Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung.
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15557

Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung

Von H. Hadwiger, Bern

Herrn C. Carathéodory zum 70. Geburtstag gewidmet.

Es bezeichne

$$\sum_0^\infty c_\nu \tag{1}$$

eine nicht notwendig konvergente unendliche Reihe, deren Glieder der asymptotischen Beschränkung

$$c_\nu = 0\left(\frac{1}{\nu}\right) \tag{2}$$

unterworfen sind, so daß also

$$\limsup_{\nu \to \infty} \nu \mid c_\nu \mid = c \tag{3}$$

existiert. Beim Versuch der A-Limitierung der Reihe (1) studiert man das Verhalten der Funktion

$$F(t) = \sum_0^\infty c_\nu t^\nu \tag{4}$$

bei der linksseitigen Annäherung

$$t \to 1 \tag{5}$$

an den rechten Endpunkt des reellen Parameterintervalls. Unter einem Abelschen Endwert der Reihe (1) wollen wir eine Zahl a von folgender Eigenschaft verstehen:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $0 < t < 1$ gibt es stets ein t', $t < t' < 1$, so, daß

$$\mid F(t') - a \mid < \varepsilon$$

ausfällt. Die Funktion $F(t)$ kommt also dem Wert a in jeder beliebigen linksseitigen Umgebung von 1 beliebig oft beliebig nahe.

A sei die Menge der Abelschen Endwerte. Besteht A aus einem einzigen Wert a, so gilt offenbar

$$\lim_{t \to 1} F(t) = a \ , \tag{6}$$

und die Reihe (1) heißt dann A-limitierbar. Mit Rücksicht auf die Voraussetzung (2) gelangt hier aber der Satz von J. E. Littlewood[1]) zur Anwendung, wonach in diesem Falle die ursprüngliche Reihe (1) bereits konvergiert, so daß auch

$$\lim_{n \to \infty} s_n = a \tag{7}$$

gilt, wobei die Zahlen s_n die Teilsummen

$$s_n = \sum_0^n c_\nu \tag{8}$$

der Reihe (1) bezeichnen. Daß aus der Konvergenz (7) umgekehrt (6) folgt, ist Inhalt des älteren und elementareren Abelschen Stetigkeitssatzes. In den andern Fällen, in denen also keine der beiden Konvergenzen (6) und (7) stattfindet, bestehen aber immerhin enge Beziehungen zwischen der Menge A der Abelschen Endwerte der Reihe (1) und der Häufungswertmenge S der Folge ihrer Teilsummen (8). An erster Stelle wäre hier etwa der Knoppsche Kernsatz[2]) zu erwähnen, auf den wir hier nicht eintreten wollen.

Das Theorem, das wir in der vorliegenden Note behandeln, drückt eine metrische Beziehung aus, die zwischen den beiden Mengen A und S besteht, und besagt im wesentlichen, daß Abelsche Endwerte (Punkte von A) und Teilsummenhäufungswerte (Punkte von S) einer Reihe mit vorgeschriebenem c (Formel 3) nicht zu weit voneinander entfernt sein können. Genauer gilt das folgende Theorem:

Es gibt eine beste (d. h. kleinste) positive Konstante ϱ, für welche die folgende Aussage richtig ist: Zu jedem Abelschen Endwert a, bzw. zu jedem Teilsummenhäufungswert s der Reihe (1) *gibt es stets einen Teilsummenhäufungswert s bzw. einen Abelschen Endwert a, so daß $|a - s| \leqq \varrho c$ ausfällt.* (9)

Der genaue Wert der Konstanten ϱ ist dem Verf. nicht bekannt. Aus den nachfolgend durchgeführten Rechnungen ergibt sich nur, daß

$$\frac{1}{\theta}\left[1 - \sqrt{\frac{2\pi\theta}{e^{\pi\theta} - e^{-\pi\theta}}}\right] \leqq \varrho \leqq C + 2\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx \tag{10}$$

---

[1]) Vgl. die Schilderung der Problemlage bei *E. Landau*, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Zweite Auflage, Berlin 1929, Drittes Kapitel; ferner *J. E. Littlewood*, The converse of Abels Theorem on Power Series, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 9 (1911), S. 434—448, bes. S. 438.

[2]) *K. Knopp*, Zur Theorie der Limitierungsverfahren (Erste Mitteilung), Mathematische Zeitschrift Bd. 31 (1930), S. 97—127, bes. S. 115.

gilt; hierbei bezeichnet θ einen beliebigen positiven Parameter und C ist die Eulersche Konstante. Die angeschriebene Ungleichung wird offenbar dadurch extremal ausgenutzt, daß die Funktion auf der linken Seite durch ihr Maximum, das sie bei $\theta = 1{,}1909\ldots$ erreicht, ersetzt wird. So ergibt sich

$$0{,}4858\ldots \leqq \varrho \leqq 1{,}0160\ldots \,. \tag{11}$$

Aus dem Distanztheorem (9) folgt z. B. für den Fall, daß an Stelle von (2) sogar

$$c_\nu = o\left(\frac{1}{\nu}\right) \tag{12}$$

gilt, daß für die Mengen A und S die Identität

$$A \equiv S \tag{13}$$

gilt, gleichgültig, ob die Mengen einpunktig oder mehrpunktig sind. Die Relation (13) stellt so eine Erweiterung des klassischen Abelschen Stetigkeitssatzes samt der Umkehrung von Tauber[3]) auch auf die Fälle dar, wo die Reihe (1) bzw. die Funktion (4) gar nicht konvergent ausfällt.

Von dieser allgemeiner gefaßten Aussage gibt es nun allerdings keine Littlewoodsche Erweiterung, d. h. wenn an Stelle von (12) wieder nur (2) gilt, ist die Identität (13) nur noch im Falle der Konvergenz richtig, sonst aber nicht mehr, wie einfache Beispiele, u. a. auch das in der nachfolgenden Rechnung erwähnte, darlegen.

Wir skizzieren nun die kurzen Rechnungen, die zu den Resultaten (9) und (10) führen:

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Im Hinblick auf (2) läßt sich ein $m \geqq 0$ so bestimmen, daß für alle $\nu > m$ $\nu \mid c_\nu \mid \leqq c + \varepsilon$ ausfällt. Für $0<t<1$ ist nun

$$s_n - F(t) = \sum_0^m c_\nu (1 - t^\nu) + \sum_{m+1}^n c_\nu (1 - t^\nu) - \sum_{n+1}^\infty c_\nu t^\nu \,,$$

und also

$$| s_n - F(t) | \leqq \sum_0^m |c_\nu| (1 - t^\nu) + (c + \varepsilon) \left[\sum_{m+1}^n \frac{1 - t^\nu}{\nu} + \sum_{n+1}^\infty \frac{t^\nu}{\nu} \right] ,$$

oder

$$\leqq \sum_0^m |c_\nu| (1 - t^\nu) + (c + \varepsilon) \left[\sum_1^n \frac{1}{\nu} + \log \frac{1}{1-t} - 2 \sum_1^n \frac{t^\nu}{\nu} \right] .$$

---

[3]) *A. Tauber*, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 8 (1897), S. 273—277, bes. S. 274.

Durch eine Integraldarstellung der enthaltenen endlichen Reihe gewinnt man zunächst

$$\leqq \sum_0^m |c_\nu|(1-t^\nu) + (c+\varepsilon)\left[\sum_1^n \frac{1}{\nu} + \log\frac{1}{1-t} - 2\int_0^t \frac{1-\theta^n}{1-\theta}\,d\theta\right],$$

oder

$$\leqq \sum_0^m |c_\nu|(1-t^\nu) + (c+\varepsilon)\left[\sum_1^n \frac{1}{\nu} - \log\frac{1}{1-t} + 2\int_0^t \frac{\theta^n\,d\theta}{1-\theta}\right].$$

Durch die Substitution $\theta = e^{-\frac{x}{n}}$ erreicht man die Form

$$< \sum_0^m |c_\nu|(1-t^\nu) + (c+\varepsilon)\left[\sum_1^n \frac{1}{\nu} - \log\frac{1}{1-t} + 2\int_{\log\left(\frac{1}{t}\right)^n}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx\right],$$

wenn man noch berücksichtigt, daß $n(e^{\frac{x}{n}}-1) \geqq x$ ist.

Nun läßt sich offensichtlich eine nur von ε abhängige Schranke N angeben, daß für alle $n > N$ und

$$1-\frac{1}{n} \leqq t < 1-\frac{1}{n+1} \tag{14}$$

stets die Relation

$$|s_n - F(t)| < \varepsilon + (c+\varepsilon)\left[C + 2\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx + \varepsilon\right] \tag{15}$$

gilt. Damit ist die Schlüsselformel gefunden, die in naheliegender Weise durch Anwendung des Bolzano-Weierstraßchen Häufungsstellensatzes sofort den Schluß

$$|s-a| \leqq c\left[C + 2\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx\right] \tag{16}$$

gestattet, wobei man entweder von einem Abelschen Endwert a oder von einem Teilsummenhäufungswert s ausgehen kann.

Im folgenden betrachten wir ein einfaches Beispiel. Es sei

$$c_\nu = (-1)^\nu \binom{-i\theta}{\nu}, \qquad \theta > 0, \qquad i = \sqrt{-1}, \tag{17}$$

also

$$F(t) = \sum_0^\infty (-1)^\nu \binom{-i\theta}{\nu} t^\nu = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{i\theta}$$

oder

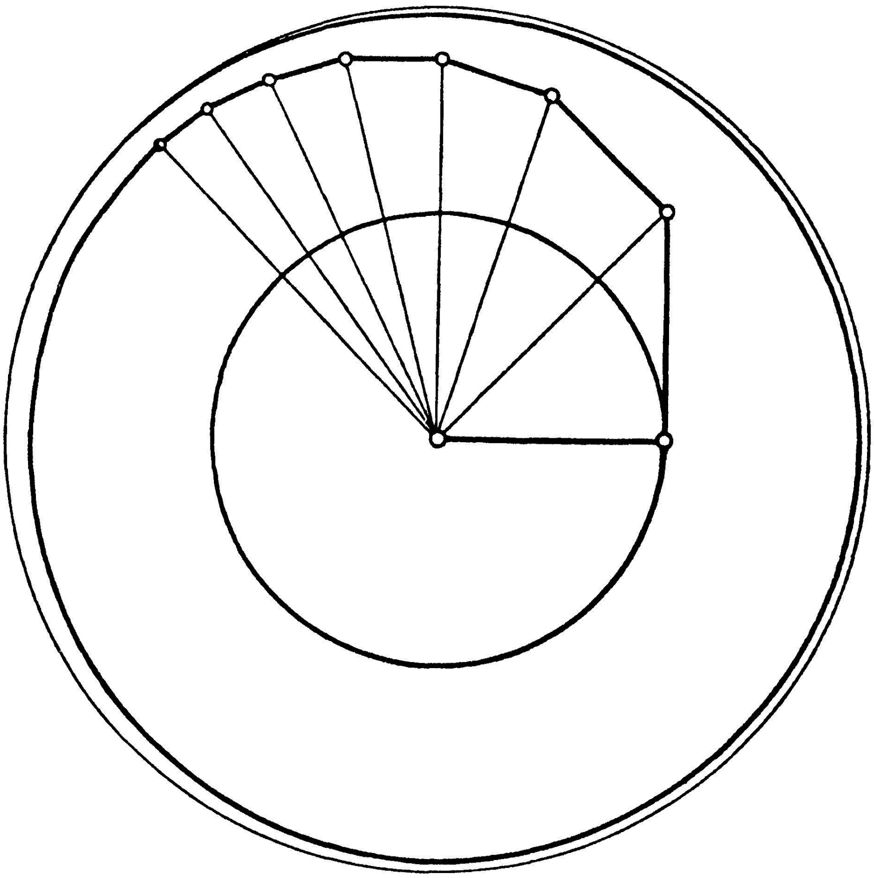
$$F(t) = \cos\left(\theta \log \frac{1}{1-t}\right) + i \sin\left(\theta \log \frac{1}{1-t}\right) . \tag{18}$$

Für die eingesetzten Logarithmen sind die Hauptwerte zu nehmen. Für $t \to 1$ von links wandert der Funktionswert $F(t)$ ohne Ende auf dem Einheitskreis im positiven Sinne herum. Die Menge $|a| = 1$ ist somit die Abelsche Endwertmenge A der betrachteten Menge. Wie man induktiv leicht verifiziert, ist für $n \geqq 1$ [4])

$$s_n = \sum_0^n (-1)^\nu \binom{-i\theta}{\nu} = (1 + i\theta)\left(1 + \frac{i\theta}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{i\theta}{n}\right), \tag{19}$$

und wie man ebenso mühelos rechnet, ist

$$c_n = \frac{i\theta}{n} s_{n-1} . \tag{20}$$



[4]) Vgl. *K. Knopp*, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin: J. Springer, 3. Auflage 1931, S. 441.

Diese letzte Relation besagt, daß der Zahlvektor c_ν auf dem Zahlvektor $s_{\nu-1}$ senkrecht steht. Wird die in der Reihe (1) vorgeschriebene Addition geometrisch vollzogen, so entsteht ein außerhalb des Einheitskreises sich öffnendes Spiralpolygon (vgl. obenstehende Figur). Nun ist

$$|s_n| = \sqrt{(1+\theta^2)\left(1+\frac{\theta^2}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{\theta^2}{n^2}\right)}\,, \tag{21}$$

so daß nach einer bekannten Formel auf

$$\lim_{n\to\infty} |s_n| = \sqrt{\frac{e^{\pi\theta}-e^{-\pi\theta}}{2\pi\theta}} \tag{22}$$

geschlossen wird. Dies bedeutet, daß der Kreis vom Radius

$$r = \sqrt{\frac{e^{\pi\theta}-e^{-\pi\theta}}{2\pi\theta}} \tag{23}$$

asymptotischer Kreis des oben bezeichneten Spiralpolygons ist. Die Menge $|s| = r$ ist somit identisch mit der Menge S der Teilsummenhäufungswerte der betrachteten Reihe. Die kleinste zwischen Abelschen Endwerten und Teilsummenhäufungswerten in Betracht fallende Distanz ist bei dem gewählten Beispiel offensichtlich der Abstand des Einheitskreises (Menge A) vom genannten asymptotischen Kreis (Menge S). Diese beträgt $r-1$. Nach Definition der Konstanten ϱ bei (9) gilt

$$r - 1 \leqq \varrho c\,.$$

Im Hinblick auf (20) und (22) ist aber

$$c = \lim_{\nu\to\infty} \nu\,|c_\nu| = \theta\sqrt{\frac{e^{\pi\theta}-e^{-\pi\theta}}{2\pi\theta}}\,, \tag{24}$$

so daß jetzt

$$\frac{1}{\theta}\left[1-\sqrt{\frac{2\pi\theta}{e^{\pi\theta}-e^{-\pi\theta}}}\right] \leqq \varrho \tag{25}$$

gefolgert werden kann. Damit ist zusammen mit (16) das Distanztheorem (9) bzw. (10) nachgewiesen.

(Eingegangen den 5. August 1943.)