

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Kurze Darstellung des fünften Gauß'schen Beweises für den Quadratischen Reziprozitätssatz.
Autor: Rédei, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-15561>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kurze Darstellung des fünften Gauß'schen Beweises für den Quadratischen Reziprozitätssatz

Von L. RÉDEI in Szeged, Ungarn

Gauß' (auf seinem Lemma beruhender) fünfter Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)} \quad (1)$$

(p, q verschiedene positive ungerade Primzahlen) lässt sich mit passender Symbolik wie folgt sehr leicht führen.

Für eine reelle Zahlenmenge M deuten wir die Symbole p^+q^- , p^-q^- , q^- , p^0q^- so, daß z. B. p^0q^-M die Anzahl der ganzen Zahlen in M ist, deren absolut kleinster Rest mod p und mod q die 0 bzw. negativ ist. Dabei wird für M immer nur ein Intervall (a, b) oder eine Folge (a_1, a_2, \dots, a_n) in Betracht kommen. Wir setzen noch $S[f(p, q)] = f(p, q) + f(q, p)$ für irgendeine Funktion $f(p, q)$ von p, q .

Offenbar ist

$$p^+q^-(0, pq) = \frac{1}{4}(p-1)(q-1)$$

d. h.

$$p^+q^-\left(0, \frac{pq}{2}\right) + p^+q^-\left(\frac{pq}{2}, pq\right) = \frac{1}{4}(p-1)(q-1).$$

Nach Umformung des zweiten Gliedes gemäß

$$p^+q^-(a, b) = q^+p^-(-b, -a) = q^+p^-(pq-b, pq-a)$$

ergibt sich

$$S\left[p^+q^-\left(0, \frac{pq}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}(p-1)(q-1),$$

also

$$S\left[p^+q^-\left(0, \frac{pq}{2}\right) + p^-q^-\left(0, \frac{pq}{2}\right)\right] \equiv \frac{1}{4}(p-1)(q-1) \pmod{2},$$

da das neu angefügte Glied symmetrisch in p, q ist. Der Ausdruck in [] ist

$$q^-(0, \frac{p}{2} q) - p^0 q^-\left(0, \frac{p}{2} q\right) = \frac{1}{4}(p-1)(q-1) - q^-\left(p, 2p, \dots, \frac{q-1}{2}p\right),$$

und somit folgt

$$S\left[q^-\left(p, 2p, \dots, \frac{q-1}{2}p\right)\right] \equiv \frac{1}{4}(p-1)(q-1) \pmod{2}.$$

Nach Übergehen zu Potenzen von -1 entsteht (1) wegen des Lemmas von Gauß.

(Eingegangen den 15. Oktober 1943.)