich das Indikatordiagramm dann und nur dann auf eine vertikale Strecke, wenn $S(r)$ konvergiert. Bezeichnet p den Grenzwert, so ist*

$$\frac{1}{r} \log |\pi(re^{i\varphi})| = p \cos\varphi + \pi A \,|\sin\varphi| + \varepsilon(r, \varphi) \text{ [16]} .$$

Wir zeigen noch, daß die Bedingung hinreichend ist. Die verwendete Methode erlaubt es, zugleich einen etwas allgemeinern Satz zu beweisen, der in gewissen Fällen das Zustandekommen des Indikatordiagramms in Satz 2 erklärt.

---

[15]) Fußnote 5, S. 213. Der Satz wird allgemein für den Mitteltypus ganzer Ordnung ausgesprochen, vgl. auch Fußnote 1 c), S. 178.

Satz 4. *Es seien sämtliche Nullstellen des kanonischen Produktes $\pi(z)$ reell, $S(r)$ beschränkt und mit der Bezeichnung der Nr. 1*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r)}{r} = A \ . \tag{7.1}$$

Dann ist

$$\frac{1}{r} \log |\pi(re^{i\varphi})| = S(r) \cos\varphi + \pi A \, |\sin\varphi| + \varepsilon(r, \varphi) \ ^{16)} \ .$$

Das Indikatordiagramm ist ein achsenparalleles Rechteck.

Wie im 3. Beispiel der Nr. 4 ist hier das bewegliche Indikatordiagramm die Strecke mit den Endpunkten $S(r) \pm \pi i A$, welche durch horizontales Oszillieren das Rechteck des Satz 4 erzeugt. Bewiesen wird dies aber nur unter der Zusatzbedingung (7.1). Der allgemeine Fall des Satz 2 konnte noch nicht aufgeklärt werden.

Die Bedingung (7.1) folgt nicht aus der Beschränktheit von $S(r)$, dagegen, in Verbindung mit (2.4) aus der Konvergenz von $S(r)$. Nach einem Satz von *H. Rademacher*[17]) ist nämlich dann $n_+(r) - n_-(r) = o(r)$. Daraus ergibt sich in Verbindung mit (2.4) die Bedingung (7.1).

Damit ist aber gezeigt, daß der noch zu beweisende Teil des Satz 3 in Satz 4 enthalten ist.

8. Beweis von Satz 4. Betrachten wir gemäß (6.3) die beiden Funktionen $F(z)$ und $\Phi(z)$ in (6.2). Nach (7.1) ist die Bedingung (2.4) erfüllt und daher auf $F(z)$ der Satz A anwendbar. Demnach verbleibt uns als eigentliche Aufgabe, das asymptotische Verhalten der meromorphen Funktion $\Phi(z)$ zu untersuchen. Ihre Nullstellen liegen bei $z = \lambda_n$, ihre Pole bei $z = -\lambda_n$ (dabei können gewisse Nullstellen und Pole einander aufheben). Beim Spiegeln am Nullpunkt vertauschen sich die Null- und Polstellen. Bezeichnet also $\varphi(z)$ das kanonische Produkt über die Nullstellen und Pole der positiven reellen Achse, so ist

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi(-z)} \ . \tag{8.1}$$

Es genügt also $\varphi(z)$ zu untersuchen[18]). Für $|\arg z| \neq 0$, mit

[16]) Fußnote 10.

[17]) *H. Rademacher*, Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenzerzeugender Faktoren, Math. Zeitschrift 11 (1921), S. 276—288; insbes. Satz 3, S. 279.

[18]) Im Falle nichtganzer Ordnung vgl. *O. Mäder*, Über das asymptotische Verhalten meromorpher Funktionen bei speziell gegebener Null- und Polstellenverteilung, Dissertation Freiburg, 1942.

$$\Lambda(t) = n_+(t) - n_-(t) \ , \tag{8.2}$$

ist

$$\log \varphi(z) = \int_0^\infty \left\{ \log\left(1 - \frac{z}{t}\right) + \frac{z}{t} \right\} \cdot d\Lambda(t)$$

und nach partieller Integration

$$\log \varphi(z) = -\int_0^\infty \frac{z^2 \Lambda(t)\, dt}{t^2 (t - z)} \ . \tag{8.3}$$

Der Untersuchung des Integrals sei folgendes vorausgeschickt. Gemäß (7.1) und (8.2) existiert eine positive monoton abnehmende Funktion $\eta(r)$, so daß

$$\Lambda(r) < \eta(r) \cdot r \quad \text{für} \quad r \geqslant 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r \to \infty} \eta(r) = 0 \ . \tag{8.4}$$

Nach (2.3) ist

$$S(r) = \int_0^r \frac{d\Lambda(t)}{t} = \frac{\Lambda(r)}{r} + \int_0^r \frac{\Lambda(t)}{t^2}\, dt \ .$$

Wir setzen

$$U(r) = \int_0^r \frac{\Lambda(t)}{t^2}\, dt \ . \tag{8.5}$$

Dann ist

$$| U(r) | \leqslant C \quad \text{und} \quad | S(r) - U(r) | \leqslant \eta(r) \tag{8.6}$$

für $r > 0$ und eine Konstante C, ferner

$$| U(r_2) - U(r_1) | = \left| \int_{r_1}^{r_2} \frac{\Lambda(t)}{t} \cdot \frac{dt}{t} \right| \leqslant \eta(r) \cdot \log k \tag{8.7}$$

für $k > 1$ und $r \leqslant r_1 < r_2 \leqslant kr$.

Um nun das Integral in (8.3) abzuschätzen, zerlegen wir es in drei Teile,

$$\int_0^\infty = \int_0^{2r} + \int_{2r}^{kr} + \int_{kr}^\infty ,$$

und bezeichnen die drei Integrale der Reihe nach mit J_1, J_2 und J_3. Dabei ist $| z | = r$ und $k > 2$.

Durch partielle Integration folgt zunächst

$$J_3 = U(kr)\frac{z^2}{kr - z} + \int_{kr}^{\infty} U(t)\frac{z^2\,dt}{(t-z)^2}$$

und daraus wegen (8.6)

$$|J_3| \leqslant 2\,C\,k^{-1}\cdot r\,. \tag{8.8}$$

Bezeichnen wir den Real- und Imaginärteil von $\frac{1}{t-z}$ mit $R(t)$ und $J(t)$, so ist

$$J_2 = z^2\int_{2r}^{kr}\frac{\Lambda(t)}{t^2}\,[R(t) + iJ(t)]\,dt\,.$$

Im Intervall $2r \leqslant t < \infty$ sind aber $R(t)$ und $J(t)$ positiv und monoton abnehmend. Daher wird nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$J_2 = z^2\left[R(2r)\int_{2r}^{\xi_1}\frac{\Lambda(t)}{t^2}\,dt + iJ(2r)\int_{2r}^{\xi_2}\frac{\Lambda(t)}{t^2}\,dt\right],$$

$$2r < \xi_i < kr\,,\quad i = 1\,,2\,,$$

und daraus wegen $R(2r) \leqslant \frac{3}{r}$, $J(2r) \leqslant \frac{1}{r}$ in Verbindung mit (8.7)

$$|J_2| \leqslant 4\,(\log k)\cdot\eta(r)\cdot r\,. \tag{8.9}$$

Das Integral J_1 wird zerlegt,

$$J_1 = \int_0^{2r}\frac{z\Lambda(t)\,dt}{t(t-z)} - z\int_0^{2r}\frac{\Lambda(t)}{t^2}\,dt\,. \tag{8.10}$$

Nun ist wegen (8.4)

$$\left|\int_0^{k^{-1}r}\frac{z\Lambda(t)\,dt}{t(t-z)}\right| \leqslant -\log\,(1-k^{-1})\,\eta(0)\cdot r < \eta(0)\,k^{-1}\cdot r\,.$$

Für $|\arg z| \geqslant \alpha > 0$ gilt $|t-z| \geqslant \sin\frac{\alpha}{2}(t+r)$ und daher wegen (8.4)

$$\left|\int_{k^{-1}r}^{2r}\frac{z\Lambda(t)\,dt}{t(t-z)}\right| \leqslant \frac{\log 3}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\eta(k^{-1}r)\cdot r < \frac{K}{\alpha}\cdot\eta(k^{-1}r)\cdot r\,.$$

Beide Ungleichungen ergeben in Verbindung mit (8.10) und (8.5)

$$|J_1 + z\,U(2r)| \leqslant \left[\eta(0)\,k^{-1} + \frac{K}{\alpha}\cdot\eta(k^{-1}r)\right]\cdot r \quad . \tag{8.11}$$

Aus (8.8), (8.9) und (8.11) einerseits, aus (8.3), (8.6) und (8.7) anderseits folgt dann für $|\arg z| \geqslant \alpha > 0$

$$|\log\varphi(z) - zS(r)| \leqslant \tag{8.12}$$

$$\left[(2C + \eta(0))\,k^{-1} + \frac{K}{\alpha}\,\eta(k^{-1}r) + (5\log k + 1)\,\eta(r)\right]\cdot r \quad .$$

Bei gegebenem r ist k irgend eine Konstante $> 2r$. Zufolge (8.4) läßt sich nun k derart als Funktion von r wählen, daß $k(r) \to \infty$, $rk^{-1}(r) \to \infty$ und $\eta(r)\log k(r) \to 0$, wenn $r \to \infty$. Dann strebt die eckige Klammer in (8.12) gegen null. Nach (8.1) gilt dann für jedes $\alpha > 0$ in beiden Winkelräumen $\alpha \leqslant |\arg z| \leqslant \pi - \alpha$

$$|\log\Phi(z) - 2S(r)z| \leqslant \eta_1(r)\cdot r, \quad \lim_{r\to\infty}\eta_1(r) = 0 \; .$$

Daraus folgt gemäß (6.3) und Satz A die Behauptung des Satz 4.

9. Wir befreien uns nun von der Voraussetzung, daß alle Nullstellen reell seien. Sie sollen im folgenden wieder mit $z_1, z_2, \ldots, z_n = r_n e^{i\theta_n}, \ldots$ bezeichnet werden. Wir übertragen zunächst einen Teil des Satz 1.

Satz 5. *Es sei das kanonische Produkt*

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}} \tag{9.1}$$

vom Exponentialtypus. Dann sind die Bedingungen

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r} = 2A \;, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin\theta_n|}{r_n} = \pi B < \infty \tag{9.2}$$

und

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\log|\pi(x)|\cdot\frac{dx}{x^2} = -\pi^2 C \neq \pm\infty \tag{9.3}$$

einander äquivalent und es ist

$$A = B + C \geqslant 0 \; . \tag{9.4}$$

Beweis. Wir setzen

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{r_n^2}\right) .$$

Wegen

$$\pi(z)\cdot\pi(-z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{z_n^2}\right)$$

wird dann

$$\log\left|\frac{\pi(x)\cdot\pi(-x)}{F(x)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left|\frac{z_n^2 - x^2}{r_n^2 - x^2}\right| .$$

Die Reihe der rechten Seite ist in jedem endlichen Bereich gleichmäßig konvergent und daher

$$2\int_{-R}^{+R}\log|\pi(x)|\cdot\frac{dx}{x^2} = \int_{-R}^{R}\log|F(x)|\,\frac{dx}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-R}^{R}\log\left|\frac{z_n^2 - x^2}{r_n^2 - x^2}\right|\cdot\frac{dx}{x^2} . \quad (9.5)$$

Wir berechnen die Glieder der letzten Reihe. Die Nullstellen auf der reellen Achse liefern den Beitrag null. Für die andern wählen wir $\varrho > r_n$. Mit Γ bezeichnen wir den geschlossenen Weg von $z = +\varrho$ längs des Halbkreises $|z| = \varrho$ der obern Halbebene bis $z = -\varrho$ und von dort längs der reellen Achse bis $z = \varrho$, indem wir die Stellen $z = \pm r_n$ und $z = 0$ durch kleine Halbkreise der obern Halbebene umgehen. Wir setzen $\varphi(\zeta) = \log\frac{z_n^2 - \zeta^2}{r_n^2 - \zeta^2}$ und integrieren $\varphi(\zeta)\cdot\zeta^{-2}$ längs Γ. Durch partielle Integration folgt dann, indem wir beachten, daß $\varphi(\zeta)$ längs Γ um $2\pi i$ zunimmt,

$$\oint_{\Gamma}\varphi(\zeta)\cdot\frac{d\zeta}{\zeta^2} = -\frac{2\pi i}{\varrho} + \oint_{\Gamma}\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{\varrho} + \frac{2\pi i}{r_n(\cos\theta_n + i\,|\sin\theta_n|)} .$$

Für $\varrho \to \infty$ strebt das Integral über den Halbkreis gegen null. Danach ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\log\left|\frac{z_n^2 - x^2}{r_n^2 - x^2}\right|\cdot\frac{dx}{x^2} = 2\pi\frac{|\sin\theta_n|}{r_n} . \quad (9.6)$$

Der Integrand in (9.6) ist positiv oder identisch null. Die Glieder der Reihe in (9.5) sind daher nie negativ, monoton wachsend und streben gemäß (9.6) gegen den Grenzwert $2\pi\frac{|\sin\theta_n|}{r_n}$, wenn R gegen unendlich

geht. Es strebt also die Reihe in (9.5) gegen $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin\theta_n|}{r_n}$, gleichgültig, ob die letztere konvergiert oder zu $+\infty$ divergiert. Andererseits ist die Anzahlfunktion der Nullstellen bei $F(z)$ gerade doppelt so groß wie bei $\pi(z)$, also gleich $2 \cdot n(r)$ und daher nach Satz 1

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = -\frac{1}{\pi^2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \log |F(x)| \cdot \frac{dx}{x^2}, \tag{9.7}$$

sofern einer der Grenzwerte existiert und endlich ist. Beim Grenzübergang $R \to \infty$ wird somit aus (9.5)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \log |\pi(x)| \frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi^2}{2} \lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin\theta_n|}{r_n}. \tag{9.8}$$

Dies ist so zu verstehen: a) Wenn der Grenzwert (9.7) existiert und endlich ist, so strebt die linke Seite von (9.5) gegen einen Grenzwert oder gegen $+\infty$, je nachdem die Reihe in (9.8) konvergiert oder zu $+\infty$ divergiert; b) wenn der Grenzwert auf der linken Seite von (9.8) existiert und endlich ist, und zugleich die Reihe konvergiert, so existiert auch der Grenzwert (9.7). In beiden Fällen gilt die Gleichung (9.8) bzw. (9.4).

Aus (9.2) folgt also (9.3). Umgekehrt folgt nach einem Resultat von *N. Levinson*[19]) aus (9.3) zunächst der zweite Teil der Bedingung (9.2), nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin\theta_n|}{r_n} = \pi B < \infty. \tag{9.9}$$

In Verbindung mit (9.8) ergeben dann (9.3) und (9.9) zusammen auch den ersten Teil der Bedingung (9.2). Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem Beweis ergibt sich zugleich, daß unter der Voraussetzung (2.4) der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \log |\pi(\varrho e^{i\varphi})| \cdot \pi(-\varrho e^{i\varphi})| \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2}$$

für alle φ existiert, aber nur dann für ein φ endlich wird, wenn gemäß (9.9) die Nullstellen hauptsächlich in dieser Richtung φ liegen[20]).

---

[19]) Fußnote 1 f). Dieses Resultat, das von *Levinson* in schwächerer Form ausgesprochen wurde, ergibt sich aus dem Beweis von Lemma 9.1, S. 28, der nur benützt, daß $\pi(z)$ vom Exponentialtypus ist und das Integral auf der linken Seite (9.5) bei $R \to \infty$ beschränkt bleibt.

[20]) Dies verallgemeinert in Verbindung mit (9.4) einen Satz von *Paley* und *Wiener*, vgl. Fußnote 1 b), Satz 13, S. 75.

10. Nun führen wir unsere allgemeine Aufgabe durch folgenden Hilfssatz auf den Fall reeller Nullstellen zurück.

Hilfssatz. *Das kanonische Produkt $\pi(z)$ sei eine ganze Funktion vom Exponentialtypus, deren Nullstellen der Bedingung* (9.2) *genügen. Wir setzen $\lambda_n = +r_n$, wenn $-\frac{\pi}{2} < \Theta_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\lambda_n = -r_n$, wenn $\frac{\pi}{2} < \Theta_n \leqslant \frac{3}{2}\pi$,*

$$S(r) = \sum_{|z_n| \leqslant r} z_n^{-1}, \quad S_0(r) = \sum_{|\lambda_n| \leqslant r} \lambda_n^{-1}, \tag{10.1}$$

und

$$\pi_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n}}. \tag{10.2}$$

Dann gibt es für jedes $\alpha > 0$ zwei Funktionen $\varepsilon(r,\alpha)$ und $h(r,\alpha)$ mit

$$\lim_{r \to \infty} \varepsilon(r,\alpha) = \lim_{r \to \infty} h(r,\alpha) = 0,$$

so daß die Ungleichung

$$\log \left| \frac{\pi(z)}{\pi_0(z)} \right| - \Re z\,[S(2R) - S_0(2R)] < \varepsilon(R,\alpha) \cdot R \tag{10.3}$$

im ganzen Bereich $|z| \leqslant R$, $\alpha \leqslant |\arg z| \leqslant \pi - \alpha$ erfüllt ist, und die entgegengesetzte Ungleichung

$$\log \left| \frac{\pi(z)}{\pi_0(z)} \right| - \Re z\,[S(2R) - S_0(2R)] > -\varepsilon(R,\alpha) \cdot R \tag{10.4}$$

in demselben Bereich gültig ist, ausgenommen in einem System von Kreislein, deren Radiensumme $< h(R,\alpha) R$ ist.

Daraus folgt sofort unser Hauptresultat. Erfüllt nämlich $\pi(z)$ die Bedingungen (9.2) oder (9.3), so gelten für $\pi_0(z)$ gemäß (10.2) die Voraussetzungen des Satz 2 [21]. Bezeichnen wir die Real- und Imaginärteile von $S(r)$ mit $S'(r)$ und $S''(r)$, ist also $S(r) = S'(r) + iS''(r)$, so strebt $S''(r)$ wegen (9.2) gegen einen Grenzwert. Deshalb ist mit $S(r)$ auch $S'(r)$ und $S_0(r)$ konvergent und umgekehrt (vgl. (11.5)). Anderseits ist nach dem Hilfssatz das asymptotische Verhalten von $\pi(z)$ und $\pi_0(z)$ im wesentlichen analog. Insbesondere darf unter der Voraussetzung (7.1) nach (8.6) und (8.7) in (10.3) und (10.4) $S(2R)$ und $S_0(2R)$ durch $S(r)$ und $S_0(r)$ ersetzt werden, wenn $k^{-1}R \leqslant r \leqslant R$ ist und k hinreichend langsam gegen ∞ strebt. Daher folgt aus den Sätzen 2, 3 und 4 mit $S_0(r)$ an Stelle von $S(r)$.

[21]) $S(r)$ und $S_0(r)$ sind gleichzeitig beschränkt [vgl. (11.5)].

Satz 6. *A. Das kanonische Produkt $\pi(z)$ sei eine ganze Funktion vom Exponentialtypus und eine der Bedingungen* (9.2) *oder* (9.3) *sei erfüllt.*

Dann ist das Indikatordiagramm von der Breite $2\pi A$. Es reduziert sich dann und nur dann auf eine vertikale Strecke, wenn $S(r)$ konvergiert. Bezeichnet $p' - ip''$ diesen Grenzwert, so ist

$$h(\varphi) = p' \cos\varphi + p'' \sin\varphi + \pi A \,|\sin\varphi|\,.$$

B. Unter der Zusatzbedingung (7.1) *gilt*

$$\frac{1}{r}\log|\pi(re^{i\varphi})| = S'(r)\cos\varphi - S''(r)\sin\varphi + \pi A\,|\sin\varphi| + \varepsilon(r,\varphi).$$

Dabei ist auf jedem Strahl $\arg z = \varphi$ $\limsup\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r,\varphi) = 0$ und überdies $\lim \varepsilon(r,\varphi) = 0$, wenn r auf einer geeigneten Menge von linearer Dichte 1 gegen unendlich strebt [22]).

Das Indikatordiagramm ist ein achsenparalleles Rechteck.

Auch hier ist nach B das bewegliche Indikatordiagramm die Strecke mit den Endpunkten $\overline{S(r)} \pm \pi i A$. Weil $S''(r)$ konvergiert, oszilliert diese Strecke im wesentlichen horizontal und erzeugt deshalb asymptotisch ein achsenparalleles Rechteck.

11. Beweis des Hilfssatzes in Nr. 10. Nach Vorgabe eines beliebig kleinen $\delta > 0$ teilen wir die Ebene ein in die Winkelräume $W'(|\arg z| \leqslant \delta,\ |\pi - \arg z| \leqslant \delta)$ und $W''(\delta < |\arg z| < \pi - \delta)$. Die Nullstellen in W' bezeichnen wir mit z'_n, jene in W'' mit z''_n, ihre Anzahlfunktionen entsprechend mit $n'(r)$ bzw. $n''(r)$. Es gibt dann eine in r monoton abnehmende Funktion $\eta(r,\delta)$, so daß für jedes $\delta > 0$

$$n''(r) \leqslant \eta(r,\delta)\cdot r \quad \text{und} \quad \lim_{r\to\infty} \eta(r,\delta) = 0 \tag{11.1}$$

ist. Denn wegen $|\sin\theta''_n| > \sin\delta$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r''_n}$ konvergent und daher $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{r''_n} = 0$.

[22]) Falls $S(r)$ konvergiert, ist $\pi(z)$ von „regulärem asymptotischen Verhalten". Es wird also im vorliegenden Falle durch Satz 6 eine Frage beantwortet, welche unter andern Bedingungen in einer frühern Arbeit [Comm. Math. Helv., 14 (1942), S. 314—349] behandelt wurde. Ist nämlich die ganze Funktion vom Exponentialtypus und regulärem asymptotischen Verhalten, so ist die Nullstellenverteilung „meßbar" und $S(r)$ konvergent. Sind nun umgekehrt die Meßbarkeit der Nullstellenverteilung und die Konvergenz von $S(r)$ auch hinreichende Bedingungen für reguläres asymptotisches Verhalten des zugehörigen kanonischen Produktes? Falls die Nullstellen nach Maßgabe von (9.9) hinreichend genau in Richtung der reellen Achse liegen, ist gemäß Satz 6 diese Frage zu bejahen.

Im folgenden sei $|z| = r \leqq R$. Wir setzen

$$\log H(z) = \sum_{r_n > 2R} \left(\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n}\right) - \sum_{r_n > 2R} \left(\log\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) + \frac{z}{\lambda_n}\right),$$

$$P'(z) = \prod_{r_n' \lesseqgtr 2R} \left(1 - \frac{z}{z_n'}\right) \quad \text{bzw.} \quad P''(z) = \prod_{r_n'' \lesseqgtr 2R} \left(1 - \frac{z}{z_n''}\right) \tag{11.2}$$

und

$$Q'(z) = \prod_{r_n' \lesseqgtr 2R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n'}\right) \quad \text{bzw.} \quad Q''(z) = \prod_{r_n'' \lesseqgtr 2R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n''}\right). \tag{11.3}$$

Dann ist nach (9.1), (10.1) und (10.2)

$$\log \frac{\pi(z)}{\pi_0(z)} = z\,[S(2R) - S_0(2R)] + \log \frac{P''}{Q''} + \log \frac{P'}{Q'} + \log H. \tag{11.4}$$

Wir schätzen die drei letzten Glieder ab.

Zunächst ist

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\lambda_n}\right| = \left|\frac{1 - |\cos\theta_n| - i \sin\theta_n}{r_n}\right| \leqq 3\,\frac{|\sin\theta_n|}{r_n}, \tag{11.5}$$

also gemäß (9.2) die Reihe $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\lambda_n}\right)$ absolut konvergent. Es folgt

$$\log H(z) = \sum_{r_n > 2R} \log\left(1 - \frac{z\left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\lambda_n}\right)}{1 - \frac{z}{\lambda_n}}\right) + z \sum_{r_n > 2R} \left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Wegen $|z| \leqq R$ und $\left|\frac{R}{\lambda_n}\right| < \frac{1}{2}$ ist aber

$$\left|\log\left|1 - \frac{z\left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\lambda_n}\right)}{1 - \frac{z}{\lambda_n}}\right|\right| \leqq 2r\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\lambda_n}\right|$$

und daher

$$|\log|H(z)|| \leqq 9r \sum_{r_n > 2R} \frac{|\sin\theta_n|}{r_n}.$$

Es gilt also für $|z| \leqq R$

$$|\log|H(z)|| \leqq \eta_1(R) \cdot R, \quad \lim_{R \to \infty} \eta_1(R) = 0. \tag{11.6}$$

Zur Abschätzung von $\log \frac{P'}{Q'}$ bezeichnen wir mit C_ν den Bogen $\zeta = r'_\nu e^{i\theta}$, der z'_ν mit λ'_ν verbindet. Sei ferner $\alpha > 0$ und $\delta < \frac{\alpha}{2}$. Für $\alpha \leqslant |\arg z| \leqslant \pi - \alpha$ und ζ auf C_ν gilt dann $|\zeta - z| > \sin\frac{\alpha}{4}(r + r'_\nu)$ und daher

$$\left|\log\left(1 - \frac{z}{z'_\nu}\right) - \log\left(1 - \frac{z}{\lambda'_\nu}\right)\right| = \left|\int_{C_\nu} \frac{z\,d\zeta}{\zeta(z-\zeta)}\right| \leqslant \frac{\delta}{\sin\frac{\alpha}{4}} \cdot \frac{r}{r + r'_\nu} .$$

Wegen (11.2), (11.3) und $n'(r) \leqslant K \cdot r$ wird dann

$$\left|\log\left|\frac{P'(z)}{Q'(z)}\right|\right| \leqslant \frac{\delta}{\sin\frac{\alpha}{4}} \int_0^{2R} \frac{r}{r+t} \cdot d\,n'(t) = \tag{11.7}$$

$$= \frac{\delta \cdot r}{\sin\frac{\alpha}{4}} \left[\frac{n'(2R)}{2R} + \int_0^{2R} \frac{n'(t)\,dt}{(r+t)^2}\right]$$

$$< k\delta \frac{K'}{\alpha} \cdot R \text{ für } k^{-1}R \leqslant |z| \leqslant R \text{ und } \alpha \leqslant |\arg z| \leqslant \pi - \alpha .$$

Zur Abschätzung von $\log \frac{P''}{Q''}$ erinnern wir an einen bekannten Satz von *Bourtroux* und *Cartan*, wonach für jedes $H > 0$

$$\prod_{n=1}^{N} \left|1 - \frac{z}{z_n}\right| > \left(\frac{H}{Re}\right)^N, \quad (|z_n| \leqslant R) \tag{11.8}$$

ist außerhalb eines Systems von höchstens N Kreislein mit der Radiensumme $\leqslant 2H$.

In entgegengesetzter Richtung folgt aus (11.1) für $k^{-1}R \leqslant |z| \leqslant 2R$ ·

$$\left.\begin{matrix}\log|P''(z)| \\ \log|Q''(z)|\end{matrix}\right\} \leqslant \int_0^{2R} \log\left(1 + \frac{2R}{t}\right) \cdot d\,n''(t) =$$

$$= \log 2 \cdot n''(2R) + 2R\left(\int_0^{k^{-1}R} + \int_{k^{-1}R}^{2R}\right) \frac{1}{t + 2R} \cdot \frac{n''(t)}{t}\,dt \leqslant \tag{11.9}$$

$$\leqslant K''\,[\eta(2R, \delta) + \eta(k^{-1}R, \delta) + k^{-1}] \cdot R .$$

Mit $H = 2hR$ folgt dann nach (11.8) und (11.1) in Verbindung mit (11.9) die Ungleichung

$$\left| \log \left| \frac{P''(z)}{Q''(z)} \right| \right| \leqslant K'' \left[(1 + |\log h|)\ \eta(2R, \delta) + \eta(k^{-1}R, \delta) + k^{-1} \right] \cdot R \tag{11.10}$$

im ganzen Kreisring $k^{-1}R \leqslant |z| \leqslant 2R$, ausgenommen ein System von Kreislein mit der Radiensumme $\leqslant 4hR$.

Gemäß (11.1) lassen sich nun δ, k und h derart als Funktionen von R wählen, daß für $R \to \infty$ gilt $\delta(R) \to 0$, $\eta(R, \delta(R)) \to 0$, $h(R) \to 0$, $|\log h(R)| \cdot \eta(2R, \delta(2R)) \to 0$, $k(R) \to \infty$, $k(R)\,\delta(R) \to 0$ und $Rk^{-1}(R) \to \infty$. Es existiert dann nach (11.4), (11.6), (11.7) und (11.10) für jedes $\alpha > 0$ eine Funktion $\varepsilon(R, \alpha)$ mit $\lim\limits_{R \to \infty} \varepsilon(R, \alpha) = 0$, so daß (10.3) und (10.4) im ganzen Bereich $|z| \leqslant R$, $\alpha \leqslant |\arg z| \leqslant \pi - \alpha$ erfüllt sind bis auf ein System von Kreislein mit der Radiensumme $(4h(R) + k^{-1}(R))R$. Da $\dfrac{\pi(z)}{\pi_0(z)}$ in der obern und untern Halbebene regulär ist, so gilt wegen des Maximumprinzips (10.3) im ganzen Bereich $|z| \leqslant R$, $\alpha \leqslant |\arg z| \leqslant \pi - \alpha$, sofern R genügend groß ist.

(Eingegangen den 18. März 1943.)