

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 16 (1943-1944)

**Artikel:** Über monothetische Gruppen.  
**Autor:** Eckmann, Beno  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15560>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über monothetische Gruppen

Von BENO ECKMANN, Lausanne

## 1. Einleitung

Unter einer Gruppe verstehen wir im folgenden immer eine *topologische* Gruppe, also eine solche, deren Elemente gleichzeitig einen Raum bilden, in welchem die Gruppenoperation stetig ist<sup>1)</sup>. Vor allem gehören dazu die kontinuierlichen Gruppen, ferner die abstrakten Gruppen der Algebra, als diskrete Räume aufgefaßt (die aus lauter isolierten Punkten bestehen); die topologische Struktur kann aber auch wesentlich komplizierter sein.

Man nennt nach dem Vorschlage von van Dantzig [5] eine Gruppe  $G$  *monothetisch*, wenn in ihr die Potenzen eines Elementes  $a$  überall dicht liegen; wir sagen in diesem Falle,  $G$  sei *von  $a$  erzeugt*. Man kann diese Eigenschaft auch so formulieren: Die kleinste abgeschlossene Untergruppe von  $G$ , welche  $a$  enthält (wir bezeichnen sie mit  $H_a$ , sie besteht aus den Potenzen von  $a$  und ihren Häufungspunkten in  $G$ ) ist die ganze Gruppe  $G$ . Da  $H_a$  immer Abelsch ist, ist jede monothetische Gruppe Abelsch.

Jede zyklische Gruppe ist monothetisch, und für diskrete (oder abstrakte) Gruppen fallen die beiden Begriffe zusammen. Für nicht-discrete Gruppen dagegen ist monothetisch eine weniger einfache, halb algebraische, halb topologische Eigenschaft. Als Beispiel erwähnen wir die Gruppe  $K$  der (eigentlichen) Drehungen des Kreises: sie wird erzeugt von einer Drehung um einen irrationalen Bruchteil von  $2\pi$ . Besonders interessant ist das direkte Produkt von  $r$  Kreisdrehungsgruppen  $K$ , das „ $r$ -dimensionale Toroid“; daß diese Gruppe monothetisch ist, und von welchen Elementen sie erzeugt wird, das ist der Inhalt eines bekannten Satzes aus der Theorie der Diophantischen Approximationen, des *Kroneckerschen Approximationssatzes* (vgl. Nr. 4).

In dieser Arbeit wird in zwei voneinander unabhängigen Abschnitten untersucht, wie man an Hand der *Darstellungen* einer kompakten Gruppe entscheiden kann, ob diese monothetisch ist oder nicht.

Im § 1 beschränken wir uns zum vorneherein auf kompakte *Abelsche* Gruppen und formulieren mit Hilfe ihrer irreduziblen Darstellungen, also ihrer *Charaktere*, ein einfaches *Kriterium* (Satz 1, in Nr. 3), das auf einem Existenzsatz für Charaktere beruht. Mit diesem Kriterium kann man

---

<sup>1)</sup> Zur Definition der topologischen Gruppe vgl. man [1], Kap. III. Unter einem „Raum“ soll im folgenden immer ein *Hausdorffscher Raum mit abzählbarer Basis* (vgl. [7], §§ 6 und 7) verstanden werden. — Zahlen in eckiger Klammer [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

von vielen Gruppen nachweisen, daß sie monothetisch sind; insbesondere ergibt sich der Satz, daß *jede zusammenhängende kompakte Abelsche Gruppe monothetisch ist*. Beim Beweis dieses Satzes machen wir vollen Gebrauch von der Pontrjaginschen Charakterentheorie<sup>2)</sup>; mit ihrer Hilfe geben wir dem Kriterium die folgende Form (Nr. 5): Eine kompakte Abelsche Gruppe ist dann und nur dann monothetisch, wenn ihre Charakterengruppe einer Untergruppe<sup>3)</sup> der Kreisdrehungsgruppe  $K$  isomorph ist (im algebraischen Sinne). — In dem angeführten Satz ist auch die Tatsache enthalten, daß das Toroid  $T^r$  monothetisch ist, also der Kroneckersche Approximationssatz; wir geben für diesen außerdem (Nr. 4) mit Hilfe des Kriteriums — aber ohne Benützung der Pontrjaginschen Charakterentheorie — einen speziellen Beweis an, der neu und besonders einfach ist und insofern von Interesse sein dürfte, als der Kroneckersche Satz in letzter Zeit gerade zur Untersuchung kontinuierlicher Gruppen wiederholt als Hilfsmittel herangezogen wurde.

Man kann die hier für kompakte Abelsche Gruppen entwickelten Überlegungen auch für lokal-kompakte Abelsche Gruppen anstellen; es ergibt sich dabei (Nr. 7), daß die einzige nicht kompakte monothetische Gruppe die unendliche zyklische Gruppe ist.

H. Weyl [2] hat den Kroneckerschen Satz verschärft, indem er den Begriff der *Gleichverteilung* einführte. Im § 2 übertragen wir diesen Begriff auf beliebige kompakte Gruppen und zeigen, daß die Potenzen eines erzeugenden Elementes einer monothetischen Gruppe in dieser nicht nur überall dicht, sondern sogar überall *gleich dicht* liegen („gleichverteilt“ sind, Definition in Nr. 8). Wir beweisen sogar den folgenden Satz, in welchem nicht vorausgesetzt wird, daß die Gruppe monothetisch ist, nicht einmal daß sie Abelsch ist:

Wenn einem Element  $a$  der kompakten Gruppe  $G$  bei allen nicht-trivialen irreduziblen Darstellungen von  $G$  eine Matrix zugeordnet wird, die nicht den Eigenwert 1 hat, dann sind die Potenzen von  $a$  in der Gruppe  $G$  gleichverteilt ( $G$  ist also monothetisch, von  $a$  erzeugt).

Als trivial bezeichnen wir dabei die „identische“ Darstellung, die jedem Element von  $G$  die Einheitsmatrix zuordnet. — Der Beweis gelingt auf Grund des Satzes von Peter-Weyl über die Vollständigkeit der irreduziblen Darstellungen<sup>4)</sup>. Unser Satz ist auch dann von Interesse, wenn die Gruppe  $G$  *endlich* ist; wir geben deshalb für diesen Fall in Nr. 11 noch einen besondern, einfacheren Beweis an.

<sup>2)</sup> Dargestellt in [1], Kap. V.

<sup>3)</sup> Wir lassen auch nicht-abgeschlossene Untergruppen zu (im Gegensatz zu Pontrjagin [1], S. 58).

<sup>4)</sup> Vgl. [1], S. 116, Satz 27, oder [3], S. 76 und 78.

## § 1. Kompakte Abelsche Gruppen

### 2. Charaktere

$G$  sei eine Abelsche Gruppe. Mit  $K$  bezeichnen wir immer die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrage 1 (die zu der in Nr. 1 ebenfalls mit  $K$  bezeichneten Kreisdrehungsgruppe isomorph<sup>5)</sup> ist). Ein Charakter  $\varphi$  von  $G$  ist eine homomorphe<sup>5)</sup> Abbildung von  $G$  in die Gruppe  $K$ , also eine komplexwertige Funktion in  $G$ , die gewissen Bedingungen genügt. Der „Haupt-Charakter“, welcher durchwegs den Wert 1 hat:

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in G$$

existiert für jede Gruppe; wir nennen ihn den *trivialen* Charakter.

Ist  $G$  eine kompakte Abelsche Gruppe, die nicht nur aus der Einheit  $e$  besteht, so besitzt sie auch nicht-triviale Charaktere, d. h. solche, die nicht für alle  $x \in G$  den Wert 1 haben. Wir nennen diese Tatsache, die für das folgende wichtig ist, den *Existenzsatz für Charaktere*; er folgt leicht aus dem Satz von Peter-Weyl<sup>4)</sup>, mit dessen Hilfe man sogar beweisen kann, daß es zu jedem Element  $a \neq e$  von  $G$  einen Charakter  $\varphi$  gibt, für welchen  $\varphi(a) \neq 1$  ist<sup>6)</sup>.

### 3. Monothetische Gruppen

Ist  $x$  ein Element der Gruppe  $G$ , so bezeichnen wir mit  $H_x$  die kleinste abgeschlossene Untergruppe von  $G$ , welche  $x$  enthält; sie besteht aus den Potenzen von  $x$  und ihren Häufungspunkten in  $G$ . Daß  $G$  monothetisch, und zwar von  $a \in G$  erzeugt ist, bedeutet

$$H_a = G .$$

Das folgende Kriterium gibt nun an, wie man mit Hilfe der Charaktere einer kompakten Abelschen Gruppe  $G$  untersuchen kann, ob sie monothetisch ist.

*Satz 1: Die kompakte Abelsche Gruppe  $G$  wird dann und nur dann vom Element  $a$  erzeugt, wenn für alle nicht-trivialen Charaktere  $\varphi$  von  $G$   $\varphi(a) \neq 1$  ist.*

Beweis: a) „nur dann“: Wenn  $H_a = G$ , dann ist  $\varphi(a) \neq 1$  für alle nicht-trivialen Charaktere. Dieser Teil des Satzes ist trivial; denn aus  $\varphi(a) = 1$  folgt  $\varphi(x) = 1$  für alle  $x \in H_a$ , und wenn  $H_a = G$  ist, so ist der Charakter  $\varphi$  trivial.

---

<sup>5)</sup> Homomorphe Abbildungen topologischer Gruppen sollen immer zugleich stetig, isomorphe immer topologisch sein, wenn nicht ausdrücklich hervorgehoben wird, daß „homomorph“ oder „isomorph“ nur im algebraischen Sinne gemeint ist.

<sup>6)</sup> Vgl. [1], S. 120, Satz 28 oder 30, oder S. 146, Abschnitt C.

b) „dann“: Es sei  $H_a \neq G$ ; dann besteht die Faktorgruppe  $G/H_a$  nicht nur aus der Einheit, besitzt also nach dem Existenzsatz einen nicht-trivialen Charakter  $\varphi$ , den wir als Charakter von  $G$  auffassen können, welcher auf den Nebengruppen nach  $H_a$  konstant ist. Dann ist aber  $\varphi(H_a) = 1$ , also  $\varphi(a) = 1$ . Umgekehrt folgt also aus  $\varphi(a) \neq 1$  für alle nicht-trivialen Charaktere:  $H_a = G$ .

#### 4. Der Kroneckersche Approximationssatz

Wir wenden dieses Kriterium zunächst auf eine spezielle Gruppe an, nämlich auf das direkte Produkt von  $r$  Gruppen  $K$ , das man das  $r$ -dimensionale Toroid  $T^r$  nennt. Statt seine Elemente durch  $r$  komplexe Zahlen vom Betrage 1 zu geben (etwa  $e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_r}$ ), beschreiben wir sie durch  $r$  reelle Koordinaten  $x_1, \dots, x_r$ , wobei zwei  $r$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_r)$  und  $(x'_1, \dots, x'_r)$  dasselbe Element  $x$  von  $T$  bedeuten, falls  $x_k$  und  $x'_k$  derselben Restklasse der reellen Zahlen modulo 1 angehören ( $k = 1, \dots, r$ ); das Produkt der Elemente  $x = (x_1, \dots, x_r)$  und  $y = (y_1, \dots, y_r)$  im Sinne der Gruppe ist dann durch

$$x \cdot y = (x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r)$$

gegeben (Vektoraddition modulo 1), und die Potenzen von  $x$  sind die ganzzahligen Vielfachen  $(nx_1, \dots, nx_r)$  des  $r$ -Tupels  $(x_1, \dots, x_r)$ . Jeder Charakter  $\varphi$  von  $T^r$  hat dann bekanntlich<sup>7)</sup> die Form

$$\varphi(x) = e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_r x_r)},$$

wo die  $m_k$  beliebige ganze Zahlen sind; sind sie alle = 0, so ist  $\varphi$  der triviale Charakter. Wählen wir nun ein Element  $a = (a_1, \dots, a_r)$  von  $T^r$  so, daß die Linearkombination  $m_1 a_1 + \dots + m_r a_r$  mit ganzzahligen Koeffizienten  $m_k$  niemals gleich einer ganzen Zahl ist, außer wenn alle  $m_k = 0$  sind — wir wollen solche Elemente von  $T^r$  eigentlich nennen —, dann ist

$$\varphi(a) \neq 1$$

für alle nicht-trivialen Charaktere  $\varphi$  von  $T^r$ , und aus Satz 1 folgt:

*Satz 2: Das Toroid  $T^r$  ist monothetisch; es wird von jedem eigentlichen Element  $a$  erzeugt.*

Das ist nichts anderes als der Kroneckersche Approximationssatz, der in der üblichen Formulierung<sup>8)</sup> lautet: Die ganzzahligen Vielfachen eines

<sup>7)</sup> Vgl. z. B. [1], § 32, Abschnitt C, in Verbindung mit Satz 36 (man beachte, daß dort nicht  $\varphi(x)$ , sondern  $\frac{1}{2\pi i} \log \varphi(x)$  als Charakter bezeichnet wird).

<sup>8)</sup> z. B. [4], S. 83.

eigentlichen  $r$ -Tupels reeller Zahlen  $(a_1, \dots, a_r)$ , wenn man sie modulo 1 reduziert, entsprechen Punkten des  $r$ -dimensionalen Euklidischen Raumes, die im „Einheitskubus“  $0 \leq x_k \leq 1$  ( $k = 1, \dots, r$ ) überall dicht liegen.

Unser Beweis des Kroneckerschen Satzes ist zwar sehr einfach, aber nicht elementar, da er den Existenzsatz aus Nr. 2 benutzt.

## 5. Andere Formen des Kriteriums

In der Pontrjaginschen Charakterentheorie<sup>2)</sup> werden die Charaktere einer Abelschen Gruppe  $G$  ihrerseits zu einer Gruppe  $\Gamma$  zusammengefaßt, der Charakterengruppe<sup>9)</sup> von  $G$ . Der triviale Charakter von  $G$  ist die Einheit von  $\Gamma$ ; er werde jetzt mit  $\varepsilon$  bezeichnet. Die Gruppe  $\Gamma$  hat, wie  $G$ , eine abzählbare Basis; sie ist diskret, wenn  $G$  kompakt, und kompakt, wenn  $G$  diskret ist (und lokal-kompakt, wenn  $G$  es ist); es gilt, wenn  $G$  kompakt oder diskret ist (allgemeiner, wenn  $G$  lokal-kompakt ist) der Dualitätssatz<sup>10)</sup>: Die Charakterengruppe von  $\Gamma$  ist zu  $G$  isomorph; dieser Isomorphismus ist dadurch gegeben, daß man jedes Element  $x \in G$  als Charakter von  $\Gamma$  auffassen kann, indem man setzt:

$$x(\varphi) = \varphi(x)$$

für alle Charaktere  $\varphi$  von  $G$ , d. h. für alle Elemente  $\varphi \in \Gamma$ . Zwei Abelsche Gruppen  $G$  und  $\Gamma$  mit der Eigenschaft, daß jede zur Charakterengruppe der andern isomorph ist, nennt man kurz zueinander *dual*.

$G$  sei jetzt eine kompakte Gruppe,  $\Gamma$  ihre (diskrete) Charakterengruppe. Daß  $G$  von einem Element  $a$  erzeugt wird, ist nach Satz 1 damit gleichbedeutend, daß der Charakter  $a(\varphi)$  von  $\Gamma$  nur für  $\varphi = \varepsilon$  den Wert 1 hat. Wir wollen einen solchen Charakter  $a$  von  $\Gamma$ , für welchen

$$a(\varphi) \neq 1 \quad \text{für alle} \quad \varphi \neq \varepsilon$$

ist, *definit* nennen. Damit können wir den Satz 1 so formulieren:

*Satz 3: Die kompakte Abelsche Gruppe  $G$  ist dann und nur dann monothetisch, wenn die zu ihr duale Gruppe  $\Gamma$  einen definiten Charakter besitzt; dieser ist ein erzeugendes Element von  $G$ .*

Nun können wir aber einen definiten Charakter  $a$  von  $\Gamma$  auch als eine homomorphe Abbildung von  $\Gamma$  in  $K$  auffassen, welche eineindeutig ist — da nur für  $\varphi = \varepsilon$   $a(\varphi) = 1$  ist —, also *isomorph, aber nur im algebraischen Sinne*; denn es ist nicht gesagt, daß diese eineindeutige Abbil-

---

<sup>9)</sup> Definition und Eigenschaften s. [1], S. 127 ff.

<sup>10)</sup> [1], S. 134, Satz 32.

dung der diskreten Gruppe  $\Gamma$  in die kompakte Gruppe  $K$  auch topologisch ist. Somit gilt

*Satz 4: Die kompakte Abelsche Gruppe  $G$  ist dann und nur dann monothesisch, wenn die zu ihr duale Gruppe  $\Gamma$  einer Untergruppe von  $K$  (im algebraischen Sinne) isomorph ist.*

Anwendungen: 1. Wir betrachten die additive Gruppe der modulo 1 zu reduzierenden rationalen Zahlen als diskrete Gruppe  $P_1$ ; sie ist im algebraischen Sinne einer Untergruppe von  $K$  isomorph (nämlich der Gruppe der Drehungen des Kreises um rationale Teile von  $2\pi$ ). Jede kompakte Gruppe  $G$ , die zu einer Untergruppe  $\Gamma$  von  $P_1$  dual ist, ist also nach Satz 4 monothesisch. Dies gilt z. B. für die sogenannte  $n$ -adische Gruppe<sup>11)</sup>; das ist die additive Gruppe der  $n$ -adischen Zahlen, welche, kompakt topologisiert, einen zum Cantorschen Diskontinuum homöomorphen Raum bilden; diese Gruppe ist dual zur Gruppe der  $n$ -albrüche  $\frac{k}{n^m}$  modulo 1.

2.  $P$  sei die diskrete additive Gruppe der rationalen Zahlen; eine zu einer Untergruppe  $\Gamma$  von  $P$  duale kompakte Gruppe  $G$  heißt eine *Solenoide*<sup>12)</sup> (und zwar eine  $n$ -adische, wenn  $\Gamma$  die Gruppe der  $n$ -albrüche  $\frac{k}{n^m}$  ist). Der Charakter  $a$  von  $\Gamma$

$$a(\varphi) = e^{2\pi i \varphi \xi},$$

wo  $\xi$  eine beliebige irrationale Zahl ist, hat für alle rationalen Zahlen  $\varphi \neq 0$  einen von 1 verschiedenen Wert, weil  $\varphi\xi$  keine ganze Zahl ist;  $a$  ist also ein definiter Charakter von  $\Gamma$ , und aus Satz 3 folgt, daß jede Solenoide monothesisch ist.

## 6. Zusammenhängende Gruppen

Das letzte Beispiel sowie der Kroneckersche Approximationssatz sind Spezialfälle des folgenden Satzes.

*Satz 5: Jede zusammenhängende kompakte Abelsche Gruppe  $G$  ist monothesisch.*

Gemäß der Pontrjaginschen Theorie ist die kompakte Abelsche Gruppe  $G$  dann und nur dann zusammenhängend, wenn die zu  $G$  duale diskrete Gruppe  $\Gamma$  keine Elemente endlicher Ordnung hat<sup>13)</sup>. Wegen Satz 3 kann man die Behauptung also auch so aussprechen:

---

<sup>11)</sup> Vgl. [5], S. 113.

<sup>12)</sup> Eingeführt und ausführlich untersucht von van Dantzig [5], § 2 und § 4. — Vgl. ferner [1], S. 171, Beispiel 53.

<sup>13)</sup> [1], S. 148, Beispiel 48.

*Satz 5': Jede abzählbare diskrete Abelsche Gruppe  $\Gamma$  ohne Elemente endlicher Ordnung besitzt einen definiten Charakter.*

Beweis: Die Elemente von  $\Gamma$  seien irgendwie numeriert:

$$\varphi_0 = \varepsilon, \varphi_1, \varphi_2, \dots .$$

Mit  $\Phi_j$  bezeichnen wir die von  $\varphi_0, \dots, \varphi_j$  erzeugte Untergruppe von  $\Gamma$ ; die  $\Phi_j$  bilden eine aufsteigende Folge von Untergruppen, welche die ganze Gruppe  $\Gamma$  ausschöpfen. Wir wählen eine Folge reeller (irrationaler) Zahlen  $c_1, c_2, \dots$ , derart, daß für jede Zahl  $n$  das  $n$ -Tupel  $c_1, \dots, c_n$  eigentlich ist (s. Nr. 4), und konstruieren den gesuchten definiten Charakter  $a$  von  $\Gamma$  so, daß er für jedes Element  $\varphi$  von  $\Phi_j$  die Form

$$a(\varphi) = e^{2\pi i(r_1 c_1 + \dots + r_j c_j + r)} \quad (1)$$

hat ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), wobei die  $r_k, r$  rationale Zahlen sind. Diese Konstruktion gelingt durch vollständige Induktion nach  $j$ . Wir nehmen an, für  $\Phi_{j-1}$  sei ein definiter Charakter  $a$  der verlangten Form (1) erklärt (für  $j = 1$  ist es der Fall:  $a(\varphi_0) = 1$ ), und erweitern diesen zu einem definiten Charakter von  $\Phi_j$  der Form (1). Dabei sind 3 Fälle zu unterscheiden:

a)  $\varphi_j \in \Phi_{j-1}$ ; dann ist  $\Phi_j = \Phi_{j-1}$ , und es ist keine Erweiterung vorzunehmen.

b) Es gebe ganze Zahlen  $q \neq 0$ , für welche  $\varphi_j^q \in \Phi_{j-1}$ , und die kleinste positive Zahl dieser Art sei  $= n > 1$  (die Zahlen  $q$  sind also Vielfache von  $n$ ). Es sei

$$\varphi_j^n = \psi \in \Phi_{j-1},$$

und  $z$  sei eine solche komplexe Zahl, daß

$$z^n = a(\psi)$$

ist; dann setzen wir

$$a(\varphi_j) = z.$$

Jedes Element  $\varphi \in \Phi_j$  ist in der Form

$$\varphi = \chi \cdot \varphi_j^m, \quad \chi \in \Phi_{j-1}$$

darstellbar, wobei  $\chi$  und  $m$  durch  $\varphi$  nicht eindeutig bestimmt sind; wohl aber ist

$$a(\varphi) = a(\chi) \cdot z^m$$

von der Wahl dieser Darstellung unabhängig; denn aus  $\chi \cdot \varphi_j^m = \chi' \cdot \varphi_j^{m'}$  folgt  $\varphi_j^{m-m'} \in \Phi_{j-1}$ , also  $m - m' = kn$  und  $\chi' = \chi \cdot \varphi_j^{kn} = \chi \cdot \psi^k$ , somit

$$a(\chi') = a(\chi \cdot \psi^k) = a(\chi) \cdot a(\psi)^k = a(\chi) \cdot z^{kn},$$

also

$$a(\chi') \cdot z^{m'} = a(\chi) \cdot z^{m'+kn} = a(\chi) \cdot z^m.$$

Also ist der Charakter  $a$  von  $\Phi_{j-1}$  zu einem Charakter von  $\Phi_j$  erweitert, und es ist klar, daß er von der verlangten Form (1) ist, weil nach Induktionsvoraussetzung  $a(\chi)$  und  $a(\psi)$ , also auch  $z$ , von dieser Form ist. Es ist noch zu zeigen, daß  $a$  auf  $\Phi_j$  definit ist: Aus  $a(\varphi) = 1$  folgt  $a(\varphi^n) = 1$ ; aber

$$\varphi^n = \chi^n \cdot \varphi_j^{mn} = \chi^n \cdot \psi^m$$

ist ein Element von  $\Phi_{j-1}$ , und da  $a$  auf  $\Phi_{j-1}$  definit ist, muß  $\varphi^n = \varepsilon$  sein; da  $\Gamma$  keine Elemente endlicher Ordnung hat, folgt daraus  $\varphi = \varepsilon$ .

c) Für alle ganzen Zahlen  $n \neq 0$  sei  $\varphi_j^n$  nicht in  $\Phi_{j-1}$  enthalten. Wir setzen in diesem Fall

$$a(\varphi_j) = e^{2\pi i c_j};$$

da die Elemente  $\varphi \in \Phi_j$  eindeutig in der Form

$$\varphi = \chi \cdot \varphi_j^m, \quad \chi \in \Phi_{j-1},$$

darstellbar sind, ist damit  $a$  für die ganze Gruppe  $\Phi_j$  erklärt, und es ist

$$a(\varphi) = a(\chi) \cdot e^{2\pi i m c_j}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$a(\chi) = e^{2\pi i (r_1 c_1 + \dots + r_{j-1} c_{j-1} + r)},$$

also

$$a(\varphi) = e^{2\pi i (r_1 c_1 + \dots + r_{j-1} c_{j-1} + m c_j + r)}$$

von der Form (1). Aus  $a(\varphi) = 1$  folgt, daß die Klammer im Exponenten eine ganze Zahl darstellt, und das bedeutet wegen der Wahl der  $c_j$ , daß  $r_1 = \dots = r_{j-1} = m = 0$  ist, also  $\varphi = \chi$  und  $a(\chi) = 1$ ; und da  $a$  auf  $\Phi_{j-1}$  definit ist, folgt

$$\varphi = \chi = \varepsilon.$$

Der erweiterte Charakter  $a$  ist also auch auf  $\Phi_j$  definit.

Es ist leicht zu sehen, wie sich dieser Beweis unter den einschränkenden Annahmen, daß  $\Gamma$  endlichen Rang oder sogar ein endliches Erzeugendensystem hat, vereinfachen läßt.

## 7. Lokal-kompakte Gruppen

Die Methode, mit welcher wir in diesem Paragraphen kompakte Abelsche Gruppen untersucht haben, läßt sich unverändert auf lokal-kompakte

Abelsche Gruppen übertragen, weil für diese ebenso wie für kompakte Gruppen der Existenzsatz für Charaktere gilt<sup>14)</sup>; die Sätze 1, 3 und 4 bleiben gültig, wenn man darin „kompakt“ durch „lokal-kompakt“ ersetzt.

Ein triviales Beispiel einer monothetischen Gruppe, die nicht kompakt, sondern nur lokal-kompakt ist, bildet die unendliche zyklische Gruppe. Wir wollen zeigen, daß es die einzige derartige Gruppe ist.

$G$  sei eine lokal-kompakte monothetische Gruppe.  $a$  sei ein erzeugendes Element von  $G$ , also ein definiter Charakter der zu  $G$  dualen Gruppe  $\Gamma$ , oder eine algebraisch isomorphe Abbildung von  $\Gamma$  in  $K$ .  $\Gamma$  ist lokal-kompakt; es gibt infolgedessen<sup>15)</sup> in  $\Gamma$  eine Untergruppe  $\Phi$ , die in das direkte Produkt ihrer maximalen kompakten Untergruppe  $\Phi'$  und einer Vektorgruppe  $\Phi''$  zerfällt, und derart, daß die Faktorgruppe  $\Gamma/\Phi$  diskret ist. Wir betrachten zunächst den definiten Charakter  $a$  nur auf der Untergruppe  $\Phi$ ;  $a$  ist auch auf der Vektorgruppe  $\Phi'' \subset \Phi$  definit, und das ist nur möglich, wenn  $\Phi''$  nur aus der Einheit  $\varepsilon$  (dem Nullvektor) besteht; denn andernfalls hat eine Vektorgruppe keinen definitiven Charakter. Folglich ist  $\Phi = \Phi'$ , also kompakt.  $a$  ist als eineindeutige stetige Abbildung eines kompakten Raumes (mit abzählbarer Basis) in  $K$  von selbst topologisch, und  $a(\Phi)$  ist eine abgeschlossene Untergruppe von  $K$ . Wir haben also 2 Möglichkeiten:

1.  $a(\Phi)$ , also  $\Phi$  selbst, ist eine endliche zyklische Gruppe;  $\Gamma$  ist also diskret, d. h.  $G$  ist kompakt.

2.  $a(\Phi) = K$ ; da  $a$  eineindeutig ist, muß in diesem Fall  $\Gamma = \Phi$  sein, also ist  $\Gamma$  zu  $K$  isomorph. Die zu  $K$  duale Gruppe  $G$  ist aber die unendliche zyklische Gruppe.

Wir haben damit bewiesen:

*Satz 6: Mit Ausnahme der unendlichen zyklischen Gruppe ist jede monothetische lokal-kompakte Gruppe kompakt.*

## § 2. Gleichverteilung in kompakten Gruppen

### 8. Gleichverteilung

$G$  sei von jetzt an eine beliebige kompakte Gruppe. Ist  $M$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $G$ , so bezeichnen wir mit  $\mu(M)$  das invariante (Haarsche) Maß<sup>16)</sup> von  $M$ ; es sei so normiert, daß  $\mu(G) = 1$  ist.

---

<sup>14)</sup> [1], S. 163, im Beweis von Satz 32, zweiter Abschnitt.

<sup>15)</sup> [1], S. 160, Satz 41, in Verbindung mit S. 160, Abschnitt E.

<sup>16)</sup> Wegen der im folgenden benützten Eigenschaften des invarianten Maßes und der Integration in einer Gruppe vergleiche man [3], bes. Kap. II.

Wir nennen eine abzählbare Folge von Punkten  $x_1, x_2, \dots$  in  $G$  gleichverteilt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:  $N(M)$  sei die Anzahl derjenigen unter den Punkten  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , die in  $M$  liegen; für jede abgeschlossene Teilmenge  $M$  von  $G$  ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(M)}{N} = \mu(M) . \quad (2)$$

Eine gleichverteilte Folge  $(x_\nu)$  liegt in  $G$  überall dicht (denn es gibt in jeder Umgebung eine Menge  $M$  von positivem Maß und somit Punkte  $x_\nu$ ). Sind also die Potenzen eines Elementes  $a$  in  $G$  gleichverteilt, so ist  $G$  monothetisch, von  $a$  erzeugt. Umgekehrt sind die Potenzen eines erzeugenden Elementes  $a$  einer monothetischen Gruppe  $G$  immer in  $G$  gleichverteilt. Dies wird sich aus den folgenden Überlegungen ergeben, die übrigens vom § 1 völlig unabhängig sind. Der Unterschied gegenüber dem § 1 ist der, daß wir einerseits nicht nur Abelsche Gruppen betrachten, andererseits auf den Begriff „gleichverteilt“ ausgehen, der etwas mehr Aufschluß gibt als „monothetisch“.

Wir werden die folgende Eigenschaft der Gleichverteilung einer beliebigen abzählbaren Punktfolge  $(x_\nu)$  in  $G$  benützen, unter Verwendung der zum invarianten Maß  $\mu$  gehörigen invarianten Integration in  $G$  (für stetige komplexwertige Funktionen  $f$  in  $G$ ;  $\int f dx$  sei das über die ganze Gruppe  $G$  erstreckte Integral von  $f$ ):

*Hilfsatz:* Wenn für jede stetige Funktion  $f$  in  $G$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N f(x_\nu) = \int f dx \quad (3)$$

ist, dann sind die  $x_\nu$  in  $G$  gleichverteilt<sup>17)</sup>.

*Beweis:*  $M$  sei eine abgeschlossene Teilmenge in  $G$ ,  $F$  die Funktion

$$\begin{aligned} F(x) &= 1, \text{ wenn } x \in M, \\ &= 0, \text{ wenn } x \text{ nicht in } M \text{ liegt.} \end{aligned}$$

$F$  ist eventuell unstetig; aber es gibt zwei Folgen nicht-negativer stetiger Funktionen  $f_n$  und  $g_n$ , so daß

---

<sup>17)</sup> Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung; man kann also die Gleichverteilung auch durch (3) definieren. — Infolgedessen gilt auch von Satz 7 die Umkehrung, ebenso von Satz 8; letzteres ist aber trivial (s. Nr. 10).

$$f_n(x) \leq F(x) \leq g_n(x) \quad \text{für alle } x \in G$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) dx = \mu(M)$$

ist.

$r$  sei eine positive Zahl; wir wählen  $n$  so, daß

$$\int f_n(x) dx > \mu(M) - \frac{r}{2}$$

und

$$\int g_n(x) dx < \mu(M) + \frac{r}{2}$$

ist. In der Ungleichung

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N f_n(x_\nu) \leq \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N F(x_\nu) \leq \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N g_n(x_\nu)$$

ist  $\sum_{\nu=1}^N F(x_\nu) = N(M)$  und, wenn  $N$  genügend groß ist,

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N f_n(x_\nu) > \int f_n(x) dx - \frac{r}{2},$$

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N g_n(x_\nu) < \int g_n(x) dx + \frac{r}{2},$$

wegen der Voraussetzung (3). Es folgt also

$$\mu(M) - r < \frac{N(M)}{N} < \mu(M) + r,$$

wenn  $r > 0$  vorgegeben und  $N$  genügend groß ist; also gilt (2).

## 9. Darstellungen und Gleichverteilung

Ist  $D$  eine Darstellung von  $G$ , so bezeichnen wir für jedes  $x \in G$  mit  $D(x)$  die Matrix, welche  $x$  darstellt. Die „identischen“ Darstellungen, bei welchen für alle  $x \in G$   $D(x)$  die Einheitsmatrix  $E$  ist, nennen wir trivial.  $(x_\nu)$  sei wiederum eine abzählbare Punktfolge in  $G$ .

*Satz 7: Wenn für alle nicht-trivialen irreduziblen Darstellungen  $D$  von  $G$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N D(x_\nu) = 0 \tag{4}$$

*ist, dann sind die  $x_\nu$  in  $G$  gleichverteilt.*

Beweis: Wir wählen in jeder Klasse äquivalenter irreduzibler Darstellungen von  $G$  eine unitäre Darstellung  $D^{(i)}$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), und setzen  $D^{(i)}(x) = (d_{jk}^{(i)}(x))$ . Dann bilden die Matrixelemente  $d_{jk}^{(i)}(x)$  ein System unitär-orthogonaler Funktionen in  $G$ , und nach dem Satz von Peter-Weyl<sup>4)</sup> läßt sich jede stetige Funktion in  $G$  gleichmäßig durch Linearkombinationen der  $d_{jk}^{(i)}(x)$  approximieren.  $D^{(0)}$  sei die triviale irreduzible Darstellung, also  $d_{11}^{(0)}(x) = 1$  für alle  $x$ .

Ist  $f$  eine stetige Funktion in  $G$ , dann gibt es zu einer vorgegebenen Zahl  $r > 0$  eine Linearkombination  $g$  der  $d_{jk}^{(i)}$ , derart, daß für alle  $x \in G$

$$|f(x) - g(x)| < \frac{r}{3}$$

ist. Daraus folgt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N f(x_\nu) - \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N g(x_\nu) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N |f(x_\nu) - g(x_\nu)| < \frac{r}{3}, \quad (5)$$

und

$$|\int f(x) dx - \int g(x) dx| \leq \int |f(x) - g(x)| dx < \frac{r}{3}. \quad (6)$$

Nach der Voraussetzung (4) gilt für  $i > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N d_{jk}^{(i)}(x_\nu) = 0,$$

also

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N g(x_\nu) = \text{Koeffizient von } d_{11}^{(0)} \text{ in } g,$$

und dieser Koeffizient ist  $= \int g(x) dx$ ; für  $N > N(r)$  ist also

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N g(x_\nu) - \int g(x) dx \right| < \frac{r}{3} \quad (7)$$

und aus (5), (6) und (7) folgt

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N f(x_\nu) - \int f(x) dx \right| < r, \text{ für alle } N > N(r),$$

d. h. es folgt (3). Nach dem Hilfssatz sind also die  $x_\nu$  in  $G$  gleichverteilt.

## 10. Fixpunktfreie Darstellungen

Wir wenden uns nun dem Fall zu, wo die Folge  $(x_\nu)$  aus den Potenzen  $a^n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) eines Elementes  $a$  von  $G$  besteht.

Eine Bezeichnung: Wir sagen, das Element  $a \in G$  sei *bei der Darstellung*

$D$  fixpunktfrei, wenn  $D(a)$ , als lineare Transformation eines Vektorraumes  $V$  aufgefaßt, außer dem Ursprung von  $V$  keinen Fixpunkt besitzt; dies bedeutet, daß die Matrix  $D(a)$  nicht 1 zum Eigenwert hat, oder daß die Determinante  $|D(a) - E| \neq 0$  ist.

*Satz 8: Wenn das Element  $a$  der kompakten Gruppe  $G$  bei allen nicht-trivialen irreduziblen Darstellungen von  $G$  fixpunktfrei ist, dann sind die Potenzen von  $a$  in  $G$  gleichverteilt.*

Beweis:  $D$  sei eine nicht-triviale irreduzible Darstellung von  $G$ . Es ist

$$\sum_{\nu=1}^N D(a^\nu) = \sum_{\nu=1}^N D^\nu(a) = D(a) \frac{D^N(a) - E}{D(a) - E} = D(a) \frac{D(a^N) - E}{D(a) - E}, \quad (8)$$

da man den an dritter Stelle stehenden Quotienten wegen  $|D(a) - E| \neq 0$  einfach ausdividieren kann. Die Elemente der resultierenden Matrix sind (für  $N \rightarrow \infty$ ) beschränkt, weil  $G$  kompakt ist, und deshalb ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N D(a^\nu) = 0 .$$

Die Potenzen von  $a$  erfüllen also die Voraussetzung des Satzes 7 und sind somit in  $G$  gleichverteilt — und zwar schon die positiven Potenzen allein (und ebenso, wie leicht ersichtlich, die negativen Potenzen allein, oder alle zusammen).

Die Voraussetzung des Satzes 8 ist für eine *Abelsche* Gruppe  $G$  mit der (notwendigen und hinreichenden) Bedingung des Satzes 1 identisch. Daraus folgt: 1. Von Satz 8 gilt auch die Umkehrung. 2. Die Potenzen eines erzeugenden Elementes einer monothetischen Gruppe liegen in dieser nicht nur überall dicht, sondern sind sogar gleichverteilt; wichtig ist diese Verschärfung z. B. für das Toroid  $T^r$ , d. h. für den Kronekerschen Approximationssatz (Nr. 4), wo sie den Satz von Weyl [2] über die Gleichverteilung modulo 1 ergibt.

Andererseits gestattet uns der Satz 8, über die Struktur einer kompakten Gruppe  $G$ , von der wir zum vorneherein nicht wissen, ob sie monothetisch ist oder nicht — nicht einmal, ob sie Abelsch ist —, eine Aussage zu machen: wenn ein gewisses Element  $a$  bei allen nicht-trivialen irreduziblen Darstellungen fixpunktfrei ist, dann ist die Gruppe  $G$  monothetisch, von  $a$  erzeugt. Oder (Kontraposition):

*Satz 8': Wenn die kompakte Gruppe  $G$  nicht monothesch (z. B. nicht Abelsch) ist, dann gibt es zu jedem Element  $a \neq e$  von  $G$  eine nicht-triviale irreduzible Darstellung  $D$ , bei welcher  $D(a)$  den Eigenwert 1 hat.*

## 11. Endliche Gruppen

Für den Spezialfall einer endlichen (diskreten) Gruppe  $G$  können wir die zuletzt angeführten Sätze so aussprechen:

*Wenn das Element  $a$  der endlichen Gruppe  $G$  bei allen nicht-trivialen irreduziblen Darstellungen fixpunktfrei ist, dann ist  $G$  zyklisch, von  $a$  erzeugt. Oder:*

*Wenn die endliche Gruppe  $G$  nicht zyklisch ist, dann gibt es zu jedem Element  $a \neq e$  von  $G$  eine irreduzible Darstellung  $D$ , bei welcher  $D(a)$  den Eigenwert 1 hat.*

Es mag angebracht sein, für diesen einfachen Satz über endliche Gruppen einen direkten, vom Übrigen unabhängigen Beweis anzugeben.

$D^{(0)} = E, D^{(1)}, \dots, D^{(h)}$  sei ein vollständiges System nicht-äquivalenter, unitärer, irreduzibler Darstellungen<sup>18)</sup> der endlichen Gruppe  $G$ .  $N$  sei die Ordnung von  $G$ , und  $x_\nu (\nu = 1, \dots, N)$  seien die Elemente von  $G$ . Die Elemente  $d_{j,k}^{(i)}(x_\nu)$  der Matrizen  $D^{(i)}(x_\nu)$  sind Funktionen in  $G$ , oder „Vektoren“ eines  $N$ -dimensionalen komplexen Vektorraumes  $U$ ; ihre Anzahl ist bekanntlich  $= N$ . Wir numerieren sie durch und bezeichnen sie mit  $d_p(x_\nu)$ ,  $p = 1, \dots, N$  (es sei  $d_1(x_\nu) = d_{11}^{(0)}(x_\nu) = 1$  für  $\nu = 1, \dots, N$ ); bekanntlich gilt

$$\sum_{\nu=1}^N d_p(x_\nu) \overline{d_q(x_\nu)} = \begin{cases} 0 & \text{für } p \neq q, \\ \neq 0 & \text{für } p = q, \end{cases} \quad (9)$$

d. h. die  $d_p$  bilden eine unitär-orthogonale Basis von  $U$ . Jeder Vektor  $f(x_\nu)$  von  $U$  lässt sich nach dieser Basis zerlegen:

$$f(x_\nu) = \sum_{p=1}^N c_p d_p(x_\nu), \quad (10)$$

wobei der Koeffizient  $c_1 = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N f(x_\nu)$  ist.

Wir nehmen nun an, es gebe ein Element  $a$  unter den  $x_\nu$ , welches bei allen nicht-trivialen irreduziblen Darstellungen fixpunktfrei ist, d. h. derart, daß

$$|D^{(i)}(a) - E| \neq 0 \quad \text{ist für } i = 1, \dots, h.$$

<sup>18)</sup> Wegen der benützten Sätze aus der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen vergleiche man etwa [6], Kap. 11 und 12.

Dann ist

$$\sum_{\nu=1}^N D^{(i)}(a^\nu) = D^{(i)}(a) \frac{D^{(i)}(a^N) - E}{D^{(i)}(a) - E} = 0 ,$$

also für  $p > 1$

$$\sum_{\nu=1}^N d_p(a^\nu) = 0 .$$

Nach (10) gilt dann

$$\sum_{\nu=1}^N f(a^\nu) = \sum_{p=1}^N c_p \sum_{\nu=1}^N d_p(a^\nu) = N c_1 ,$$

also

$$\sum_{\nu=1}^N f(a^\nu) = \sum_{\nu=1}^N f(x_\nu) \quad (11)$$

für jeden beliebigen Vektor  $f(x_\nu)$ . Setzen wir z. B.

$$\begin{aligned} f(x_\nu) &= 0 \quad \text{für } x_\nu \neq b \\ &= 1 \quad \text{für } x_\nu = b , \end{aligned}$$

wo  $b$  ein beliebiges Element von  $G$  ist, so wird

$$\sum_{\nu=1}^N f(a^\nu) = 1 ;$$

es gibt also eine Potenz  $a^\nu$ , die  $= b$  ist.  $G$  ist also zyklisch, von  $a$  erzeugt.

## L I T E R A T U R

- [1] L. Pontrjagin, Topological groups (Princeton 1939).
- [2] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77 (1916), 313—352.
- [3] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications (Paris 1940).
- [4] J. F. Koksma, Diophantische Approximationen (Berlin 1936).
- [5] D. van Dantzig, Über topologisch homogene Kontinua, Fund. math. XV (1930), 102—125.
- [6] A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Berlin 1927).
- [7] P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I (Berlin 1935).

(Eingegangen den 12. Oktober 1943.)