Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Über die Grenzen der einfachzusammenhängenden Gebiete.
Autor: Aardenne-Ehrenfest, T. van / Wolff, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15567

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Grenzen der einfachzusammenhängenden Gebiete

Von T. van Aardenne-Ehrenfest und
Julius Wolff, Utrecht (Holland)

Primenden *erster Art* der Grenze eines Gebietes sind diejenigen, welche aus nur *einem* Punkte bestehen. Ein solcher Grenzpunkt ist erreichbar. Primenden *zweiter Art* sind diejenigen, welche einen erreichbaren und mindestens *einen* unerreichbaren Grenzpunkt enthalten.

Frau T. van Aardenne-Ehrenfest hat festgestellt, daß aus zwei Sätzen von J. Wolff (siehe Fußnote [1]) und die Behauptung beim untenstehenden Beweise) die negative Beantwortung einer bekannten Frage von Carathéodory hervorgeht:

Satz. *Es gibt kein einfachzusammenhängendes Gebiet, dessen Grenze nur aus Primenden zweiter Art besteht.*

Beweis: Wir nehmen für einen Augenblick an, daß ein Gebiet G vorliege, dessen Grenze g nur aus Primenden zweiter Art bestehe. Wir bilden G konform auf die Halbebene $D(x > 0)$ ab mittels der Abbildungsfunktion $f(z) = f(x + iy)$. Nach einem früher bewiesenen Satz[1]) besteht in jedem Punkte iy der imaginären Axe d der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} f(x + iy) = \varphi(y) \quad . \tag{1}$$

Es sei ε eine positive Zahl. Wir behaupten, daß jedes Rechteck $R(0 < x < a\,;\ b < y < c)$ ein Rechteck $R_1(0 < x < a_1 < a\,;\ b < b_1 < y < c_1 < c)$ enthält, in welchem die Schwankung von $f(z)$ kleiner als ε ist. Zum Beweise nehmen wir für einen Augenblick an, es existiere ein R mit der Eigenschaft, daß in jedem R_1 die Schwankung von $f(z)$ größer oder gleich ε sei. Nach (1) ist $\varphi(y)$ Limes einer stetigen Funktion. Folglich liegen die Stetigkeitspunkte von $\varphi(y)$ überall dicht. Es sei y_0 ein Stetigkeitspunkt des Intervalles $(b < y < c)$ und $i_0(b_0 < y < c_0)$ ein Inter-

---

[1]) La représentation conforme au voisinage d'un point frontière. Proceedings Akad. v. Wetensch., Amsterdam, vol. 45 nº 2, 1942, p. 169—170.

Nach dem dort bewiesenen Satze ist $\varphi(y)$ sogar der Winkellimes von $f(z)$ für $z \to iy$. Mittlerweile sahen wir, daß *R. Nevanlinna* diesen Satz sogar für jede beschränkte holomorphe Funktion in D bewiesen hat (Eindeutige analytische Funktionen, Springer 1936).

vall, das y_0 enthält, innerhalb des Intervalles $(b < y < c)$ liegt und genügend klein ist, damit

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ auf } i_0 . \tag{2}$$

Nach (1) und (2) liegt auf der Halbgeraden $(x > 0,\ y = y_0)$ ein Punkt $z_1 = x_1 + i y_0$ mit den Eigenschaften

$$0 < x_1 < \tfrac{1}{2};\ |f(z) - \varphi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für } 0 < x < x_1,\ y = y_0 . \tag{3}$$

Im Rechteck $R_1(0 < x < x_1;\ b_0 < y < c_0)$ soll nach Voraussetzung die Schwankung von $f(z)$ größer oder gleich ε sein. Folglich enthält R_1 einen Punkt $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ mit $|f(\zeta_1) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3}$. Wegen der Stetigkeit von $f(z)$ in D besteht ein Intervall i_1 innerhalb R_1, das ζ_1 enthält, parallel zur imaginären Axe d ist und genügend klein, damit

$$|f(z) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Punkt von } i_1 . \tag{4}$$

Nach (1) und (2) liegt auf der Halbgeraden $(x > 0,\ y = \eta_1)$ ein Punkt $z_2 = x_2 + i\eta_1$ mit den Eigenschaften

$$0 < x_2 < \xi_1\ ;\ \ 0 < x_2 < \frac{1}{2^2};\ |f(z) - \varphi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{für } 0<x<x_2,\ y=\eta_1 . \tag{5}$$

Im offenen Rechteck R_2, zwischen den beiden Projektionen von i_1 auf d und auf die Gerade $x = x_2$, soll die Schwankung von $f(z)$ größer oder gleich ε sein. Folglich enthält R_2 einen Punkt $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ mit $|f(\zeta_2) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3}$, also ein Intervall i_2 innerhalb R_2, das ζ_2 enthält, parallel zu d ist und genügend klein, damit

$$|f(z) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Punkt von } i_2 . \tag{6}$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine unendliche Folge von Intervallen i_n, parallel zu d, deren Abszissen kleiner als $\frac{1}{2^n}$, so beschaffen, daß für $n = 1, 2, \ldots$ die Projektion von i_{n+1} auf d innerhalb derjenigen von i_n liegt, und daß

$$|f(z) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Punkt jedes } i_n . \tag{7}$$

Es existiert eine Gerade $y = h$, welche jedes i_n schneidet. Nach (1) und (7) ist

$$| \varphi(h) - \varphi(y_0) | \geqq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \tag{8}$$

Nach (2) aber ist

$$| \varphi(h) - \varphi(y_0) | \leqq \frac{\varepsilon}{4} \cdot \tag{9}$$

Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung. Daraus aber ergibt sich wegen der Willkür von ε, daß diejenigen Punkte iy auf d, wo $\varphi(y)$ *zweidimensionaler* Limes von $f(z)$ ist, ein Residuel (nach der Denjoy'schen Benennung) M bilden, das heißt: die Komplementärmenge von M besteht aus höchstens abzählbar vielen nirgends dichten Punktmengen; also enthält jedes Intervall auf d eine perfekte Teilmenge von M. Weil den Punkten von M Primenden erster Art auf der Grenze von G entsprechen, ist nicht nur unser Satz bewiesen, sondern sogar folgender schärfere

Satz. *Hat die Grenze g eines einfachzusammenhängenden Gebietes G nur Primenden erster und zweiter Art, so hat die Menge m der Primenden erster Art die Mächtigkeit des Kontinuums. Bei Abbildung von G auf die Halbebene D entspricht m einem Residuel auf der Begrenzungsgeraden d von D.*

(Eingegangen den 20. April 1944.)