Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux.

Autor: Alexits, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15556

Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux

Par Georges Alexits, Budapest

Il est connu que, dans l'intervalle fermé $[-1,1]$ toute fonction $w(x) \geqq 0$ intégrable et de carré intégrable pour laquelle $\int_{-1}^{+1} w(x)dx > 0$ détermine exactement un système de polynomes $\{p_n(x)\}$ tel que le n-ième terme $p_n(x)$ de ce système soit un polynome de degré n, orthogonal et normé dans l'intervalle $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{+1} w(x)\, p_i(x)\, p_j(x)\, dx = \begin{cases} 0\,, & \text{si } i \neq j\,, \\ 1\,, & \text{si } i = j\,. \end{cases}$$

A toute fonction $f(x)$ intégrable et de carré intégrable, il correspond alors un développement formel suivant les polynomes $p_n(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \tag{1}$$

où

$$c_n = \int_{-1}^{+1} w(x)\, f(x)\, p_n(x)\, dx\ .$$

Le problème de la convergence du développement (1) a été analysé en premier lieu sous l'aspect de l'équiconvergence[1]) avec la série de Fourier de la fonction $f(x)$, si l'on y remplace la variable x par $\cos \vartheta$. Il est évident que cette analyse impose des conditions restrictives concernant le système $\{p_n(x)\}$; il serait donc intéressant de traiter les problèmes de convergence qui s'y rattachent, même lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites. Il s'agit surtout des problèmes suivants:

1. Quelles sont les conditions concernant les coefficients c_n pour que la série (1) converge en $[-1,1]$ presque partout?

2. La convergence de (1) étant assurée dans un sous-intervalle de $[-1,1]$, quelles sont les conditions concernant la fonction $f(x)$ pour que la série (1) y converge absolument et uniformément?

3. L'uniformité de la convergence du développement (1) étant établie, quel est l'ordre de grandeur de l'erreur $|f(x) - S_n(x)|$ commise, si l'on ne considère que les $n+1$ premiers termes

---

[1]) En ce qui concerne les théorèmes respectifs et les propriétés élémentaires des polynomes orthogonaux, v. par exemple *G. Szegö*, Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Publ. T. XXIII. 1939.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x)$$

du développement (1) ?

Dans les paragraphes suivants, nous allons répondre à ces questions pour une classe étendue de systèmes orthogonaux $\{p_n(x)\}$. Les résultats obtenus sont analogues aux résultats correspondants bien connus dans la théorie des séries de Fourier.

1. Convergence presque partout

Si, dans l'intervalle $[-1,1]$, *on a* $|p_n(x)| \leqq P$ *pour tout* $n = 0,1,\ldots$ *et* $0 \leqq w(x) \leqq W$ (P et W sont des constantes absolues), *alors la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log n$ *entraîne la convergence presque partout du développement* (1).

Nous n'avons qu'à rechercher l'ordre de grandeur des fonctions

$$\varrho_n(x) = \int_{-1}^{+1} w(t) \left| \sum_{k=0}^{n} p_k(t)\, p_k(x) \right| dt$$

connues sous le nom de fonctions de Lebesgue du système $\{p_n(x)\}$, parce que M. Kaczmarz[2]) a démontré que $\varrho_n(x) = O(\log n)$ presque partout et la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log n$ impliquent la convergence presque partout de la série (1). Pour démontrer la relation $\varrho_n(x) = O(\log n)$, divisons l'intégrale définissant $\varrho_n(x)$ en trois parties:

$$\int_{-1}^{+1} = \int_{-1}^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{1} = J_1 + J_2 + J_3 \,.$$

Envisageons d'abord J_2; nous obtenons par application de l'inégalité de Schwarz:

$$J_2 \leqq \left\{ \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} w(t)\, dt \cdot \int_{-1}^{+1} w(t) \left[\sum_{k=0}^{n} p_k(t)\, p_k(x) \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

---

[2]) *S. Kaczmarz-H. Steinhaus*, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa, 1935, p. 175.

Il s'ensuit donc, les polynomes $p_k(t)$ étant orthogonaux et normés et $w(t) \leqq W$:

$$J_2 \leqq \left\{ \frac{2W}{n} \sum_{k=0}^{n} p_k^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Or $p_k^2(x) \leqq P^2$, par conséquent

$$J_2 \leqq P \sqrt{\frac{2W(n+1)}{n}} \quad . \tag{2}$$

Pour évaluer l'intégrale J_1, rappelons la formule de Christoffel-Darboux[3]):

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t)\, p_k(x) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \; \frac{p_{n+1}(t)\, p_n(x) - p_n(t)\, p_{n+1}(x)}{t-x}$$

où α_n désigne le coefficient de x^n dans le polynome $p_n(x)$. On a alors

$$J_1 \leqq \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \int_{-1}^{x-\frac{1}{n}} \frac{|\, p_{n+1}(t)\, p_n(x) - p_n(t)\, p_{n+1}(x)\, |}{|\, t-x\, |} \, w(t)\, dt \quad .$$

Mais

$$\int_{-1}^{+1} w(x)\, p_{n+1}(x)\, p_n(x)\, x\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{+1} w(x)\, p_{n+1}(x)\, (\alpha_n x^{n+1} + \cdots)\, dx = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \int_{-1}^{+1} w(x)\, p_{n+1}^2(x)\, dx = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} ,$$

donc, par application de l'inégalité de Schwarz:

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \leqq \left\{ \int_{-1}^{+1} w(x)\, p_{n+1}^2(x)\, dx \cdot \int_{-1}^{+1} w(x)\, p_n^2(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} = 1 \quad .$$

Il en résulte, vu que $|\, p_{n+1}(t)\, p_n(x) - p_n(t)\, p_{n+1}(x)\, | \leqq 2P^2$ et $w(x) \leqq W$:

$$J_1 \leqq 2P^2 W \int_{-1}^{x-\frac{1}{n}} \frac{dt}{|\, t-x\, |} = 2P^2 W \left[\log\,(1+x) + \log n \right] \tag{3}$$

et on obtient de la même manière

$$J_3 \leqq 2P^2 W \left[\log\,(1-x) + \log n \right] . \tag{4}$$

---

[3]) L. c. [1]), p. 42.

Les inégalités (2), (3) et (4) sont équivalentes à $\varrho_n(x) = O(\log n)$ pour tout point intérieur de l'intervalle $[-1,1]$. La démonstration de notre théorème est donc achevée.

2. Un lemme

En introduisant la variable $\vartheta = \arccos x$ au lieu de x, on obtient, au lieu de $f(x)$, la fonction paire $f(\cos\vartheta)$ définie dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et ayant, par conséquent, une série de Fourier qui ne contient que des cosinus. La n-ième somme partielle de cette série de Fourier sera

$$s_n(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\vartheta$$

où

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta\ .$$

Nos recherches suivantes ont pour point de départ le lemme suivant:

Si $0 \leqq w(x) \leqq W$ *dans l'intervalle* $[-1,1]$, *alors on a*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2 \leqq \frac{W\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2\ . \tag{5}$$

Remarquons d'abord que le système $\{p_n(x)\}$ est, comme on sait, complet dans l'espace des fonctions intégrables avec leur carré, c'est dire que l'égalité de Parseval

$$\int_{-1}^{+1} w(x)\, f^2(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$$

est valable. Or les polynomes $p_n(x)$ étant orthogonaux et normés, on a aussi

$$\int_{-1}^{+1} w(x)[f(x) - S_n(x)]^2\, dx = \int_{-1}^{+1} w(x)\, f^2(x)\, dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\ ,$$

par conséquent

$$\int_{-1}^{+1} w(x)\,[f(x) - S_n(x)]^2\, dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2\ . \tag{6}$$

L'intégrale du premier membre de (6) représente, comme on sait, un minimum en ce sens que, pour tout polynome $P_n(x)$ de degré n, on a

$$\int_{-1}^{+1} w(x)\,[f(x) - S_n(x)]^2\,dx \leqq \int_{-1}^{+1} w(x)\,[f(x) - P_n(x)]^2\,dx\ .$$

Choisissons pour $P_n(x)$ le polynome de n-ième degré engendré par la n-ième somme partielle $s_n(\vartheta)$ de la série de Fourier de $f(\cos\vartheta)$ en remplaçant ϑ par la variable $x = \cos\vartheta$. L'inégalité précédente s'écrit alors sous la forme

$$\int_{-1}^{+1} w(x)\,[\,f(x) - S_n(x)\,]^2\,dx \leqq \int_0^{\pi} w(\cos\vartheta)\,\sin\vartheta\,[f(\cos\vartheta) - s_n(\vartheta)]^2 d\vartheta\ . \tag{7}$$

Par hypothèse $0 \leqq w(x) \leqq W$, donc

$$\int_0^{\pi} w(\cos\vartheta)\,\sin\vartheta\,[f(\cos\vartheta) - s_n(\vartheta)]^2\,d\vartheta \leqq W \int_0^{\pi} [\,f(\cos\vartheta) - s_n(\vartheta)\,]^2 d\vartheta =$$

$$= \frac{W\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2\ ,$$

et la relation (5) résulte immédiatement de (6) et (7).

3. Convergence absolue

De l'inégalité (5) on peut déduire un critère de convergence absolue analogue à un critère connu dans la théorie des séries de Fourier. Pour y aboutir, nous démontrerons d'abord par analogie avec un théorème de M. Szász[4]) concernant les coefficients de Fourier le théorème suivant:

Si $0 \leqq w(x) \leqq W$ *et si la fonction* $f(x)$ *satisfait en* $[-1{,}1]$ *à une condition de Lipschitz* $|f(x_1) - f(x_2)| \leqq \lambda |x_1 - x_2|^{\alpha}$ *avec* $\alpha > 0$, *alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\,c_n\,|^{2\beta} < \infty \tag{8}$$

pour tout exposant $\beta > \dfrac{1}{(2\alpha + 1)}$.

Il vient d'abord par application de l'inégalité de Hölder:

$$\sum_{k=2^{\nu}+1}^{2^{\nu+1}} |\,c_k\,|^{2\beta} \leqq 2^{(1-\beta)\nu} \left(\sum_{k=2^{\nu}+1}^{2^{\nu+1}} c_k^2\right)^{\beta}$$

d'où en vertu de l'inégalité (5):

---

[4]) *O. Szász*, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1922, p. 135—150.

$$\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} | c_k |^{2\beta} \leqq 2^{(1-\beta)\nu} \left(\frac{W\pi}{2} \sum_{k=2^\nu+1}^{\infty} a_k^2\right)^{\beta}. \tag{9}$$

La fonction $f(x)$ satisfait en $[-1,1]$, par hypothèse, à une condition de Lipschitz d'ordre α, ou ce qui revient au même $f(\cos\vartheta)$ satisfait en $[0,\pi]$ et par conséquent aussi en $[-\pi,\pi]$ à une condition de Lipschitz d'ordre α. Il existe donc[5]) un polynome trigonométrique $t_{2^\nu}(\vartheta)$ d'ordre 2^ν tel que

$$\operatorname{Max} \left| f(\cos\vartheta) - t_{2^\nu}(\vartheta) \right| = O\left(\frac{1}{2^{\alpha\nu}}\right),$$

par conséquent[6])

$$\sum_{k=2^\nu+1}^{\infty} a_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(\cos\vartheta) - s_{2^\nu}(\vartheta)]^2 d\vartheta \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(\cos\vartheta) - t_{2^\nu}(\vartheta)]^2 d\vartheta = O\left(\frac{1}{2^{2\alpha\nu}}\right).$$

Il s'ensuit donc d'après (9)

$$\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |c_k|^{2\beta} = O\left(\frac{1}{2^{(2\alpha\beta+\beta-1)\nu}}\right),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=2}^{\infty} | c_k |^{2\beta} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |c_k|^{2\beta} = \sum_{\nu=0}^{\infty} O\left(\frac{1}{2^{(2\alpha\beta+\beta-1)\nu}}\right).$$

Or $\beta > \dfrac{1}{(2\alpha+1)}$, donc $2\alpha\beta + \beta - 1 > 0$, et la série écrite en dernier lieu converge, ce qui établit notre proposition.

Admettons maintenant que $|p_n(x)| \leqq P$ pour tout $n = 0,1,\ldots$ dans un intervalle $[a,b]$ contenu dans l'intervalle fondamental $[-1,1]$; cet intervalle $[a,b]$ sera dit un intervalle de limitation du système $\{p_n(x)\}$. Le critère de convergence absolue en question est un corollaire immédiat du théorème précédent:

Si $0 \leqq w(x) \leqq W$ et si la fonction $f(x)$ satisfait en $[-1,1]$ à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > \frac{1}{2}$, la série (1) *converge absolument dans tout intervalle de limitation du système $\{p_n(x)\}$.*

En effet, $\alpha > \frac{1}{2}$ équivaut à $\dfrac{1}{2\alpha+1} < \frac{1}{2}$; on peut donc poser dans la

---

[5]) *S. Bernstein*, Mém. Acad. Belge. (2), 4, 1912, p. 1—104.

[6]) L'intégrale $\int_{-\pi}^{+\pi} [f(\cos\vartheta) - t_{2^\nu}(\vartheta)]^2 d\vartheta$ devient minimale, lorsque $t_{2^\nu}(\vartheta) = s_{2^\nu}(\vartheta)$.

relation (8): $\beta = \frac{1}{2}$, ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ et, dans tout intervalle de limitation du système $\{p_n(x)\}$, aussi la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n\, p_n(x)|$.

4. L'ordre de grandeur de l'approximation

L'inégalité (5) nous servira aussi à l'évaluation de l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction $f(x)$ par les sommes partielles $S_n(x)$ de son développement (1).

Si la r-ième dérivée $f^{(r)}(x)$ de $f(x)$ existe en $[-1,1]$ presque partout[7]) *et si sa variation totale en $[-1,1]$ ne surpasse pas la valeur finie V, si, de plus, $0 \leqq w(x) \leqq W$, alors on a dans tout intervalle de limitation du système $\{p_n(x)\}$*

$$\operatorname{Max} |f(x) - S_n(x)| < \sqrt{\frac{8W}{(2r+1)\pi}} \cdot \frac{PV}{n^r} .$$

En effet, la variation de $f^{(r)}(x)$ en $[-1,1]$ étant $\leqq V$, la variation de $f^{(r)}(\cos\vartheta)$ en $[-\pi, \pi]$ est $\leqq 2V$. Il s'ensuit par application d'un théorème connu[8]) sur la grandeur des coefficients de Fourier de la fonction $f(\cos\vartheta)$:

$$|a_k| \leqq \frac{2V}{\pi k^{r+1}},$$

par suite

$$\sum_{k=2^\nu+1}^{\infty} a_k^2 \leqq \frac{4V^2}{\pi^2} \sum_{k=2^\nu+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r+2}} < \frac{4V^2}{(2r+1)\pi^2\, 2^{(2r+1)\nu}} . \tag{10}$$

Or, dans un intervalle de limitation du système $\{p_n(x)\}$, on a en vertu de l'inégalité de Cauchy

$$\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |c_k p_k(x)| \leqq P \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |c_k| \leqq P \cdot 2^{\frac{\nu}{2}} \left(\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

et d'après (5):

$$\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^2 \leqq \frac{W\pi}{2} \sum_{k=2^\nu+1}^{\infty} a_k^2 ;$$

---

[7]) Aux points de l'ensemble de mesure nul où $f^{(r)}(x)$ n'existe pas, on peut donner des valeurs finies arbitraires à $f^{(r)}(x)$.

[8]) V. par exemple *D. Jackson*, The Theory of Approximation. Amer. Math. Soc. Publ. T. XI, p. 50.

cela donne combiné avec (10):

$$\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^2 < \frac{2W}{(2r+1)\pi} \cdot \frac{V^2}{2^{(2r+1)\nu}} .$$

Il résulte de là en vertu de l'inégalité (11):

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k p_k(x)| = \sum_{\nu=\log_2 n}^{\infty} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} |c_k p_k(x)| < \sqrt{\frac{2W}{(2r+1)\pi}} \sum_{\nu=\log_2 n}^{\infty} \frac{PV}{2^{r\nu}} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{8W}{(2r+1)\pi}} \cdot \frac{PV}{n^r} . \tag{12}$$

La série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k p_k(x)$ converge donc dans tout intervalle de limitation du système $\{p_n(x)\}$ et elle y représente, $\{p_n(x)\}$ étant un système complet, la fonction $f(x)$. On en tire immédiatement

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k p_k(x)$$

et, tenant compte de l'inégalité (12), on obtient

$$\mathrm{Max}\, | f(x) - S_n(x) | < \sqrt{\frac{8W}{(2r+1)\pi}} \cdot \frac{PV}{n^r} ,$$

ce qui était justement notre proposition.

Du point de vue des applications, le problème de l'ordre de grandeur de l'approximation est surtout intéressant lorsque $f(x)$ est une fonction composée d'un nombre fini de portions convexes, car les fonctions correspondant aux courbes tracées par les appareils enrégistreurs sont justement de cette nature. Pour cette classe de fonctions, le résultat précédant nous fournit le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est, dans l'intervalle $[-1,1]$, composée d'un nombre fini g de portions convexes, si elle satisfait à la condition de Lipschitz proprement dite $|f(x_1) - f(x_2)| \leqq \lambda |x_1 - x_2|$, et si $0 \leqq w(x) \leqq W$, alors

$$\mathrm{Max}\, | f(x) - S_n(x) | < \frac{7 g \lambda P \sqrt{W}}{2n}$$

dans tout intervalle de limitation du système $\{p_n(x)\}$.

En effet, la condition de Lipschitz entraîne l'existence presque partout de la dérivée $f'(x)$ et $|f'(x)| \leqq \lambda$. Mais $f'(x)$ est monotone[9]) sur toute portion convexe de la fonction $f(x)$, sa variation est donc $\leqq 2\lambda$ sur une telle portion; vu que le nombre de ces portions est g, la variation totale de $f'(x)$ en $[-1,1]$ est $\leqq 2g\lambda$. Ce fait, combiné avec le théorème précédent, implique l'inégalité

$$\text{Max } |f(x) - S_n(x)| < \sqrt{\frac{32\,W}{3\pi}} \cdot \frac{g\lambda P}{n} < \frac{7g\lambda P\sqrt{W}}{2n} .$$

Remarque. Les conditions concernant le système $\{p_n(x)\}$ dont nous avons fait usage dans les démonstrations des paragraphes **3** et **4** étaient les suivantes: 1. $0 \leqq w(x) \leqq W$; 2. le système $\{p_n(x)\}$ possède en $[-1,1]$ un intervalle de limitation. Les deux conditions sont satisfaites par des systèmes de polynomes orthogonaux pour lesquels M. Szegö a démontré[10]) l'équiconvergence du développement (1) avec la série de Fourier de la fonction $f(\cos\vartheta)$. Ces systèmes possèdent donc, même en ce qui concerne la convergence absolue et l'ordre de grandeur de l'approximation, des propriétés analogues aux séries de Fourier. Nos conditions sont satisfaites en particulier par les polynomes classiques de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, lorsque $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0$; en effet, la fonction $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ est bornée alors en $[-1,1]$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$ l'intervalle $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$ est un intervalle de limitation du système $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$. Les théorèmes des paragraphes **3** et **4** sont donc valables pour les polynomes de Jacobi d'ordre non négatif, classe de polynomes comprenant entre autres les polynomes de Legendre. Mais de quelque façon qu'on choisisse le système $\{p_n(x)\}$, l'ordre d'approximation trouvé en **4** ne se laisse pas améliorer sensiblement, parce que, en posant $f(x) = |x|$, la fonction $f(x)$ est composée d'une seule portion convexe et, pourtant, l'ordre de grandeur de la meilleure approximation de $f(x) = |x|$ par un polynome de degré n est[11]) $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Par conséquent, $\text{Max}\,|f(x) - S_n(x)|$ ne peut pas avoir une borne essentiellement inférieure à celle du paragraphe **4**, notamment à $\frac{7g\lambda P\sqrt{W}}{2n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

(Reçu le 19 mai 1943.)

[9]) Aux points ξ de l'ensemble de mesure nul où $f'(x)$ n'existe pas, nous posons $f'(\xi) = f'(\xi - 0)$.

[10]) L. c. [1]), p. 306—321.

[11]) L. c. [5]), p. 60.