

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Alcune questioni sulla forma cubica dello spazio a cinque dimensioni.
Autor: Fano, Gino di
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-15563>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Alcune questioni sulla forma cubica dello spazio a cinque dimensioni

Di GINO FANO, Lausanne

In una mia Memoria del 1904¹⁾ ho trattato alcune questioni di carattere proiettivo sulla forma (o varietà) cubica generale dello spazio a quattro dimensioni. Alcune di esse si estendono facilmente agli spazi superiori; non tutte. D'altra parte un lavoro recente di E. G. Togliatti²⁾ ha considerata una particolare superficie del 5° ordine dello spazio ordinario, ottenuta come contorno apparente di una forma cubica generale dello spazio a cinque dimensioni rispetto a una sua retta generica, cioè come luogo delle tracce su un S_3 fisso dei piani passanti per questa retta e incontranti ulteriormente la forma cubica in coppie di rette. E in tale ricerca, che muove essenzialmente dall'equazione della detta superficie, non è fatto cenno delle relazioni tra le proprietà di questa superficie e quelle della forma cubica dianzi menzionata; relazioni importanti, poichè le prime derivano appunto da queste ultime. Sembra perciò opportuno, anche in vista di possibili ulteriori sviluppi, chiarire tali relazioni; e ciò mi dà pure occasione di estendere alla forma cubica di S_5 alcune fra le proprietà esposte nella mia Memoria cit.

1. Una forma cubica dello spazio a cinque dimensioni (V_4^3 , o brevemente V), che supponiamo priva di punti doppi, contiene ∞^4 rette; per ogni suo punto ne passano ∞^1 , costituenti un cono Γ^6 (di ordine 6, e di genere virtuale 4). Fra gli ∞^9 piani dello spazio ambiente S_5 , ∞^6 incontrano V in terne di rette, cioè sono ad essa tritangenti; fra questi, ∞^5 l'incontrano in terne di rette di un fascio (ogni punto di V è centro di ∞^1 fra queste terne, i cui piani sono quelli passanti per questo punto e contenuti nella quadrica polare del punto stesso); e ∞^4 in terne di rette di cui due coincidono. Se r è una retta generica contenuta in V , e P un punto qualunque di questa retta, il piano ρ tangente lungo r al cono Γ^6

¹⁾ Ricerche sulla varietà cubica generale..., Ann. di Matem (3), vol. 10 (1904), p. 251. Questa Memoria verrà indicata in seguito semplicemente con „Ann. di Matem.“. V. anche la mia Nota: Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piana generale, Comm. Mathem. Helvetici, vol. 12 (1939—40), p. 172; in part. n. 2, 3.

²⁾ Una notevole superficie di 5° ordine con soli punti doppi isolati, Festschrift *Rudolf Fueter*, Beiblatt zur Vierteljahrschrift der Naturf. Ges. in Zürich, Zürich 1940.

uscende da P incontra V secondo r stessa contata due volte e una retta ulteriore t , non passante in generale per P . Questo piano ρ è tangente a V lungo l'intera retta r ; è per conseguenza contenuto in tutti gli spazi S_4 tangenti a V nei singoli punti di r , ed è l'asse del S_2 -cono quadrico involupato da tali S_4 . Esso è pure tangente lungo r agli analoghi coni Γ^6 uscenti dagli altri punti di r . Gli ∞^2 spazi S_3 passanti pel piano ρ incontrano V secondo superficie cubiche φ^3 con due punti doppi, variabili su r e in generale distinti; sono cioè bitangenti a V . I due punti doppi coincidono in uno del tipo B_4 (cioè biplanare, colla r come intersezione dei due piani tangenti³⁾) quando lo spazio S_3 è tangente lungo r al cono quadrico che contiene il Γ^6 uscente da quel punto. Un S_4 generico passante pel piano ρ non è tangente a V , ma l'incontra in una V_3^3 per la quale r è retta "speciale",⁴⁾. Vi sono in tutto ∞^4 piani ρ , e ogni S_4 (iperpiano dello spazio ambiente S_5) ne contiene ∞^1 .

Delle ∞^3 rette di V infinitamente vicine ad r soltanto ∞^1 sono ad essa incidenti, nei singoli fasci che contengono r entro il piano ρ .

2. I punti dello spazio S_5 hanno rispetto a V altrettante quadriche polari formanti un sistema lineare ∞^5 , Σ , privo di punti basi. Fra queste, ∞^4 sono coni, e ∞^2 sono S_1 -coni. Se un punto A ha per quadrica polare un cono di vertice A' , la relazione fra questi due punti è reciproca; e A, A' sono anche punti reciproci rispetto a tutte le quadriche del sistema Σ . Luogo di queste coppie A, A' è la varietà Hessiana H di V , di 6° ordine, sulla quale le coppie AA' costituiscono un'involuzione T (e gli assi degli S_1 -coni ne sono rette fondamentali). I sistemi lineari ∞^4 generici contenuti in Σ hanno gruppi basi di 32 punti (G_{32}), formanti nello spazio S_5 un'involuzione K_{32} ; e i punti di ciascun gruppo, essendo contenuti nelle stesse ∞^4 quadriche, hanno rispetto a V uno stesso S_4 polare. Una retta generica di S_5 sta su ∞^2 quadriche di Σ ; ma ogni retta congiungente due punti di uno stesso gruppo G_{32} sta su ∞^3 di tali quadriche; e su ciascuna di queste rette le quadriche di Σ segnano le ∞^1 coppie di un'involuzione I_2 , le quali appartengono a altrettanti diversi G_{32} . Viceversa, ogni retta contenuta in ∞^3 quadriche di Σ , anzichè in sole ∞^2 , è sostegno di una I_2 del tipo anzidetto⁵⁾; e queste rette, complessivamente in numero

³⁾ Faremo uso della notazione abituale, indicando con B un punto doppio biplanare, e coll'indice la diminuzione da esso portata alla classe della superficie.

⁴⁾ Nel senso di cui in Ann. di Matem., n. 2 e seg.

⁵⁾ Nessuna retta può appartenere a ∞^4 quadriche del sistema Σ , perchè in caso contrario questo sistema avrebbe su di essa qualche punto base.

di ∞^4 , si diranno rette “speciali,,⁶⁾. I punti doppi delle involuzioni I_2 sono anche doppi per gruppi G_{32} , e vertici di cono del sistema Σ , cioè punti della varietà Hessiana H ; e i due punti doppi di una stessa I_2 sono altresì coppie AA' (affatto generiche) dell'involuzione T su H . Le ∞^3 quadriche del sistema Σ passanti per una retta speciale s s'incontrano ulteriormente in una curva C_{14}^{15} (di ordine 15, genere 14) “residua,, di s , luogo degli ulteriori coniugati dei punti di s nella K_{32} , e 4-secante s . Ciascuna di queste 4 intersezioni è anche punto doppio di un gruppo G_{32} , e quindi di una I_2 , generalmente su altra retta speciale; sicchè questi pure sono punti di H , completandone così le $2 + 4 = 6$ intersezioni con s . Le ∞^3 quadriche di Σ passanti per s e per la curva residua sono polari dei punti di uno spazio S_3 ; perciò gli S_4 polari dei punti di s rispetto a V passano per questo S_3 , e formano un fascio.

Se una retta speciale s ha a comune con V i due punti di una coppia della sua involuzione I_2 , lo spazio S_4 polare comune di questi punti sarà tangente a V in entrambi; e l'intera s starà su V . Vi sarà perciò un fascio di spazi S_4 tutti bitangenti a V nelle singole coppie della stessa I_2 ; e lo spazio S_3 asse del fascio incontrerà V in una superficie cubica avente l'intera s come retta doppia, cioè in una rigata cubica R^3 di direttrice s . La varietà V ha ∞^3 spazi S_4 bitangenti; contiene ∞^2 rette speciali, le cui involuzioni I_2 costituiscono le coppie di punti di contatto di quegli S_4 bitangenti; e contiene perciò anche ∞^2 rigate cubiche⁷⁾. Le ∞^2 rette speciali contenute in V hanno per luogo una varietà M_3 , intersezione completa di V con altra forma⁸⁾, di cui al n° seguente determineremo l'ordine. Ogni retta speciale contenuta in V è generatrice doppia del cono Γ^6 uscente da ciascuno dei suoi punti; e ogni S_4 passante per una di queste rette incontra V in una V_3^3 per la quale la stessa retta è pure speciale.

Ogni retta speciale s contenuta in V è incidente a ∞^2 fra le rette di V ad essa infinitamente vicine, nei singoli fasci che la contengono entro lo

⁶⁾ La considerazione delle rette speciali può estendersi a qualunque sistema lineare ∞^5 di quadriche dello spazio S_5 , anche se queste non sono le prime polari dei punti di questo spazio rispetto a una forma cubica. E così per un sistema lineare ∞^n di quadriche in S_n . In due altri miei lavori (Mem. R. Accad. Torino (2), vol. 51 (1901), p. 1; Rend. Circolo Matem. Palermo, vol. 29 (1910), p. 98) le ho chiamate, per $n = 3$, rette “principali,, traducendo così il termine tedesco „Hauptstrahlen“, usato da *Th. Reye* e altri; ma nel caso presente, per questioni concernenti forme cubiche, preferisco conservare il nome di rette “speciali,, già prima adottato da *Enriques* (Giorn. di Matem., vol. 31 (1893), p. 31).

⁷⁾ Fra queste, ∞^1 sono rigate di *Cayley*, cioè colla retta doppia direttrice rettilinea unica e in pari tempo generatrice; in corrispondenza a quelle rette speciali lungo le quali V ammette un piano osculatore fisso.

⁸⁾ *Severi*, Rend. R. Accad. Lincei (5), vol. 15 (1906)₂, p. 691.

spazio S_3 tangente a V lungo di essa; ma fra queste ∞^2 non vi è generalmente nessuna retta speciale. I piani passanti per s e non contenuti nel detto S_3 determinano con questo S_3 spazi S_4 bitangenti a V ; e se segano ulteriormente V in coppie di rette, queste rette passeranno rispettivamente per i due punti di contatto di quell' S_4 .

Come immediata estensione di proprietà già note per lo spazio S_3 e S_4 ⁹⁾, una retta speciale s contenuta nella varietà V è bitangente alla Hessiana nei punti doppi dell'involuzione I_2 su di essa; la sua C_{14}^{15} residua si appoggia ad essa in questi punti e nelle due intersezioni residue di s colla H ¹⁰⁾.

3. Sia ora r una retta non speciale pel sistema di quadriche Σ . I coniugati dei punti di r nell'involuzione K_{32} hanno per luogo una curva γ di ordine 31 (dovendo essere incontrata da una quadrica generica del sistema Σ nei 31.2 punti coniugati dei due in cui la stessa quadrica incontra r) ¹¹⁾. Le due linee r e γ hanno a comune i 6 punti intersezioni di r colla Hessiana H di V , e sono fra loro in corrispondenza (1,31), coi 6 punti anzidetti come uniti. Generano pertanto una rigata R^{56} , avente r come direttrice 31^{pla} e γ come direttrice semplice, e le cui generatrici sono le rette speciali appoggiate a r e per conseguenza anche a γ .

Supponiamo ora la retta non speciale r contenuta nella varietà V . Le quadriche Q polari dei punti di r contengono allora tutta questa retta, e quindi anche la curva γ sua coniugata nell'involuzione K_{32} (curva che starà perciò sulla M_3^4 base del loro fascio). Esse segano ogni piano congiungente r a un punto C di γ , all'infuori di r , secondo rette passanti per C , e che sono le polari dei singoli punti di r rispetto alla conica intersezione ulteriore di questo medesimo piano con V . Una di queste rette è sempre generatrice della rigata R^{56} . Quando C cade in una, M , delle 6 intersezioni di γ colla r , la Q polare di M è un cono di vertice $M' \neq M$, contenente il piano $M'r$; e questo piano incontra V , all'infuori di r , in

⁹⁾ Cfr. p. es. Ann. di Matem., n. 4.

¹⁰⁾ La C_{14}^{15} è tangente a V nei primi due punti e osculatrice negli ultimi due (Ann. di Matem., n. 15); incontra perciò ulteriormente V in $15.3 - (2.2 + 3.2) = 35$ punti. Da ciò si trae che in ogni fascio di S_4 bitangenti a V vi sono 35 spazi tritangenti. — Più generalmente, ogni fascio di iperpiani bitangenti a una forma cubica generale di S_n ($n > 2$) contiene $3(2^{n-1} - n) + 2$ iperpiani tritangenti.

¹¹⁾ Quando r è una retta speciale, la curva γ^{31} si spezza in questa stessa retta (che di ogni suo punto contiene allora un coniugato) e nella C_{14}^{15} residua contata due volte. Il genere di γ (che non interessa però pel seguito) è 60 (e, per la curva analoga in uno spazio S_n , è $(n-1)(2^{n-1}-1)$). Lo si può determinare facilmente nel caso in cui il sistema Σ si compone delle quadriche aventi un dato simplex autopolare, poichè la curva in parola è allora composta delle rette che corrispondono a r nelle singole omografie involutorie aventi come spazi di punti uniti le coppie di elementi opposti del detto simplex.

una coppia di rette passanti pure per M . Le Q polari dei punti di r incontrano perciò questo stesso piano in una retta fissa: la coniugata armonica di r rispetto a queste ultime due rette, la quale sarà pure generatrice di R^{56} . La tangente a γ nel punto M starà anch'essa nel piano $M'r$, e quindi nel cono quadrico polare di M ; sarà dunque tangente tripunta di V in M . Infine il piano osculatore a γ in M è a sua volta contenuto nello spazio S_4 tangente in M al detto cono quadrico¹²⁾ e quindi a V ; e perciò la curva γ , tangente in M a una tangente tripunta di V e ivi osculatrice a un piano tangente a V , sarà osculatrice a V in M , vale a dire in tutte le 6 sue intersezioni con r ¹³⁾.

All'infuori di questi 6 punti, le intersezioni della linea γ colla forma V saranno in numero di $31.3 - 3.6 = 75$. E saranno punti della linea γ , aventi ciascuno sulla r uno dei propri coniugati nell'involuzione K_{32} ; quello e questo appartenenti a V , e congiunti da una retta speciale, che starà per conseguenza pur essa su V . Saranno dunque queste, tutte e soltanto, le rette speciali contenute in V e appoggiate alla r ; vale a dire: *Il luogo delle rette speciali contenute in V è una varietà M_3^{225} , intersezione di V con una forma di ordine 75* ¹⁴⁾ ¹⁵⁾ ¹⁶⁾.

¹²⁾ Rappresentiamo la curva γ nell'intorno di M , in coordinate non omogenee, colle equazioni parametriche $x_i = a_i t^i + \dots$ ($i = 1, 2, \dots, 5$), dove i termini non scritti contengono t a grado maggiore di i , e $a_1, a_2 \neq 0$; e il cono quadrico M' (o anche una qualunque ipersuperficie) contenente γ e la sua tangente in M coll'equazione

$$A_2 x_2 + \dots + A_5 x_5 = 0.$$

Sostituendo in questa le espressioni delle x_i , dovremo avere un'identità, e dovrà perciò mancare l'unico termine eventuale in t^2 ; vale a dire il polinomio A_2 dovrà mancare del termine noto. L'equazione dell' S_4 tangente in M al cono o ipersuperficie dovrà perciò essere soddisfatta per $x_3 = x_4 = x_5 = 0$; ossia questo S_4 conterrà il piano osculatore a γ in M .

¹³⁾ Per i casi analoghi negli spazi S_3 e S_4 cfr. Ann. di Matem., n. 13—16.

¹⁴⁾ Le singole generatrici della rigata R^{56} incontrano V , oltre che sulla retta r direttrice 31^{pla} di R^{56} , nei punti di una linea che ha 6 punti doppi nelle intersezioni di γ colla r (dove le generatrici MM' sono tangenti tripunte di V) e $25.2 = 50$ altri punti in ogni spazio S_4 passante per r : curva perciò di ordine 62. L'ulteriore intersezione di R^{56} con V , di ordine $56.3 - (31 + 62) = 75$, è appunto costituita dalle 75 rette speciali contenute in V e appoggiate a r .

¹⁵⁾ Per una forma cubica di S_4 il numero (30) delle rette speciali appoggiate a una sua retta generica r è stato da me determinato in Ann. di Matem. n. 8, 9 per vie completamente diverse da quella qui usata nello spazio S_5 . Nello spazio S_4 la curva analoga a γ è di ordine 15 e si appoggia a r in cinque punti, nei quali è del pari osculatrice alla forma cubica; e si ha appunto $15.3 - 3.5 = 30$. In generale, per una forma cubica di S_n questo numero è $3(2^n - n - 2)$. Per $n = 3$ le 27 rette di una superficie cubica generale sono tutte rette speciali e costituiscono l'intersezione completa con una superficie di ordine 9.

¹⁶⁾ Nello spazio S_3 la congruenza (7,3) delle rette speciali (o principali) di un sistema lineare ∞^3 di quadriche senza punti basi — in particolare delle quadriche polari rispetto a una superficie generale del 3° ordine — dà un esempio molto semplice di superficie regolare di genere zero e bigenere uno (cfr. i miei lavori Mem. R. Accad. di Torino (2), vol. 51

4. Data una forma cubica generale di S_4 , i piani che passano per una sua retta generica r e incontrano ulteriormente la forma in coppie di rette danno come tracce su un piano generico π i punti di una curva generale di 5° ordine; i piani delle coniche tangenti a r danno i punti di una conica 5-tangente alla quintica; gli spazi S_3 tangenti alla forma nei punti di r danno le tangenti di questa conica; i piani delle 5 coppie di rette della forma che appartengono con r ad un fascio danno i 5 punti di contatto delle due linee anzidette del piano π ¹⁷⁾.

Era perciò a prevedere, passando allo spazio S_5 , che i piani condotti per una retta r di una forma cubica V e incontranti ulteriormente questa in coppie di rette avessero come tracce su di un generico S_3 i punti di una superficie F^5 del 5° ordine; i piani delle coppie di rette formanti fascio con r , i punti di una curva di 5° ordine δ^5 contenuta in F^5 ; e gli spazi S_4 tangenti a V nei punti di r , gli ∞^1 piani inviluppanti una quadrica, e precisamente un cono quadrico Δ tangente alla F^5 lungo la curva δ^5 ¹⁸⁾.

Le stesse considerazioni analitiche esposte per la forma cubica di S_4 al n. 2 del mio lavoro cit. di questi C.M.H., vol. 12, si possono ripetere per la forma V di S_5 , colla sola differenza di una variabile in più. Assunta la r come retta $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, la V può rappresentarsi con un'equazione:

$$a_1 x_4^2 + 2b_1 x_4 x_5 + c_1 x_5^2 + 2a_2 x_4 + 2b_2 x_5 + a_3 = 0 \quad (1)$$

(1901), p. 1, in part. § 14; Rend. Circolo Matem. Palermo, vol. 29 (1910), p. 98). Ho voluto perciò esaminare se l'analogo sistema ∞^3 di rette speciali di S_4 (Ann. di Matem., in part. n. 2, 3) costituisse una varietà a 3 dimensioni anche di genere zero, tale da dar lume sulla questione ancora incerta delle condizioni di razionalità di queste ultime varietà. Ma non è così; si tratta — nello spazio S_9 della Grassmanniana delle rette di S_4 — di una varietà di genere uno a superficie-sezioni canoniche. L'ordine della varietà è ad. es. quello della rigata intersezione del sistema ∞^3 delle rette speciali con due complessi lineari; in particolare della rigata delle rette incidenti a due piani dati, e composta a sua volta, se i due piani stanno in un S_3 e perciò si incontrano in una retta l , di due rigate; l'una avente la l come direttrice, l'altra R contenuta nel detto spazio S_3 . La prima, analoga alla R^{56} qui considerata nel testo, è di ordine 25 e genere 21. Quanto alla seconda, occorre considerare la superficie f^5 intersezione dello spazio S_3 colla Hessiana della forma cubica; la curva C_{11}^{10} intersezione di f^5 colla (ossia sezione iperpiana della) superficie luogo dei punti coniugati di quelli di f^5 nell'involuzione (analoga alla T del n. 2) delle coppie di punti reciproci rispetto a tutte le quadriche del sistema ∞^4 ; e su questa C_{11}^{10} , coniugata di sè stessa, l'involuzione γ_2^1 delle coppie in essa contenute; involuzione priva di punti doppi, e perciò di genere 6. Questa γ_2^1 genera la rigata R richiesta, di ordine 10 e genere 6, avente a comune colla prima 10 generatrici. Il sistema ∞^3 di rette considerato ha quindi per immagine una varietà M^{35} di S_9 , a curve-sezioni di genere $21 + 6 + 10 - 1 = 36$, e le cui superficie-sezioni sono superficie canoniche di genere 9: varietà pertanto di genere uno.

¹⁷⁾ V. il mio lavoro cit. di questi Comm. Mathem. Helvet., vol. 12, n. 2, 3, e altri lavori ivi menzionati.

¹⁸⁾ Togliatti, l. c.

dove le a, b, c sono forme nelle x_0, x_1, x_2, x_3 di grado eguale all'indice. La quadrica polare di un punto generico di r , e sia $(0, 0, 0, 0, x'_4, x'_5)$, è:

$$x'_4(a_1 x_4 + b_1 x_5 + a_2) + x'_5(b_1 x_4 + c_1 x_5 + b_2) = 0 ;$$

e lo spazio S_4 tangente comune a V e a questa quadrica nel medesimo punto è:

$$a_1 x_4'^2 + 2b_1 x'_4 x'_5 + c_1 x_5'^2 = 0$$

contenente le sole variabili x_0, x_1, x_2, x_3 che compaiono nelle a, b, c . Questi ∞^1 spazi S_4 hanno a comune il piano $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, che è il piano ρ del n. 1. Il loro involuppo $a_1 c_1 - b_1^2 = 0$, interpretandone l'equazione nello spazio (S_3) $x_4 = x_5 = 0$, è il cono Δ . La superficie F^5 si rappresenta (come l'analoga C^5 nel piano π) scrivendo che è nullo il discriminante della (1), come equazione nelle due variabili x_4, x_5 :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & c_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 ; \quad (2)$$

equazione che è appunto la (3) di Togliatti, l. c. E la curva δ^5 di contatto di questa superficie col cono Δ ha per equazione:

$$\left\| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & c_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\| = 0 ;$$

è dunque di genere 2, come intersezione del cono Δ con una superficie cubica, all'infuori di una retta¹⁹⁾.

¹⁹⁾ Se alla retta generica r della forma cubica V si sostituisce una retta speciale s , lungo la quale cioè gli spazi S_4 tangenti a V siano tutti bitangenti nelle coppie di punti di un'involuzione, potremo prendere come punti fondamentali 4 e 5 i punti doppi di questa involuzione. Questi saranno allora reciproci rispetto a tutte le coniche intersezioni di V coi piani passanti per s ; e sarà identicamente nullo il polinomio b_1 . Il cono Δ si spezza pertanto come luogo nei due piani $a_1 = 0, c_1 = 0$, e come involuppo nel loro fascio contato due volte; e la curva δ^5 si spezza nella retta $a_1 = c_1 = 0$ e nelle due coniche $a_1 = a_2 = 0$ e $c_1 = b_2 = 0$. I punti di δ^5 provengono infatti dai piani che passano per s e incontrano V secondo terne di rette di un fascio; e queste terne nel caso presente o stanno nello spazio $a_1 = c_1 = 0$, che sega V in una rigata cubica, e comprendono allora fra le tre rette la s come doppia; oppure escono da uno dei due punti 4 e 5, le cui quadriche polari sono coni e contengono infiniti piani passanti per s . L'equazione della superficie F^5 è in tal caso $a_1 c_1 a_3 - a_1 b_2^2 - c_1 a_2^2 = 0$; essa è tangente ai piani $a_1 = 0$ e $c_1 = 0$ rispett. lungo le coniche $a_1 = a_2 = 0$ e $c_1 = b_2 = 0$, e ha su ciascuna di queste 8 punti doppi ($a_1 = a_2 = c_1 a_3 - b_2^2 = 0$, risp. $c_1 = b_2 = a_1 a_3 - a_2^2 = 0$).

Criterio di massima per stabilire la molteplicità di un punto P di F^5 per questa superficie, o per le sue intersezioni con piani e rette, sarà di considerare la superficie φ^3 intersezione di V con uno spazio S_3 passante pel piano rP — spazio rispett. generico, contenuto nell' S_4 proiettante il piano, o esso medesimo proiettante la retta considerata —, e esaminare quanti tra i piani tritangenti di questa φ^3 che passano per r sono assorbiti dal piano rP . In massima ogni S_4 passante per r e tangente a V in un punto non appartenente a r darà un piano tangente a F^5 in un suo punto generico, e viceversa; dovranno perciò coincidere la classe di V e quella di F^5 . E poichè la prima vale $3 \cdot 2^4 = 48$, mentre una superficie generale del 5° ordine è di classe $5 \cdot 4^2 = 80$, la differenza $80 - 48 = 32$ dipenderà da punti doppi isolati di F^5 ; i quali pertanto, se di tipo generale (conici), saranno in numero di 16 ²⁰).

Gli spazi S_4 tangenti a V nei punti della retta r daranno piani tangenti comuni a F^5 e al cono Δ . Ciascuno di questi S_4 contiene due piani passanti per r e incontranti ulteriormente V in coppie di rette che formano fascio con r ; e ogni S_3 condotto genericamente per uno di questi piani entro quell' S_4 sega una superficie φ^3 con punto biplanare, per la quale il piano considerato assorbe *due* fra i piani tritangenti passanti per r . I piani tangenti del cono Δ sono pertanto tutti (come è ovvio) bitangenti a F^5 , in coppie di punti della curva δ^5 appartenenti alle singole generatrici di quel cono. In particolare δ^5 sarà essa stessa tangente a *sei* generatrici del cono Δ ; e si avranno così 6 piani bitangenti a F^5 in coppie di punti infinitamente vicini — incontranti perciò F^5 in curve con tacnodo — e tracce degli S_4 tangenti a V nelle intersezioni della retta r colla Hessiana di V .

5. Perchè un punto P sia doppio per la superficie F^5 è necessario e sufficiente che per ogni φ^3 segata da un S_3 contenente il piano rP questo piano assorba almeno due fra i piani tritangenti che passano per r . E ciò non avviene certo, se V non ha punti doppi, qualora il piano rP incontri V in tre rette distinte. Avviene invece sempre se il piano rP incontra V , all'infuori di r , in una coppia di rette coincidenti²¹). Questo è un caso particolare di 3 rette di un fascio; perciò i punti doppi di F^5 stanno sulla curva δ^5 . Questa curva è proiettata da r secondo una M_3^5 ,

²⁰) E così è realmente (cfr. anche le ultime due linee della nota ¹⁹)). Sono i 16 punti che annullano tutti i minori di 2° ordine del determinante simmetrico (2); il loro numero fu determinato, per un determinante simmetrico di tipo anche più generale, da *Giambelli* (Atti. R. Accad. di Torino, vol. 41 (1905), p. 102).

²¹) È escluso ovviamente anche il caso in cui r conti essa doppiamente nella terna di rette, come pel piano ϱ del n. 1.

S_1 -cono, che incontra V in una rigata R^{15} di direttrice r . Ogni piano della M_3^5 contiene due generatrici di questa rigata, coniugate in un'involuzione γ_2^1 , le quali si proiettano in uno stesso punto della curva δ^5 ; e i punti doppi di F^5 provengono dalle coppie di generatrici coincidenti, cioè dagli elementi doppi dell'involuzione γ_2^1 . Il numero d di questi elementi doppi è dato da una formola di Schubert²²), la quale per $\nu = 1$ (trattandosi di involuzione), $m = k + 1 = 2$, $n = 15$ (ordine della rigata), $\mu = 5$ (ordine della M_3^5), si riduce a:

$$z = 10 - \frac{1}{2} d$$

dove z è il numero dei punti doppi della curva sezione generica di R^{15} che non sono tali in senso invariante per l'involuzione sezione della γ_2^1 . Ora questa curva ha due punti doppi, sovrapposti a un punto semplice, sulla r ; quindi $z = 2$, e $d = 16$.

Se la retta r incontra una retta speciale s contenuta in V in modo generico, cioè senza essere generatrice della rigata cubica R^3 di direttrice s (in altri termini, senza che la r stia nello spazio S_3 di questa rigata), il piano rs incontrerà V in una terza retta distinta da r, s . Però lo spazio tangente a V nel punto rs sarà tangente a V anche in un secondo punto, in generale diverso, della s ; la sua traccia è perciò un piano non solo tangente a F^5 in due punti di una generatrice del cono Δ , ma anche in un terzo punto; quindi tritangente a F^5 . Se più particolarmente r è generatrice della rigata R^3 dianzi menzionata, la s conta doppiamente per l'intersezione di V col piano rs ; la traccia di questo piano è allora uno dei punti doppi di F^5 e appartiene a δ^5 ; la traccia dello spazio di R^3 è tangente quadripunta di F^5 , e su questa si è portato, infinitamente vicino al punto doppio, il terzo punto di contatto con F^5 .

6. Il numero (75) delle rette speciali contenute in V e incidenti a una retta generica r di V stessa (n. 3), e quindi dei piani tangenti del cono Δ , perciò bitangenti alla superficie F^5 , e in pari tempo tangenti ancora a quest'ultima in un terzo punto, si può determinare per altra via, in base a quest'ultima proprietà dei piani stessi. La superficie F^5 essendo di classe 48, i piani tangenti ad essa che passano per un punto qualunque dello spazio involuppano un cono anche di classe 48. Riferendoci al punto 0 vertice del cono Δ , questo involuppo ∞^1 comprenderà il cono stesso Δ contato due volte — ogni suo piano tangente essendo bitangente a F^5 —

²²) Severi, Trattato di geometria algebrica, vol. I, parte I (Bologna 1927), p. 253.

e perciò un involuppo (cono) residuo Γ di classe 44. Il numero cercato è pertanto quello dei piani comuni ai due involuppi conici Δ e Γ di vertice 0, cioè $2.44 = 88$, escluse le soluzioni estranee al problema, costituite dai piani comuni ai due involuppi e tangenti a F^5 in uno stesso punto. Ora i punti di contatto di F^5 con piani passanti per 0 stanno sulla superficie di 4° ordine prima polare di 0 rispetto a F^5 , la quale contiene la curva δ^5 , e incontra le generatrici del cono Δ in un solo punto ulteriore, variabile. Occorre pertanto che anche quest'ultimo punto cada su δ^5 ; il che avviene soltanto per la generatrice di Δ tangente in 0 a δ^5 e per le 6 generatrici tangenti a δ^5 nei punti doppi della sua involuzione g_2^1 .

Nel primo caso si tratta del piano tangente in 0 alla superficie F^5 , comune appunto ai due involuppi Δ e Γ . Esso incontra F^5 in una curva per la quale 0 è punto doppio a tangenti distinte²³); e queste tangenti sono rispettivamente le generatrici (o caratteristiche) dei due involuppi. Tale piano è perciò un loro elemento comune semplice.

Le 6 generatrici del cono Δ tangenti a δ^5 in punti distinti da 0 hanno ivi contatto tripunto colla prima polare di 0; sono quindi generatrici cuspidali del cono Γ , ma semplici per Δ , col medesimo piano tangente. Questo piano va perciò computato come *due* elementi comuni ai due involuppi²⁴).

Riassumendo: $88 - (1 + 2.6) = 75$, c. s. v. d.

(Reçu le 19 mai 1943.)

²³) Il piano tangente in 0 alla superficie F^5 è la traccia dello spazio Σ_4 tangente a V nel punto rt (n. 1). Un S_3 generico pel piano $\rho \equiv rt$ incontra V in una superficie cubica φ^3 con due punti doppi conici su r , per la quale ρ conta solo semplicemente fra i piani tritangenti che passano per r ; 0 è pertanto punto semplice di F^5 . Se però questo S_3 è contenuto nello spazio Σ_4 , uno dei punti doppi di φ^3 cade in rt e è biplanare; il piano ρ assorbe perciò almeno due dei piani passanti per r e tritangenti a φ^3 . Ne assorbe tre per due distinti di questi ultimi S_3 , le cui tracce sono perciò le due tangenti tripunte della F^5 in 0. Uno di questi contiene oltre ρ il secondo piano passante per r e contenuto nella quadrica polare del punto rt ; esso sega una φ^3 per la quale il punto doppio conico è assorbito da quello biplanare, che diventa di tipo B_5 ; e ha per traccia la generatrice del cono Δ tangente in 0 alla δ^5 . L'altro è determinato dal piano ρ e dal piano tangente a V lungo la t ; esso sega una φ^3 per la quale il punto rt è biplanare di tipo B_4 colla t come intersezione dei due piani tangenti; e che ha in più su r un punto doppio conico.

²⁴) Nel piano, la tangente a una curva in una cuspide (di 1ª specie) è elemento semplice per la curva involuppo. Il caso duale di quello qui considerato è quello di due curve piane tangenti in un loro comune punto semplice, che è per di più flesso di una di esse e non tale per l'altra: esso assorbe evidentemente due sole loro intersezioni.