Über die Nullstellen von Funktionen, die Lösungen Sturm-Liouville'scher Differentialgleichungen sind

Von E. Makai, Budapest

1. Übersicht

In zwei früheren Arbeiten (Fußnoten [2]), [4])) habe ich die Eigenwerte gewisser Randwertprobleme untersucht, die zu Sturm-Liouville'schen Differentialgleichungen

$$y'' + \lambda \varrho(x) y = 0 \qquad \text{und} \qquad (p(x)y')' + \lambda q(x) = 0 \tag{1.1}$$

gehören. Ich habe mit variationstheoretischen Hilfsmitteln gezeigt, daß falls die Größen $\varrho(x)$ bzw. $p(x)$ und $q(x)$ gewissen Bedingungen unterworfen sind, man für die Eigenwerte λ_n obere Grenzen angeben kann, die im allgemeinen schärfer sind, als die bisher bekannten. In dieser Abschätzungsformel spielt der Integralmittelwert von $\sqrt{\varrho(x)}$ bzw. von $\sqrt{p(x)/q(x)}$ eine wesentliche Rolle. (In den klassischen Abschätzungsformeln figurieren die Maxima und Minima dieser Ausdrücke.)

Nun werde ich diese Abschätzungsformeln aufs neue beweisen, und zwar mit dem anderen wichtigen Verfahren der Eigenwerttheorie, mit der Vergleichsmethode von Sturm. Diese Beweismethode hat zwei Vorteile. Erstens lassen sich die Sätze in verschärfter Form aussprechen; zweitens kann man zwanglos ein Gegenstück dieser Sätze beweisen, das in gewissen Fällen gute untere Schranken für die Eigenwerte λ_n angibt (§ 3, Satz 1 und 2).

Unser eigentliches Ziel ist aber nicht Eigenwertabschätzungen zu geben, sondern aus der Größe der Eigenwerte auf die Nullstellen der Lösungen der Gleichungen (1.1) zu schließen. Wie diese beiden Probleme zusammenhängen, erörtern wir vorhergehend an einem möglichst einfachen Beispiel im § 2. Der Satz 3 (§ 3) ist eine Übertragung des Inhaltes der beiden ersten Sätze auf das Problem der Nullstellenabstände.

Eine Reihe der bekannten Differentialgleichungen der Analysis haben eine solche Form, daß unsere Sätze auf sie anwendbar sind. Ein allgemeiner Typ solcher Differentialgleichungen sind Gleichungen von der Form $y'' + \lambda \varrho(x) y = 0$, wo $\varrho(x)$ eine in einem gewissen Intervall von unten aus konkave Funktion ist, oder $\varrho = e^{\sigma(x)}$ mit $\sigma''(x) < 0$ ist. Ein anderes interessantes und leicht zu behandelndes Beispiel ist die Differentialgleichung

$$(p(x)y')' + \lambda p(x) y = 0 \,. \tag{1.2}$$

Die Nullstellen der Lösungen dieser Gleichung liegen — roh gesagt — *äquidistant.* Zu diesem Gleichungstyp gehören die Legendre'schen und ultrasphärischen Funktionen. Ein hier nicht zu behandelndes Beispiel ist die Differentialgleichung der Jacobischen Polynome; mittels der Transformation $x = \cos \vartheta$ kann sie auf die Form (1.2) gebracht werden (§ 4).

In den nächsten beiden Paragraphen beschäftigen wir uns mit den Wurzeln der *Hermite'schen Polynome.* Wenn $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n}$ die in abnehmender Reihenfolge geordneten Wurzeln des n-ten Hermite'schen Polynoms bedeuten, dann können wir für die Größen

$$T(x_{n,k}) = \int_{x_{n,k}}^{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1-x^2}\, dx =$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\arccos \frac{x_{n,k}}{\sqrt{2n+1}} - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{1-\frac{x^2_{n,k}}{2n+1}}\right)$$

$$\left(0 \leqslant \arccos \frac{x_{n,k}}{\sqrt{2n+1}} \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

enge Schranken angeben. Im § 5 beweisen wir, daß $T(x_{n,k})$ zwischen den Schranken $(k - \frac{1}{4})\pi$ und $k\pi$ liegt, falls $x_{n,k}$ positiv ist. Im § 6 erhalten wir nach einer eingehenderen und allerdings auch schwierigeren Untersuchung, daß für positive Wurzeln $x_{n,k}$, also für $k \leqq [n/2]$, $T(x_{n,k}) = (k - \frac{1}{4} + \varepsilon_{n,k})\pi$ ist, wo $\varepsilon_{n,k}$ eine kleine positive Zahl bedeutet. Von den Zahlen $\varepsilon_{n,k}$ beweisen wir die Ungleichungen

$$\varepsilon_{n-1,k} < \varepsilon_{n,k}\,, \qquad \varepsilon_{n,k} < \varepsilon_{n,k-1}$$

$$0{,}0052 < \varepsilon_{n,1} < 0{,}0087\,, \qquad 0 < \varepsilon_{n,k} < 0{,}0036 \qquad (k > 1)\,.$$

Die numerischen Konstanten hängen mit den ersten beiden Wurzeln der Airy'schen Funktion zusammen. Sie sind bestmögliche Konstanten.

Um das Vorstehende zu veranschaulichen, können wir folgendermaßen verfahren: Wir zeichnen in der (x, y) Koordinatenebene einen Halbkreis, der in der oberen Hälfte der Koordinatenebene liegt. Sein Mittelpunkt ist der Anfangspunkt; die Größe des Halbmessers ist $\sqrt{2n+1}$. Der Punkt $(\sqrt{2n+1}, 0)$ sei mit A bezeichnet. Wir zeichnen nun die Geraden $x = x_{n,k}$ $(x_{n,k} > 0)$. Diese Geraden sollen die x-Achse im Punkte B_k und den Halbkreis im Punkte C_k schneiden. $T(x_{n,k})$ ist dann die Größe derjenigen Fläche, die durch die Geraden $\overline{AB_k}$, $\overline{B_k C_k}$ und den Kreisbogen $\widehat{AC_k}$ begrenzt ist. *Von diesem Kreisteile behaupten wir, daß die Größe seines Flächeninhaltes zwischen den engen Schranken* $(k - \frac{1}{4})\pi$ *und* $(k - 0{,}2413)\pi$ *liegt.*

Im § 7 geben wir vor allem eine direkte Abschätzung für die Wurzeln $x_{n,k}$ der Hermite'schen Polynome, das heißt eine doppelte Ungleichung von der Form $s_{n,k} < x_{n,k} < S_{n,k}$ [Formel (7.6)]. Diese Ungleichung gibt eine größenordnungsgemäß bessere Abschätzung der Zahlen $x_{n,k}$, als die mir bekannte, von Szegö stammende beste Abschätzung (7.6a). Ja sogar für die eingehend untersuchte größte Wurzel von $H_n(x)$ gibt sie eine Einschränkung, die teilweise besser ist, als die bisher bekannten. Ebenso lassen sich enge Schranken für die Differenz $x_{n,1} - x_{n,2}$ finden, engere, als die von *E. Hille* (Fußnote [13]) angegebenen. Endlich um die Güte unserer Schranken zu veranschaulichen, geben wir eine Tabelle für die Schranken der Wurzeln von $H_{10}(x)$.

Im § 8 beschäftigen wir uns mit den *Laguerre'schen Polynomen.* Wenn wir die Wurzeln des Laguerre'schen Polynoms $L_n^{(\alpha)}(x)$ in wachsender Reihenfolge mit $x_{n,1}^{(\alpha)}, x_{n,2}^{(\alpha)}, \ldots, x_{n,n}^{(\alpha)}$ bezeichnen, erhalten wir die Abschätzungen

$$\left(k + \frac{\alpha - 1}{2}\right)\pi < \int\limits_0^{x_{n,k}^{(\alpha)}} \sqrt{\frac{4n + 2\alpha + 2 - x}{4x}}\, dx < k\pi \qquad |\alpha| \leqq \frac{1}{2}$$

und

$$\left(k - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\alpha}\right)\pi < \int\limits_0^{(x_{n,k}^{(\alpha)})^2} \Re \sqrt{4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}}\, dx < k\pi \qquad \alpha \geqq \frac{1}{2}$$

wo $\Re$ den Realteil bedeutet. Für $|\alpha| \leqq \frac{1}{2}$ können wir der obigen Abschätzungsformel eine ähnliche *anschauliche Bedeutung* geben, wie bei den Hermite'schen Polynomen. Durch die Substitution $x = \xi^2$ erhalten wir nämlich

$$\int\limits_0^{x_{n,k}^{(\alpha)}} \sqrt{\frac{4n + 2\alpha + 2 - x}{4x}}\, dx = \int\limits_0^{\sqrt{x_{n,k}^{(\alpha)}}} \sqrt{4n + 2\alpha + 2 - \xi^2}\, d\xi$$

und das bestimmte Integral an der rechten Seite kann wieder als die Größe des Flächeninhaltes von einem Kreisteile gedeutet werden.

Das Wesentliche bei diesen Abschätzungen, ebenso wie bei der Abschätzung der Wurzeln der Hermite'schen Polynome, ist, daß *eine Funktion* $f(x)$ *angebbar ist, für die die Differenz* $f(x_{n,k}) - f(x_{n,k-1})$ *nahezu konstant bleibt.* Diese Funktion von x ist z. B. bei den Hermiteschen Polynomen $f(x) = \int_x^{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1-x^2}\, dx$. Die ihr entsprechende Funktion ist in der Theorie der zugeordneten Kugelfunktionen und den Jacobi'schen Polynomen schon längst bekannt: sie ist $f(x) = \arccos x = \int_x^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$.

Eine Verfeinerung der obigen Abschätzungen für die Wurzeln der Laguerre'schen Polynome könnten wir auf einem ebensolchen Wege geben, wie wir die Ergebnisse des § 6 aus denen des § 5 erhielten. Anstatt dessen wählen wir im § 9 einen ganz anderen Weg, der von den Resultaten der übrigen Teile dieser Arbeit gar keinen Gebrauch macht. Nur der Grundgedanke des § 9 ist mit dem des ganzen Aufsatzes gemeinsam. Dieser Grundgedanke ist, daß wir Differentialgleichungen von der Form (1.1) mittels einer geeigneten Transformation in eine solche Gestalt

$$\frac{d^2}{dx^2}\, Y(X) + [1 + R(X)]\, Y(X) = 0 \tag{1.3}$$

überführen, wo $|R(X)|$ im allgemeinen klein gegen 1 ist. Die Lösungen dieser Gleichung werden dann angenähert in der Form $Y = \alpha \cos (X + \beta)$ darstellbar sein: die Nullstellen dieser Lösungen liegen also nahezu äquidistant. Aus den Nullstellen der Gleichung (1.3) schließen wir mit Hilfe der Transformationsfunktion $X = X(x)$ auf die Lage der Nullstellen der ursprünglichen Gleichung (1.1).

Nun hat *E. Moecklin* (siehe Fußnote [17]) eine asymptotische Formel für die klassischen Laguerre'schen Polynome gefunden, die von der Form

$$L_n^{(0)}(x) \sim A(x) \cos\left[X(x) - \frac{\pi}{4}\right] \tag{1.4}$$

$$\left[X(x) = n(2\vartheta + \sin 2\vartheta) + \vartheta\,, \quad x = 4n \sin^2 \vartheta\,, \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right]$$

ist. Diese Funktion stellt nach *Tricomi* (Fußnote [15]) eine sehr gute Approximation des Polynomes $L_n^{(0)}(x)$ dar. Es liegt also der Gedanke nahe, daß wenn wir in die Differentialgleichung der Laguerre'schen Polynome vom Index 0 anstatt x die mit (1.4) definierte neue unabhängige Veränderliche $X(x)$ einführen und anstatt y eine geeignete Veränderliche wählen, zu einer Gleichung vom Typ (1.3) gelangen. Die Abschätzung der Nullstellen der Lösung dieser neuen Gleichung gelingt prinzipiell leicht, obwohl viel Einzelarbeit erforderlich ist. Wir erhalten für die Zahlen $X(x_{n,k}^{(0)})$ folgende Ungleichungen ($n > 3$):

$$\left.\begin{array}{ll} X(x_{n,k}^{(0)}) < k\pi - \dfrac{2}{3} & (1 \leqq k \leqq n) \\ j_k < X(x_{n,k}^{(0)}) < \dfrac{j_k}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{16\,n^2}}} & \left(1 \leqq k \leqq \left[\dfrac{n}{2}\right]\right) \\ X(x_{n,k}^{(0)}) > n\pi - y_{n-k+1} & \left(\left[\dfrac{n}{2}\right] < k \leqq n\right) \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

Hier bedeutet j_k bzw. y_k die k-te positive Wurzel der Bessel'schen Funktion 0-ter Ordnung und erster bzw. zweiter Art. Aus diesen Formeln folgt leicht der einfache Zusammenhang (vgl. § 10):

$$| X(x_{n,k}^{(0)}) - (k - \tfrac{1}{4})\,\pi | < \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} .$$

Die Schranken (1.5) sind für kleine Werte der Zahl k besser, als für große. Für die Güte der Abschätzung sei bemerkt, daß wenn $k \leqq [n/2]$ ist, die oberen und unteren Schranken schon bei $n = 6$ weniger als 1‰ sich unterscheiden.

Am Ende dieses Paragraphen geben wir noch nebst numerischen Beispielen eine direkte Abschätzung für die größte Wurzel des n-ten Laguerre'schen Polynoms. Sie lautet

$$4n - 6{,}03\,n^{\frac{1}{3}} < x_{n,n}^{(0)} < 4n - 4{,}46\,n^{\frac{1}{3}} + 1{,}66\,n^{-\frac{1}{3}} .$$

Damit ist bewiesen, daß $4n - x_{n,n}^{(0)}$ von der Größenordnung $O(n^{\frac{1}{3}})$ ist. — Es ist noch zu bemerken, daß in diesem Paragraphen, ebenso wie im § 7, wesentlich feinere Untersuchungen nötig sind, als in den übrigen Teilen dieser Arbeit.

Im folgenden § 10 erhalten wir durch Anwendung unserer allgemeinen Sätze rasch eine gute obere Schranke für die Nullstellen der *Bessel'schen* Funktionen 0-ter Ordnung und erster bzw. zweiter Art. Sie lautet mit den oben angewendeten Bezeichnungen:

$$j_k < (k - \tfrac{1}{4})\,\pi + \frac{1}{8\pi(k - \frac{1}{4})}\,,$$

$$y_k < (k - \tfrac{3}{4})\,\pi + \frac{1}{8\pi(k - \frac{3}{4})}\,.$$

Endlich beschäftigen wir uns im § 11 mit der Differentialgleichung der *Mathieu'schen* Funktionen. Wir erhalten — nebst einer oberen Schranke der Nullstellenabstände gewisser Mathieu'schen Funktionen — für die Eigenwerte der Differentialgleichung solche Schranken, die asymptotisch gleich mit den Eigenwerten sind [Formeln (11.2, 3, 5)].

2. Zusammenhang zwischen Eigenwertabschätzung Sturm-Liouville'scher Probleme und Nullstellenabschätzung der Lösungen derselben Probleme

Eine Reihe der sogenannten klassischen Polynome der Analysis, so die Polynome von Legendre, Laguerre, Hermite, Jacobi sind Lösungen von Sturm-Liouville'scher Differentialgleichungen, sind also Lösungen gewisser Eigenwertprobleme. Die Eigenwerte dieser Probleme sind in diesen klassischen Fällen immer bekannt, während es im allgemeinen Falle eine recht schwierige Aufgabe ist, die Eigenwerte Sturm-Liouville'scher Probleme nur einigermaßen zu approximieren. Im Falle der klassischen Polynome stehen also im Vordergrund der Interessen nicht die Eigenwerte, sondern andere Eigentümlichkeiten, z. B. die Verteilung der Wurzeln der lösenden Funktionen.

Die beiden bekannten Probleme, nämlich das Problem der Eigenwerte und der Nullstellenverteilung stehen im engen Zusammenhange: aus Eigenwertabschätzungen können wir auf die Nullstellenverteilung schließen. Zur Veranschaulichung dieser Behauptung betrachten wir ein möglichst einfaches Beispiel. Die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda_n \varrho(x) y = 0\,, \tag{2.1}$$

wo $\varrho(x)$ eine positive stetige Funktion ist, habe eine Lösung y_n, deren Nullstellen zwischen a und b liegen sollen. Weiter sei vorausgesetzt, daß im Intervalle (a, b) die Funktion $\varrho(x)$ zwischen den Grenzen α und β $(0 < \alpha < \beta)$ bleibt. Die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_k < x_{k+1})$ von y_n sind dann alle voneinander verschieden. Nun betrachten wir das folgende Eigenwertproblem: Gesucht sei der kleinste Wert von λ, für welchen die Differentialgleichung $y'' + \lambda\varrho(x)y = 0$ eine Lösung mit den Randbedingungen $y(x_k) = y(x_{k+1})$ hat. Dieser Wert von λ liegt nach einem bekannten Satze zwischen

$$\left(\frac{\pi}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \frac{1}{\beta} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\pi}{x_{k+1}-x_k}\right)^2 \frac{1}{\alpha} \,.$$

Andererseits ist dieser Wert nach unserer Voraussetzung gleich λ_n. Also haben wir die Ungleichungen

$$\pi \sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}} \leqq x_{k+1} - x_k \tag{2.2a}$$

und

$$\pi \sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} \geqq x_{k+1} - x_k \,, \tag{2.2b}$$

zu welchen noch die Ungleichungen

$$x_1 - a \leqq \pi \sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} \quad \text{und} \quad b - x_n \leqq \pi \sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} \tag{2.3}$$

zukommen.[1])

Aus den Ungleichungen (2.2) und (2.3) ist schon leicht eine obere und untere Grenze für die Größen x_k zu finden. Ja es genügen schon die Zusammenhänge (2.2b) und (2.3) für die Einschränkung der Zahlen x_k. Aus ihnen erhalten wir

$$a + k\pi \sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} \leqq x_k \leqq b - (n + 1 - k)\, \pi \sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} \,.$$

3. Sätze über die Größe der Eigenwerte gewisser Sturm-Liouville'scher Probleme

Die im § 2 benutzte Eigenwertabschätzung ist eine der einfachsten, aber zugleich eine der am wenigsten scharfen. In gewissen Fällen ist es zweckmäßiger, die folgenden Sätze zu gebrauchen.

Satz 1. *Die Funktion $\varrho(x)$ sei folgenden Bedingungen unterworfen. Erstens sei sie im offenen Intervall $\langle a, b \rangle$ endlich, positiv und stetig, mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen. Zweitens sei die Größe*

$$r(x) = 5\,\varrho'^2 - 4\,\varrho\varrho'' \tag{3.1}$$

[1]) Von den letzten beiden Ungleichungen beweisen wir nur die erste: Wäre nämlich x_1 so weit von a entfernt, daß ihre Differenz größer, als $\pi\sqrt{\lambda_n/\alpha}$ ausfälle, so müßte zwischen a und x_1 noch eine Wurzel von (2.1) sein, was aber im Widerspruch mit der Tatsache steht, daß x_1 die kleinste Wurzel von y_n ist.

im Intervalle $\langle a, b \rangle$ überall nichtnegativ und in einem Teilintervalle (a', b') von Null verschiedenem Maße ausgesprochen positiv. Dann gilt für den n-ten Eigenwert der Differentialgleichung

$$y'' + \lambda \varrho(x) y = 0 \quad \left(\text{Randbedingungen } y(a) = y(b) = 0\right) \qquad (3.2)$$

die Ungleichung

$$\lambda_n < \left(\frac{\pi n}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)}\, dx} \right)^2 . \quad {}^{2)} \qquad (3.2\text{a})$$

Wenn aber die Größe $r(x)$ anstatt der zweiten Bedingung die Ungleichung $r(x) \leqq 0$ erfüllt und in einem endlichgroßen Teilintervalle von (a, b) das Zeichen $<$ gilt, dann wird

$$\lambda_n > \left(\frac{\pi n}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)}\, dx} \right)^2 . \qquad (3.2\text{b})$$

Beim Beweise gehen wir von der bekannten Tatsache aus, daß die Differentialgleichung (3.2) mittels der Transformation $X = X(x)$ und $Y = \sqrt{\frac{dX}{dx}}\, y$ auf die Form

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + \mathrm{P}(X)\, Y = 0 \qquad (3.3)$$

gebracht werden kann[3]. Die Funktion $X(x)$ soll dabei derartig sein, daß ihre Ableitung im Intervall (a, b) positiv ausfalle. Für den Koeffizient von Y gilt der Zusammenhang

$$\mathrm{P}(X(x)) = \lambda_n \frac{\varrho(x)}{X'^2} + \frac{3}{4} \frac{X''^2}{X'^4} - \frac{1}{2} \frac{X'''}{X'^3} . \qquad (3.4)$$

Es sei nun

$$X(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varrho(u)}\, du \; ; \qquad (3.5)$$

dann wird

$$\mathrm{P}(X(x)) = \lambda_n + \frac{r(x)}{16\, [\varrho(x)]^3} \qquad (3.5\text{a})$$

---

[2]) Diesen Satz habe ich mit variationstheoretischen Hilfsmitteln in einer weniger allgemeinen Form schon bewiesen. [Über eine Eigenwertabschätzung usw. Compositio Mathematica 6, (1939) 368—374]. Diese spezielle Form des Satzes reicht aber zur Behandlung der hier zu betrachtenden Probleme nicht überall aus.

[3]) Siehe z. B. A. R. Forsyth: Lehrbuch der Differentialgleichungen (deutsch von H. Maser), Braunschweig, 1889, S. 103.

sein, wobei $r(x)$ durch die Relation (3.1) definiert ist. Ferner sei $X(a) = A$, $X(b) = B$. Wir können nun behaupten: wenn $r(x) \geqq 0$ $(a \leqq x \leqq b)$ ist, dann gilt

$$\mathrm{P}(X) \geqq \lambda_n \qquad (A \leqq X \leqq B)\,,$$

und zwar, wenn im ersten Falle das Zeichen der Ungleichung in einem Intervalle vom Maße größer als Null gültig ist, so wird es auch in der zweiten Relation so sein. Ferner ist es klar, daß $Y(A) = Y(B) = 0$ ist, und daß die Funktion $Y(X)$ im offenen Intervalle $\langle A, B \rangle$ ebensoviele Nullstellen besitzt wie die Funktion $y(x)$ im offenen Intervalle $\langle a, b \rangle$.

Jetzt vergleichen wir die Gleichung (3.3) mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\eta(X)}{dX^2} + \lambda_n\,\eta(X) = 0 \qquad \text{(Anfangsbedingung } \eta(A) = 0.)$$

Da $Y(A) = 0$ ist, können wir auf Grund eines wohlbekannten Satzes behaupten, daß im Intervalle (A, B) die k-te Nullstelle von $Y(X)$ nicht größer sein kann, als die von A berechnete k-te Nullstelle von η, d. h. $A + \dfrac{k\pi}{\sqrt{\lambda_n}}$. Insbesondere gilt

$$B < A + \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_n}}\;.$$

(Wir können hier das Zeichen $<$ anstatt $\leqq$ brauchen, da wir vorausgesetzt haben, daß im Intervalle (A, B) die Funktion $\mathrm{P}(x)$ in einem Teilintervalle von nicht verschwindendem Maße größer als λ_n ist.) Die letzte Ungleichung kann auf Grund von (3.5) in die Gestalt

$$B - A = X(b) - X(a) = \int_a^b \sqrt{\varrho(x)}\,dx < \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_n}}$$

umgeformt werden, was gleichbedeutend mit der Formel (3.2a) ist.

Den zweiten Teil des Satzes kann man auf genau demselben Wege beweisen; eben darum wiederholen wir den Beweisgang nicht.

Eine für uns nützliche Erweiterung des vorstehenden Satzes ist der folgende

Satz 2. *Die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ seien im Intervalle $\langle a, b \rangle$ endlich, positiv und stetig, mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen. Wenn nun $p(x) \cdot q(x)$ mit $s(x)$ bezeichnet wird, weiter die Größe*

$$t(x) = 5\,s'^2 - 4ss'' - 4p'qs' \tag{3.6}$$

im Intervalle $\langle a, b \rangle$ überall nichtnegativ ausfällt und in einem Teilintervalle desselben ausgesprochen positiv ist, dann gilt für den n-ten Eigenwert der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} y + \lambda q(x) y = 0 \quad \text{(Randbedingungen } y(a) = y(b) = 0.) \tag{3.7}$$

die Ungleichung

$$\lambda_n < \left(\frac{\pi n}{\int\limits_a^b \sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}}\, dx} \right)^2 . \text{ [4]} \tag{3.8a}$$

Wenn hingegen $t(x)$ im Intervalle $\langle a, b \rangle$ überall nichtpositiv bleibt und in einem endlichgroßen Teilintervalle desselben ausgesprochen negativ ist, so gilt die Ungleichung

$$\lambda_n > \left(\frac{\pi n}{\int\limits_a^b \sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}}\, dx} \right)^2 . \tag{3.8b}$$

Die Aussagen des Satzes **2** lassen sich leicht auf den Satz **1** zurückführen. Denn wenn wir die Gleichung (3.7) mit $p(x)$ multiplizieren und anstatt x eine neue unabhängige Veränderliche x_1 durch die Relation $\frac{dx}{p(x)} = dx_1$ einführen, erhalten wir

$$\left(p(x) \frac{d}{dx}\right)^2 y + \lambda p(x)\, q(x)\, y = \frac{d^2}{dx_1^2} y_1 + \lambda\, p_1(x_1)\, q_1(x_1)\, y_1 = 0 \ , \tag{3.9}$$

wo

$$y_1 = y_1(x_1) = y(x(x_1)) \ , \ p_1(x_1) = p(x(x_1)) \ , \ q_1(x_1) = q(x(x_1))$$

ist. Gleichung (3.9) ist aber von derselben Form wie Gleichung (3.2) und es ist leicht zu sehen, daß die Transformation $x \to x_1$ die n-te Eigenfunktion des Problems (3.7) in die n-te Eigenfunktion des Problems (3.2) überführt. Was den weiteren Gang des Beweises betrifft, bemerken wir, daß die Formel (3.8a) mit (3.2a) auf eben solcher Weise zusammenhängt, wie die Formel (3.8b) mit (3.2b). Darum genügt es, uns allein

---

[4]) Diesen Satz habe ich in einer spezielleren Form schon bewiesen. Vgl. *E. Makai:* Eine Eigenwertabschätzung bei gewissen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Matematikai és Fizikai Lapok, 48, 1941, 510—532. (Ungarisch mit deutschem Auszug.)

mit dem Beweise der Ungleichung (3.8a) ausführlicher zu beschäftigen. Zum Beweise schicken wir eine Bemerkung voraus, nämlich, daß das Vorzeichen von

$$r_1(x_1) = 5\left(\frac{d}{dx_1}\left[p_1(x_1)\,q_1(x_1)\right]\right)^2 - 4\left[p_1(x_1)\,q_1(x_1)\right]\frac{d^2}{dx_1^2}\left[p_1(x_1)\,q_1(x_1)\right]$$

dasselbe ist, wie das Vorzeichen der mit Gleichung (3.6) definierten Größe $t(x)$. Dies läßt sich mit einer kurzen Rechnung bestätigen. Ferner folgt aus der Definition von x_1, daß wenn

$$r_1(x_1) \geqq 0 \qquad (a_1 \leqq x_1 \leqq b_1)$$

ist [a_1 und b_1 sind Lösungen der Gleichungen $a = x(x_1)$ bzw. $b = x(x_1)$], die Ungleichung

$$\lambda_n < \left(\frac{\pi n}{\int\limits_{a_1}^{b_1}\sqrt{p_1(x_1)\,q_1(x_1)}\,dx_1}\right)^2 = \left(\frac{\pi n}{\int\limits_{a_1}^{b_1}\sqrt{\frac{q_1(x_1)}{p_1(x_1)}}\,p_1(x_1)\,dx_1}\right)^2 = \left(\frac{\pi n}{\int\limits_{a}^{b}\sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}}\,dx}\right)^2$$

gilt, was zu beweisen war[5]).

Unseren beiden Sätzen wollen wir noch eine andere, zu unseren Anwendungen passende Formulierung geben. Wir formen nur den zweiten Satz um, da er auch den ersten in sich faßt, in den folgenden

Satz 3. *Die Größen $p(x)$ und $q(x)$ sollen die im Satz 2 vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen. Ferner soll irgendeine Lösung y_0 der Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dx}\,p(x)\,\frac{d}{dx}\,y + q(x)\,y = 0$$

im Intervalle $\langle a, b\rangle$ an den in wachsender Reihe geordneten Stellen

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

---

[5]) Aus dem Beweisgange geht hervor, daß wir unsere Aussage auch folgendermaßen formulieren können: Wenn im Intervalle (a, b) $p(x)$ und $q(x)$ den vorgeschriebenen Bedingungen Genüge leisten, $t(x) > 0$ und

$$\int\limits_a^b \sqrt{\lambda\,\frac{q(x)}{p(x)}}\,dx = \pi$$

ist, ferner eine Lösung der Differentialgleichung (3.7) an einem Endpunkt des Intervalles (a, b) verschwindet, dann hat diese Lösung noch eine Nullstelle im Inneren des Intervalles (a, b).

verschwinden. Die Größe $t(x)$ sei mit Gleichung (3.6) definiert. Wenn nun $t(x) \geqq 0$ $(a < x < b)$ ist, dann gilt

$$\int_{x_k}^{x_l} \sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}}\, dx < (l-k)\,\pi \qquad (1 \leqq k < l \leqq m) \tag{3.10a}$$

Wenn hingegen $t(x) \leqq 0$ $(a < x < b)$ ist, dann ist die Ungleichung

$$\int_{x_k}^{x_l} \sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}}\, dx > (l-k)\,\pi \qquad (1 \leqq k < l \leqq m) \tag{3.10b}$$

erfüllt.

Zum Beweise betrachten wir das Randwertproblem

$$\frac{d}{dx}\, p(x)\, \frac{d}{dx}\, y + \lambda\, q(x)\, y = 0 \quad (\text{Randbedingungen } y(x_k) = y(x_l) = 0).$$

Die $(l-k)$-te Eigenfunktion ist y_0, da sie außer den Stellen x_k und x_l noch an den Stellen $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{l-1}$, also $(l-k-1)$-mal im offenen Intervalle $\langle x_k, x_l \rangle$ verschwindet. Der zugehörige Eigenwert ist 1. Nach Satz 2 ist also die Größe

$$\left(\frac{\pi(l-k)}{\int_{x_k}^{x_l} \sqrt{\frac{q(x)}{p(x)}}\, dx} \right)^2$$

größer oder kleiner als 1, je nachdem $t(x)$ im Intervalle $\langle a, b \rangle$ überall nichtnegativ oder nichtpositiv ausfällt. Dies ist aber gleichbedeutend mit den Aussagen (3.10a) und (3.10b).

4. Anwendungen. Die Legendre'sche und ultrasphärische Differentialgleichung

In diesem Paragraphen wollen wir einige Klassen von Funktionen erwähnen, für welche die vorstehenden Sätze anwendbar sind.

1. Wenn $\varrho(x)$ eine im Intervall $\langle a, b \rangle$ *von unten aus konkave positive Funktion* ist, und den vorgeschriebenen Endlichkeits- und Stetigkeitsbedingungen genüge leistet, dann wird die mit Gleichung (3.1) definierte Größe $r(x)$ auch positiv ausfallen. Für die Eigenwerte der Differentialgleichung $y'' + \lambda\varrho(x)y = 0$ gilt daher die Abschätzung (3.2a).

2. Wenn $\log \varrho(x)$ eine im Intervalle $\langle q, b \rangle$ *von unten aus konkave Funktion* ist, dann wird $r(x)$ auch positiv sein. Denn es ist

$$r(x) = \varrho'^2 + 4\varrho^2(-\log \varrho)'' > 0 .$$

Diese Klasse der Funktionen ist allgemeiner, als die vorher erwähnte, denn sie umfaßt auch den Fall **1**.

3. Als Anwendung des Satzes **2** betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} y + \lambda p(x) y = 0 . \tag{4.1}$$

Die in den Ungleichungen (3.8a) und (3.8b) vorkommende Größe

$$\int_a^b \sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}\, dx$$

wird jetzt gleich $b - a$ sein. Wenn also im Intervalle $\langle a, b \rangle$ die mit (3.6) definierte Größe $t(x)$ durchaus positiv bzw. negativ bleibt, so gilt für den n-ten Eigenwert des ersten Randwertproblems der Gleichung (4.1) mit den Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$ die einfache Abschätzung

$$\lambda_n < \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_n > \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 ,$$

oder in anderer Form

$$b - a < \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_n}} \quad \text{bzw.} \quad b - a > \frac{n\pi}{\sqrt{\lambda_n}} .$$

Die Funktion $p(x)$ kommt in diesen Abschätzungen nicht explicit vor.

Den ersten Fall, den Fall $t(x) > 0$ wollen wir eingehender diskutieren. Es seien x' und x'' zwei *benachbarte* Nullstellen irgendeiner Lösung von (4.1). $(a < x' < x'' < b)$. Dann gilt

$$x'' - x' < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} ,$$

denn es ist λ der zu den Randbedingungen $y(x') = y''(x) = 0$ gehörende erste Eigenwert. Wenn also $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die in wachsender Reihenfolge geordneten Nullstellen im Intervall $\langle a, b \rangle$ einer beliebigen Lösung von (4.1) bedeuten, dann wird

$$x_1 - a < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\,, \quad x_2 - x_1 < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\,, \ldots, \quad x_m - x_{m-1} < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\,, \quad b - x_m < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \tag{4.2}$$

sein, oder was dasselbe ist,

$$b - (m - k + 1)\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} < x_k < a + \frac{k\pi}{\sqrt{\ }}\ .$$

Aus der Reihe der Ungleichungen (4.2) müssen wir noch die erste und die letzte beweisen. Da die beiden Fälle analog sind, werden wir nur die erste Ungleichung mit einer Deduktion ad absurdum bestätigen. Denn nehmen wir an, daß $x_1 - a \geqq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ sei, dann müßte laut Anmerkung 5 eine Nullstelle der Lösung zwischen a und x_1 existieren. Das steht aber in Widerspruch mit unserer Voraussetzung, nämlich, daß x_1 die kleinste Nullstelle im Intervalle $\langle a, b \rangle$ ist.

Ein Beispiel für die Klasse der Differentialgleichungen (4.1) ist die *Legendre'sche Differentialgleichung*

$$\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\,\frac{d}{d\vartheta}f(\vartheta) + \lambda\sin\vartheta\,f(\vartheta) = 0\ . \tag{4.3}$$

Die Größe $t(\vartheta)$ ist hier gleich $4\sin^2\vartheta\,(2 - \cos^2\vartheta)$, sie ist also im offenen Intervalle $\langle 0, \pi \rangle$ durchaus positiv. Aus den Vorhergehenden ist es klar, daß wenn die in wachsender Reihenfolge geordneten Nullstellen im Intervalle $\langle 0, \pi \rangle$ einer *beliebigen* Lösung mit

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$$

bezeichnet sind, dann gilt

$$\pi - (m - k + 1)\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} < \vartheta_k < \frac{k\pi}{\sqrt{\lambda}}\ . \tag{4.4}$$

Besonders interessant ist es, wenn $\lambda = n(n+1)$ und n eine ganze Zahl ist. Gleichung (4.3) besitzt dann Lösungen, die trigonometrische Polynome n-ten Grades sind. Für die Nullstellen dieser Legendre'schen trigonometrischen Polynome gelten die Ungleichungen

$$\vartheta_1 < \frac{\pi}{\sqrt{n(n+1)}}\,, \quad \vartheta_{k+1} - \vartheta_k < \frac{\pi}{\sqrt{n(n+1)}} \tag{4.5}$$

und die daraus folgenden Ungleichungen (4.4). Für eine bessere Abschätzung der Nullstellen nützen wir die Symmetrieeigenschaft dieser Polynome aus, nämlich daß die Nullstellen auf der Zahlengerade symmetrisch in Bezug auf $\frac{\pi}{2}$ verteilt sind. Zwei Fälle müssen wir unterscheiden: erstens, wenn n ungerade und zweitens, wenn n gerade ist.

Der Fall $n = 2\nu + 1$. Die Nullstelle $\vartheta_{\nu+1}$ des Legendre'schen Polynoms $P_{2\nu+1}(\cos\vartheta)$ ist gleich $\frac{\pi}{2}$. Daraus folgt, mit Rücksicht auf (4.5), daß

$$\vartheta_{\frac{n+1}{2}-1} > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \vartheta_{\frac{n+1}{2}-2} > \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \text{usw.}$$

ist; im allgemeinen

$$\vartheta_k > \frac{\pi}{2} - \left(\frac{n+1}{2} - k\right)\frac{\pi}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{k\pi}{\sqrt{n(n+1)}} - \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right)\frac{\pi}{2}. \tag{4.6}$$

Der Fall $n = 2\nu$. Jetzt liegen ϑ_ν und $\vartheta_{\nu+1}$ symmetrisch in bezug auf $\frac{\pi}{2}$. Andererseits ist

$$\vartheta_{\nu+1} - \vartheta_\nu < \frac{\pi}{\sqrt{n(n+1)}} .$$

Aus diesen beiden Tatsachen folgt, daß

$$\vartheta_{\frac{n}{2}} > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{n(n+1)}}$$

ist und aus dieser Formel läßt sich für ϑ_k dieselbe Formel (4.6), wie beim vorigen Falle abzuleiten.

Aus den Ungleichungen (4.5) und (4.6) läßt sich endlich die für ungerade, wie für gerade n in gleicher Weise gültige Nullstellenabschätzung

$$\frac{k\pi}{\sqrt{n(n+1)}} - \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1\right)\frac{\pi}{2} < \vartheta_k < \frac{k\pi}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

gewinnen. Zum Vergleich setze ich hier die mir bekannte beste, teils von *Stieltjes*, teils von *Szegö* stammende Wurzelabschätzung der Legendreschen Polynome an [6]:

[6]) *Stieltjes:* Sur les racines de l'équation $X_n = 0$. Acta Math. 9 (1886), 385—400. *Szegö:* Inequalities for the zeros of Legendre polynomials etc. Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936), 501—513.

$$\frac{k-\frac{1}{4}}{n+\frac{1}{2}}\pi < \vartheta_k < \frac{k\pi}{n+1} \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Die *Indetermination* der Zahlen ϑ_k ist in dieser Abschätzung größenordnungsgemäß dieselbe, wie in der vorstehenden: die Differenz der oberen und unteren Grenzen von ϑ_k ist nämlich in beiden Fällen gleich

$$\frac{\pi}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. Die Gleichung

$$\frac{d}{d\vartheta} \sin^{2l}\vartheta \frac{d}{d\vartheta} y + n(n+2l) \sin^{2l}\vartheta \cdot y = 0 \,, \tag{4.7}$$

die *Differentialgleichung der ultrasphärischen Funktionen*, gehört auch zur Klasse der Differentialgleichungen (4.1). n und l sind in den folgenden beliebige reelle Zahlen, die der Bedingung $n(n+2l) > 0$ unterworfen sind. Die Größe $t(\vartheta)$ ist jetzt gleich $16\, l \sin^{8l-2}\vartheta \cdot (1 - l\cos^2\vartheta)$. Hinsichtlich des Vorzeichens von $t(\vartheta)$ können wir drei Fälle unterscheiden.

a) $l < 0$. $t(\vartheta)$ ist nun im offenen Intervalle $\langle 0, \pi \rangle$ durchaus negativ. Also gilt für zwei benachbarte Nullstellen ϑ' und ϑ'' $(0 < \vartheta' < \vartheta'' < \pi)$ irgendeiner Lösung von (4.7)

$$\vartheta'' - \vartheta' > \frac{\pi}{\sqrt{n(n+2l)}}\,. \tag{4.8}$$

b) $0 < l \leqq 1$. Jetzt ist $t(\vartheta)$ im Intervalle $\langle 0, \pi \rangle$ positiv. Mit den obigen Bezeichnungen gilt also

$$\vartheta'' - \vartheta' < \frac{\pi}{\sqrt{n(n+2l)}}\,. \text{ [7]} \tag{4.9}$$

c) Endlich, wenn $l > 1$ ist, ist das Vorzeichen von $t(\vartheta)$ im Intervalle $\langle 0, \pi \rangle$ indefinit. Der Fall $l > 1$ läßt sich aber auf den Fall a) zurückführen. Wenn nämlich y eine Lösung von (4.7) ist, dann ist $z = \sin^{2l-1}\vartheta \cdot y$ Lösung der Gleichung

---

[7]) Im Falle b) gibt es eine bessere Abschätzung, als (4.9) für die Wurzelabstände einer ultrasphärischen Funktion, nämlich

$$\vartheta'' - \vartheta' < \frac{\pi}{n+l} = \frac{\pi}{\sqrt{n(n+2l)+l^2}}\,.$$

(*G. Szegö:* Orthogonal Polynomials, New York, 1939, S. 121).

$$\frac{d}{d\vartheta} \sin^{2-2l}\vartheta \frac{dz}{d\vartheta} + (n+1)\,(n+2l-1)\sin^{2-2l}\vartheta\cdot z = 0 \ .$$

Wenn nun $l > 1$ ist, fällt $2 - 2\,l$ negativ aus; im übrigen sind die im Intervalle $\langle\, 0, \pi \,\rangle$ liegenden Nullstellen von y und z dieselben. Also gilt auch in diesem Falle die Abschätzung (4.8) [8]).

5. Es sei nun y die Lösung der Differentialgleichung (4.7). Die Funktion $z = \sin^{l-\frac{1}{2}}\vartheta \cdot y$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dz}{d\vartheta}\right) + \left\{\left[(n+l)^2 - \frac{1}{4}\right]\sin\vartheta - \frac{(l-\frac{1}{2})^2}{\sin\vartheta}\right\} z = 0 \,, \qquad (4.10)$$

die unter dem Namen der *Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen* bekannt ist. Die Funktion $z(\vartheta)$ hat im Intervalle $\langle\, 0, \pi \,\rangle$ dieselben Nullstellen, wie die Funktion $y(\vartheta)$. Es ist also gleichgültig aus unserem Standpunkte, ob wir Gleichung (4.7) oder Gleichung (4.10) untersuchen. Diese letztere Gleichung lautet in üblicherer Form

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dz}{d\vartheta}\right) + \left[n(n+1)\sin\vartheta - \frac{m^2}{\sin\vartheta}\right] z = 0 \ . \qquad (4.11)$$

Wir betrachten nur den Fall $n(n+1) > 0$, $m^2 < n^2$, da die zugeordneten Kugelfunktionen $P_n^m(\cos\vartheta)$ auch diese Bedingungen erfüllen. In diesem Falle ist $t(\vartheta)$ durchaus positiv, also gilt für zwei beliebige benachbarte Nullstellen ϑ', ϑ'' einer Lösung von (4.11), die die Bedingung

$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{m^2}{n(n+1)}} \leqq \vartheta' < \vartheta'' < \pi - \text{arc sin}\sqrt{\frac{m^2}{n(n+1)}} \qquad (4.12)$$

erfüllen, die Ungleichung

$$\pi > \int_{\vartheta'}^{\vartheta''} \sqrt{n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta \,, \qquad (4.13)$$

deren Auswertung allerdings zu einem etwas komplizierten Ergebnis führt. Es ist zu bemerken, daß die Wurzeln der Gleichung $P_n^m(\cos\vartheta)$ alle im Intervalle (4.12) liegen. (Die Bedingung (4.12) besorgt dafür, daß in der Ungleichung (4.13) unter dem Wurzelzeichen eine positive Größe stehe.)

---

[8]) Streng genommen müssen wir hier zwei Fälle unterscheiden: den Fall $(n+1)\,(n+2l-1) > 0$ und $\leqq 0$. Unser Gedankengang läßt sich nur im ersten Falle anwenden. Der zweite Fall läßt sich aber leicht erledigen und führt zu demselben — hier nichtssagenden — Ergebnis (4.8).

5. Die Hermite'schen Polynome

Die Nullstellen der im vorigen Paragraphen betrachteten Polynomen sind bereits ziemlich eingehend untersucht worden. Wir haben gesehen, daß unsere Methode solche Ergebnisse liefert, die für große n größenordnungsgemäß ebenso gut sind, wie die auf anderen Wegen gewonnenen Abschätzungen. Im folgenden wollen wir uns hingegen mit solchen Polynomen beschäftigen, deren bisherige Wurzelabschätzungen — im Vergleich zu den ultrasphärischen Polynomen — ziemlich dürftig waren. Als erstes Beispiel betrachten wir die mit der Formel

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

definierten Polynome von *Hermite*. Diese Polynome genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} H_n(x) - 2x \frac{d}{dx} H_n(x) + 2n H_n(x) = 0 \ . \tag{5.1}$$

Wir bezeichnen die Wurzeln dieser Polynome in abnehmender Reihenfolge mit

$$x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n} \ .$$

(Also ist $x_{n,k} > x_{n,k+1}$.) Die Nullstellen des n-ten Hermite'schen Polynoms sind identisch mit den Nullstellen der n-ten Hermite'schen Orthogonalfunktion $\chi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \chi_n(x) + (2n + 1 - x^2) \chi_n(x) = 0 \tag{5.2}$$

genügt. Es ist also einerlei, ob wir die Nullstellen der Lösungen von (5.2), oder von (5.1) untersuchen. Die letztere Gleichung ist insofern bequemer, als sie zu dem im ersten Punkte des vorigen Paragraphen angedeuteten Gleichungstyp gehört. Die Größe $2n + 1 - x^2$ ist nämlich eine von unten aus konkave Funktion von x. Unser Satz **3** ist jetzt ohne weiteres anwendbar mit den Bezeichnungen

$$p(x) \equiv 1 \ , \qquad q(x) = 2n + 1 - x^2 \ .$$

$q(x)$ ist positiv im Intervalle $(-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1})$, in welchem bekanntlich alle Wurzeln der Hermite'schen Polynome fallen. Also gilt — da in diesem Intervalle $t(x) > 0$ ist — die Beziehung [9])

[9]) Wir beschränken uns absichtlich auf den Fall polynomialer Lösungen, obwohl wir auf gleichem Wege Nullstelleneinschränkungen für alle Lösungen von (5.1) bzw. (5.2) ableiten könnten, auch bei nichtganzzahligen n.

$$\int_{x_{n,l}}^{x_{n,k}} \sqrt{2n+1-x^2}\,dx < (k-l)\pi \, . \qquad (1 \leqq k < l \leqq n) \qquad (5.3)$$

Nun liegen die Nullstellen der Hermite'schen Polynomen auf der Zahlengeraden symmetrisch in bezug auf den Anfangspunkt. Daraus folgt, daß wenn n eine ungerade Zahl ist, $x_{n,\frac{n+1}{2}} = 0$ wird. So erhalten wir einen speziellen Fall von (5.3) für ungerades n und $l = \frac{1}{2}(n+1)$:

$$\int_{0}^{x_{n,k}} < \left(\frac{n+1}{2} - k\right)\pi \, . \quad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right) \, . \qquad (5.4)$$

(Der Kürze halber lassen wir hier und im folgenden das Integrand fort.) Dieselbe Relation besteht aber auch bei geraden n. Jetzt ist nämlich die kleinste positive Wurzel $x_{n,\frac{n}{2}}$ und die größte negative $x_{n,\frac{n}{2}+1} = -x_{n,\frac{n}{2}}$. Also haben wir nach (5.3) die Ungleichungen

$$\frac{1}{2}\int_{x_{n,\frac{n}{2}+1}}^{x_{n,\frac{n}{2}}} = \int_{0}^{x_{n,\frac{n}{2}}} < \frac{\pi}{2}$$

und

$$\int_{x_{n,\frac{n}{2}}}^{x_{n,k}} < \left(\frac{n}{2} - k\right)\pi \, ,$$

aus deren Addition wieder (5.4) hervorgeht. Nun ist

$$\int_{0}^{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \, .$$

Wenn wir noch die Bezeichnung

$$K_n = \int_{x_{n,1}}^{\sqrt{2n+1}}$$

einführen, erhalten wie aus (5.4) und den beiden letzten Beziehungen auf einfachem Wege die doppelte Ungleichung

$$(k - \tfrac{1}{4})\,\pi < \int_{x_{n,k}}^{\sqrt{2n+1}} \leqq (k-1)\,\pi + K_n \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right) \, .$$

Für die Größe K_n können wir leicht eine Abschätzung auf Grund der Anmerkung [5]) gewinnen, wenn wir dort $\lambda = 1$, $p(x) \equiv 1$, $q(x) = 2n + 1 - x^2$ und weiter $a = x_{n,1}$, $b = \sqrt{2n+1}$ setzen. Wenn nämlich $K_n \geqq \pi$ wäre, so müßte zwischen $x_{n,1}$ und $\sqrt{2n+1}$ noch eine Nullstelle existieren, was aber in Widerspruch damit steht, daß $x_{n,1}$ die größte Nullstelle ist. Also ist $K_n < \pi$ und die doppelte Ungleichung, die für die Zahlen $x_{n,k}$ Schranken gibt, lautet

$$(k - \tfrac{1}{4})\,\pi < \int_{x_{n,k}}^{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1-x^2}\,dx < k\pi \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

oder ausführlicher

$$(k - \tfrac{1}{4})\,\pi < (n + \tfrac{1}{2})\left(\arccos \frac{x_{n,k}}{\sqrt{2n+1}} - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{1 - \frac{x_{n,k}^2}{2n+1}}\right) < k\pi$$

$$\left(k = 1, 2, \ldots \left[\frac{n}{2}\right]\right), \tag{5.5}$$

wo

$$0 < \arccos \frac{x_{n,k}}{\sqrt{2n+1}} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{ist.}$$ [10])

Zur Herleitung dieser Formel wurde der Sachverhalt ausgenutzt, daß die Hermite'schen Orthogonalfunktionen Lösungen von (5.2) sind, ferner daß ihre Nullstellen auf der Zahlengerade symmetrisch in bezug auf dem Anfangspunkt liegen. Im nächsten Paragraphen werden wir diejenige Eigenschaft dieser Orthogonalfunktionen ausnutzen, daß sie mit wachsendem x gegen 0 konvergieren. Dies wird uns u.a. zu einer verschärften Form von (5.5) führen, nämlich zu

$$(k - \tfrac{1}{4})\,\pi < \int_{x_{n,k}}^{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1-x^2}\,dx < (k - 0{,}2413\ldots)\,\pi\,, \tag{5.6}$$

wo die Konstanten die bestmöglichen sind.

6. Genauere Abschätzung der Nullstellen der Hermite'schen Polynome

Im folgenden werden wir die Transformation, die wir beim Beweise des Satzes **1** benutzt haben, im Falle unserer Polynome im einzelnen durchführen. Aus rechentechnischen Gründen werden wir jedoch zwei

---

[10]) Formel (5.5) habe ich in meiner in Fußnote [4]) zitierten, in ungarischer Sprache erschienenen Arbeit bewiesen.

Veränderungen gegenüber dem allgemeinen Fall machen. Erstens gehen wir nicht von der Gleichung (5.2) aus, vielmehr führen wir sie durch die von *Zernike* benützte lineare Transformation[11])

$$\xi = 2^{\frac{1}{3}}(2n+1)^{\frac{1}{6}}x - 2^{\frac{1}{3}}(2n+1)^{\frac{2}{3}}, \quad \eta(\xi) = \chi_n(x)$$

in die Form

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - (\xi + \gamma\xi^2)\,\eta = 0 \qquad \left[\gamma = 2^{-\frac{4}{3}}(2n+1)^{-\frac{1}{3}}\right] \tag{6.1}$$

über. Die neuen Nullstellen sollen mit $\xi_{n,k}$ bezeichnet werden.

Zweitens machen wir nicht direkt von der Transformation (3.5) Gebrauch. Anstatt ihr führen wir die im Wesen gleichwertige Transformation

$$X = \begin{cases} -\left[\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{\xi}^{0}\sqrt{-u-\gamma u^2}\,du\right]^{\frac{2}{3}} = -\left[\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x}^{\sqrt{2n+1}}\sqrt{2n+1-x^2}\,dx\right]^{\frac{2}{3}} \\[2ex] \left[\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{0}^{\xi}\sqrt{u+\gamma u^2}\,du\right]^{\frac{2}{3}} = \left[\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{\sqrt{2n+1}}^{x}\sqrt{x^2-2n-1}\,dx\right]^{\frac{2}{3}} \end{cases} \tag{6.2}$$

und

$$Y = \sqrt{\frac{dX}{d\xi}}\cdot\eta$$

durch. Die erste Formel für X gelte im Intervalle $-\dfrac{1}{\gamma} \leqq \xi \leqq 0$ (d.h. $-\sqrt{2n+1} \leqq x \leqq \sqrt{2n+1}$) und die zweite im Intervalle $0 \leqq \xi < \infty$ ($\sqrt{2n+1} \leqq x < \infty$). Wenn $\gamma = 0$ ist, führt diese Transformation die Gleichung (6.1) in sich über. Wenn hingegen $\gamma > 0$ ist, gelangen wir zur Gleichung

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + [-X + \sigma(X,\gamma)]\,Y = 0\;, \tag{6.3}$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\sigma(X,\gamma) = \frac{X}{8}\,\frac{1+\frac{3}{2}(1+2\gamma\xi)^2}{(\xi+\gamma\xi^2)^3} - \frac{5}{16}\,\frac{1}{X^2} \tag{6.4}$$

gesetzt haben. (ξ soll hier als Funktion von X und γ betrachtet werden.) Endlich sollen die neuen Nullstellen mit $X_{n,k}$ bezeichnet werden.

---

[11]) *F. Zernike:* Eine asymptotische Entwicklung für die größte Nullstelle der Hermite'schen Polynome. Proc. Royal Acad. Amsterdam, 34 (1931), 673—680.

Unser erstes Ziel ist das Lemma zu beweisen, daß *wenn* $0 \leqq \gamma < \gamma'$ *ist, die Funktion* $\sigma(X, \gamma')$ *in den Intervallen*

$$-\left[\frac{3}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2\gamma}}^{0}\sqrt{-u-\gamma u^2}\,du\right]^{\frac{2}{3}} < X < 0 \quad \text{und} \quad 0 < X < \infty \tag{6.5}$$

eine Majorante von $\sigma(X, \gamma)$ *ist.* Dafür ist es offenbar genügend zu zeigen, daß in diesen Intervallen $\dfrac{\partial\sigma}{\partial\gamma} > 0$ ist. Zu diesem Zwecke rechnen wir erstens den Wert der partiellen Derivierten nach γ von ξ, als Funktion von X und γ betrachtet, aus. Wenn wir die X definierenden Gleichungen (6.2) nach γ partiell derivieren, erhalten wir

$$0 = -\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\sqrt{-\xi-\gamma\xi^2} + \int\limits_{\xi}^{0}\frac{-u^2\,du}{2\sqrt{-u-\gamma u^2}}\,, \quad (-1 \leqq \gamma\xi \leqq 0)$$

bzw.

$$0 = \quad \frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\sqrt{\xi+\gamma\xi^2} + \int\limits_{0}^{\xi}\frac{u^2\,du}{2\sqrt{u+\gamma u^2}}\,, \quad (0 \leqq \xi < \infty)$$

die in der einheitlichen Formel

$$\frac{\partial\xi}{\partial\gamma}\sqrt{|\xi+\gamma\xi^2|} = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\xi}\frac{\sqrt{|u+\gamma u^2|}}{u+\gamma u^2}\,u^2\,du \tag{6.6}$$

zusammenfaßbar sind. Zweitens führen wir die Hilfsgröße

$$\tau(v) = -(1+4v^2)\left(\frac{5}{2}+4v+4v^2\right)^{-1} v^2(1+2v)^{-1}\,|v+v^2|^{\frac{1}{2}} + $$
$$+\int\limits_{0}^{v}\frac{\sqrt{|w+w^2|}}{w+w^2}\,w^2\,dw$$

ein, von der wir behaupten, daß ihr Wert im Intervalle $-\frac{1}{2} < v < 0$ negativ und im Intervalle $0 < v < \infty$ positiv ist. Es ist nämlich $\tau(0) = 0$ und $\dfrac{d\tau}{dv}$ ist in den Intervallen $-\frac{1}{2} < v < 0$ und $0 < v < \infty$ endlich und positiv. Denn es ist

$$\frac{d\tau}{dv}\cdot\left[(1+4v^2)\,(\tfrac{5}{2}+4v+4v^2)^{-1}\,v^2(1+2v)^{-1}\,|\,v+v^2\,|^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}=$$

$$=\left(-\frac{8v}{1+4v^2}+\frac{4+8v}{\frac{5}{2}+4v+4v^2}\right)+\left(-\frac{2}{v}+\frac{2}{1+2v}\right)+\left(-\frac{1+2v}{2(v+v^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\frac{5}{2}+4v+4v^2)\,(1+2v)}{(1+4v^2)\,(v+v^2)}\right)=$$

$$=(1+v)\left[4\,\frac{1-4v}{(1+4v^2)\,(\frac{5}{2}+4v+4v^2)}+\left(-\frac{2}{v(1+2v)}+\frac{2}{v}\,\frac{1+2v}{1+4v^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1+v}{1+4v^2}\left[4\,\frac{1-4v}{\frac{5}{2}+4v+4v^2}+\frac{8}{1+2v}\right]$$

$$=\frac{24\,(1+v)^2}{(1+4v^2)\,(1+2v)\,(\frac{5}{2}+4v+4v^2)}\,,$$

oder

$$\frac{d\tau}{dv}=\frac{24\,|\,v+v^2\,|^{\frac{5}{2}}}{(\frac{5}{2}+4v+4v^2)^2\,(1+2v)^2}>0\qquad(-\tfrac{1}{2}<v<0\;,\;v>0)\;.$$

Nun zeigt eine einfache Rechnung (Differentiation nach γ und die Substitution $\gamma u = w$, daß

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma}=X\cdot\frac{3(1+2\gamma\xi)\,[\frac{3}{2}+(1+2\gamma\xi)^2]}{16(\xi+\gamma\xi^2)^4\,\gamma^2\sqrt{|\,\gamma\xi+\gamma^2\xi^2\,|}}\,\tau(\gamma\xi)$$

ist. Wenn wir uns daran erinnern, daß das Vorzeichen von X und ξ dasselbe ist, ist es klar, daß wenn $-\frac{1}{2}<\gamma\xi<0$ und $\gamma\xi>0$ ist, also in den Intervallen (6.5), die Größe $\dfrac{\partial\sigma}{\partial\gamma}$ positiv ausfällt, was zu beweisen war.

Dies Lemma einmal bewiesen, haben wir den schwierigeren Teil unserer Arbeit schon erledigt.

Im folgenden werden wir — wie bereits erwähnt — diejenige Lösung von (6.3) betrachten, die bei unendlich wachsendem X nach 0 konvergiert. Wir werden die Nullstellen dieser Lösung in abnehmender Reihenfolge mit

$$X_1^{(\gamma)}\,,\;X_2^{(\gamma)},\ldots,X_k^{(\gamma)},\ldots$$

bezeichnen. Nun folgt aus unserm Lemma und einem bekannten Satze der Theorie der Differentialgleichungen, daß mit abnehmendem γ alle

Nullstellen $X_k^{(\gamma)}$, die in den Intervallen (6.5) fallen, auf der Zahlengerade nach links wandern:

$$X_k^{(0)} < X_k^{(\gamma')} < X_k^{(\gamma)} \qquad (0 < \gamma' < \gamma). \tag{6.7}$$

Die Größen $X_k^{(0)}$ stehen im engen Zusammenhange mit den Nullstellen der Airy'schen Funktion

$$A(x) = \int_0^\infty \cos(t^3 - xt)\, dt = C \cdot \sqrt{\frac{x}{3}}\{J_{-\frac{1}{3}}(2\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}) + J_{\frac{1}{3}}(2\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}})\},$$

$$(x > 0)$$

die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} A(x) + \frac{1}{3}\, x \cdot A(x) = 0$$

genügt. Es ist ohne weiteres zu sehen, daß im Falle $\gamma = 0$ diejenige Lösung von (6.1), die mit unendlich wachsendem ξ gegen 0 konvergiert, gleich $A(-3^{-\frac{1}{3}}\xi)$ ist. Wenn wir also die Nullstellen von $A(x)$ mit i_k bezeichnen $(0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots)$, dann ist

$$-X_k^{(0)} = 3^{-\frac{1}{3}} i_k.$$ [11a]

Aus den Ungleichungen (6.7) folgt nun, wenn wir die Beziehung $\gamma = 2^{-\frac{4}{3}}(2n+1)^{-\frac{1}{3}}$ in Betracht nehmen:

$$-3^{-\frac{1}{3}} i_k < X_{n,k} < X_{n-1,k}\ , \quad \left(k \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

oder mit Rücksicht auf (6.2):

$$\frac{2}{3}(-X_k^{(0)})^{\frac{3}{2}} = s_k > \int_{x_{n,k}}^{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1-x^2}\, dx > \int_{x_{n-1,k}}^{\sqrt{2n-1}} \sqrt{2n-1-x^2}\, dx\ .$$

Wenn wir jetzt

$$\int_{x_{n,k}}^{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1-x^2}\, dx = (k - \tfrac{1}{4} + \varepsilon_{n,k})\,\pi \tag{6.8}$$

11a) Eine andere Deutung der Zahlen $X_k^{(0)}$ ist, wie leicht zu beweisen ist, die folgende: wenn s_k die k-te positive Nullstelle der Funktion $J_{-\frac{1}{3}}(x) + J_{\frac{1}{3}}(x)$ bedeutet, dann ist $\frac{2}{3}(-X_k^{(0)})^{\frac{3}{2}} = s_k$.

schreiben, folgt

$$\varepsilon_{n-1,k} < \varepsilon_{n,k} < [s_k - (k - \tfrac{1}{4})\pi] \ .$$

Andererseits ist nach (5.5)

$$\varepsilon_{n,k} > 0 \qquad \left(k \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

und aus (5.3) folgt, daß

$$\varepsilon_{n,k} < \varepsilon_{n,k-1} \quad \left(k \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

ist. Um obere Grenzen für die Größen $\varepsilon_{n,k}$ zu finden, machen wir von den numerischen Rechnungen Stokes' Gebrauch, der die ersten 50 Nullstellen der Airy'schen Funktion berechnet hat [12]). Aus seinen Daten folgt:

$$s_1 = \left(\frac{3}{4} + 0{,}0087\right)\pi \ , \quad s_2 = \left(\frac{7}{4} + 0{,}0036\right)\pi \ .$$

Da anderseits $\varepsilon_{2,1} = 0{,}00522$ ist, gelten die Ungleichungen

$$0{,}0052 < \varepsilon_{n,1} < 0{,}0087 \qquad (n > 2) \tag{6.9a}$$

und

$$0 < \varepsilon_{n,k} < \varepsilon_{n,2} < 0{,}0036 \qquad \left(1 < k \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right) , \tag{6.9b}$$

die vermittels (6.8) obere und untere Schranken für die Wurzeln der Hermite'schen Polynome angeben.

7. Verschiedenes über die Wurzeln der Hermite'schen Polynome

1. *Direkte Abschätzung der Wurzeln* $x_{n,k}$. Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß die Funktion

$$\int\limits_{x_{n,k}}^{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1-x^2}\, dx \tag{7.1}$$

von $x_{n,k}$ geeignet ist, um ziemlich genaue Aussagen über ihre Größe zu machen. Nun pflegt man bei den hypergeometrischen (Legendre'schen, ultrasphärischen) Funktionen nicht die Größe der Wurzeln W selber, sondern die Funktion

[12]) *G. G. Stokes:* On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series. Trans. Cambr. Phil. Soc. IX., I., (1850), 166. Neudruck in den Mathematical and Physical Papers of *G. G. Stokes*, Bd. II, 1883, 329—357.

$$\int_W^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos W$$

von W abzuschätzen. In unserem Falle ist es aber nicht üblich, die analoge Funktion (7.1) der Wurzeln $x_{n,k}$ zu betrachten, vielmehr hat man sich bemüht, direkte Abschätzungen der Größen $x_{n,k}$ zu bekommen. Zum Vergleich mit den bisherigen Ergebnissen wollen wir unsere mit Formeln (6.8), (6.9a), (6.9b) ausgedrückte Abschätzung auf eine Form $s_{n,k} < x_{n,k} < S_{n,k}$ bringen. Es kommt dabei darauf an, eine möglichst gute Majorante und Minorante der inversen Funktion von $\int_t^1 \sqrt{1-u^2}\,du$ zu finden.

Wir gehen aus den mit elementaren Mitteln beweisbaren Ungleichungen

$$-\frac{d}{du}\frac{1}{3}\left[2(1-u)\left(1-\frac{1-u}{8}\right)\right]^{\frac{3}{2}} < \sqrt{1-u^2} < -\frac{d}{du}\frac{1}{3}\left(2\frac{1-u}{1+\frac{1-u}{10}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$(0 < u < 1)$$

aus, die nach einer Integration und geringer Umformung

$$(1-t)\left(1-\frac{1-t}{8}\right) < \frac{1}{2}\left[3\int_t^1 \sqrt{1-u^2}\,du\right]^{\frac{2}{3}} < \frac{1-t}{1+\frac{1-t}{10}} \qquad (0 \leqq t < 1) \tag{7.2}$$

ergeben. Wenn wir die mittlere Größe mit M bezeichnen, erhalten wir aus der linken Seite dieser doppelten Ungleichung

$$1-t < M + \frac{(1-t)^2}{8} \,. \tag{7.3}$$

Da $0 \leqq 1-t < 1$ ist, gilt a fortiori

$$1-t < M + \frac{1-t}{8} \qquad \text{oder} \qquad M > \frac{7}{8}(1-t) \,.$$

Diese Ungleichung mit (7.3) kombiniert ergibt

$$1-t < M + \frac{8}{49}M^2 < M + \frac{1}{6}M^2 \,. \tag{7.4a}$$

Weiter folgt aus der rechten Seite der doppelten Ungleichung (7.2)

$$1-t > \frac{M}{1-\frac{M}{10}} > M + \frac{1}{10}M^2 \,. \tag{7.4b}$$

Formeln (7.4a) und (7.4b) zusammengefaßt, erhalten wir

$$M + \frac{1}{10} M^2 < 1 - t < M + \frac{1}{6} M^2 \qquad \left(M = \frac{1}{2} \left[3 \int_t^1 \sqrt{1-u^2}\, du \right]^{\frac{2}{3}} \right) .$$

Nun setzen wir $t = (2n+1)^{-\frac{1}{2}} x_{n,k}$ $\left(k < \left[\frac{n}{2}\right] \right)$ und bekommen nach der Substitution $u = (2n+1)^{-\frac{1}{2}} x$ und Anwendung der Formel (6.8) die Ungleichung

$$\frac{1}{2}\left(3\pi \frac{k - \frac{1}{4} + \varepsilon_{n,k}}{2n+1}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{40}\left(3\pi \frac{k - \frac{1}{4} + \varepsilon_{n,k}}{2n+1}\right)^{\frac{4}{3}} < 1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{2n+1}}$$

$$< \frac{1}{2}\left(3\pi \frac{k - \frac{1}{4} + \varepsilon_{n,k}}{2n+1}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{24}\left(3\pi \frac{k - \frac{1}{4} + \varepsilon_{n,k}}{2n+1}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{7.5}$$

oder mit Hilfe von (6.9a) und (6.9b)

$$\frac{(3\pi)^{\frac{2}{3}}}{2}\left(k - \frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} (2n+1)^{-\frac{1}{6}} + \frac{(3\pi)^{\frac{4}{3}}}{40}\left(k - \frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}} (2n+1)^{-\frac{5}{6}} < \sqrt{2n+1} - x_{n,k}$$

$$< \frac{(3\pi)^{\frac{2}{3}}}{2}(k - 0{,}24)^{\frac{2}{3}} (2n+1)^{-\frac{1}{6}} + \frac{(3\pi)^{\frac{4}{3}}}{24}(k - 0{,}24)^{\frac{4}{3}} (2n+1)^{-\frac{5}{6}} . \tag{7.6}$$

Dieser Abschätzungsformel — die weniger genau ist, als das Ergebnis des vorigen Paragraphen — sei die in Szegö's zitiertem Buche auf S. 126 angegebene beste Abschätzung der Wurzeln der Hermite'schen Polynome

$$\frac{\pi}{2} \frac{n - 2k + 1}{\sqrt{2n+1}} < x_{n,k} < \frac{2n - 4k + 5}{\sqrt{2n+1}} \tag{7.6a}$$

$$\left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] \right)$$

an die Seite gestellt.

2. *Die größte Wurzel von $H_n(x)$.* Aus *Zernike*'s Untersuchungen (a. a. O.) geht die Formel

$$1{,}855 \cdot (2n+1)^{-\frac{2}{3}} < 1 - \frac{x_{n,1}}{\sqrt{2n+1}} < 2{,}00 \cdot (2n+1)^{-\frac{2}{3}} \qquad (n > 1)$$

hervor. Unsere Abschätzung (7.5) zusammen mit (6.9a) erlaubt eine zum Teile bessere Einschränkung, nämlich

$$1{,}850 \cdot (2n+1)^{-\frac{2}{3}} + 0{,}342\,(2n+1)^{-\frac{4}{3}} < 1 - \frac{x_{n,1}}{\sqrt{2n+1}} <$$
$$< 1{,}856\,(2n+1)^{-\frac{2}{3}} + 0{,}574\,(2n+1)^{-\frac{4}{3}}\,.$$

3. *Abstand der beiden größten Wurzeln. Einar Hille* hat bewiesen[13]), daß die Differenz $x_{n,1} - x_{n,2}$ zwischen den Grenzen $(2n+1)^{-\frac{1}{6}}$ und $2 \cdot (2n+1)^{-\frac{1}{6}}$ liegt. Aus unserer Formel (7.5) erhalten wir mit Hilfe der Ungleichungen (6.9a) und (6.9b) die genauere Abschätzung

$$1{,}383\,(2n+1)^{-\frac{1}{6}} + 0{,}475\,(2n+1)^{-\frac{5}{6}} < x_{n,1} - x_{n,2} <$$
$$< 1{,}395\,(2n+1)^{-\frac{1}{6}} + 1{,}412\,(2n+1)^{-\frac{5}{6}}\,.$$

4. *Ein numerisches Beispiel.* Endlich wollen wir im konkreten Falle $H_{10}(x) = 0$ die aus den Beziehungen (6.8) und (6.9) berechneten oberen und unteren Schranken der positiven Wurzeln angeben. Zum Vergleich habe ich auch die Näherungswerte dieser Wurzeln ausgerechnet, die aus der asymptotischen Formel

$$H_n(x) = \frac{n!\, e^{(n+1)\left(\frac{1}{2} + \cos^2 \psi\right)}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\pi \sin \psi}} \left\{ \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi - \frac{n+1}{2}\sin 2\psi + \frac{\pi}{4}\right] + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \right\}$$

$$\left(\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{2n}}\right)$$

von *Plancherel* und *Rotach*[14]), sowie aus den empirisch gut gefundenen Formeln

$$\left.\begin{aligned} H_{2\nu}(x) &\cong \frac{(-2)^\nu \nu!}{\sqrt{\pi\nu}\cos\vartheta}\, e^{\frac{x^2}{2}} \cos\left[\nu(2\vartheta + \sin 2\vartheta) + \frac{1}{2}\vartheta\right] \\ H_{2\nu+1}(x) &\cong \frac{(-2)^\nu \nu!}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\cos\vartheta}\, e^{\frac{x^2}{2}} \sin\left[\nu(2\vartheta + \sin 2\vartheta) + \frac{3}{2}\vartheta\right] \end{aligned}\right\} \left(\sin\vartheta = \frac{x}{\sqrt{4\nu}}\right)$$

---

[13]) Über die Nullstellen der Hermite'schen Polynome. Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung 44 (1934), 162—165.

[14]) Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite... Comm. Math. Helv., 1 (1929) 227—254.

von *Tricomi*[15]) stammen. Beim Ausrechnen der Werte der Tabelle habe ich für Umschlagsrechnungen mit gutem Nutzen Tricomi's angeführten Artikel gebraucht, in welchem die Funktion $y + \sin y = x$ (x unabhängige, y abhängige Veränderliche) tabuliert ist.

Wert von k	Untere Grenze von $x_{10,k}$	Obere Grenze von $x_{10,k}$	Näherungswert von $x_{10,k}$ nach Tricomi	Näherungswert von $x_{10,k}$ nach Plancherel und Rotach
1	3,4357	3,4394	3,4424	3,2825
2	2,5325	2,5355	2,5344	2,4166
3	1,7557	1,7580	1,7574	1,6757
4	1,0347	1,0372	1,0370	0,9887
5	0,3406	0,3432	0,3430	0,3271

8. Die Laguerre'schen Polynome

Die Laguerre'schen Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ sind mit der Formel

$$L_n^{(\alpha)} \cdot (x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha})$$

definiert. Ihre Wurzeln seien in wachsender Reihenfolge mit $x_{n,1}^{(\alpha)}$, $x_{n,2}^{(\alpha)}, \ldots, x_{n,n}^{(\alpha)}$ bezeichnet. Es gibt eine Reihe von Differentialgleichungen, deren Lösungen eng verwandt mit den Laguerre'schen Polynomen sind. Es seien hier nur zwei von ihnen erwähnt:

$$(x^{\alpha+1} U'(x))' + \frac{1}{4}(4n + 2\alpha + 2 - x)\, x^\alpha U(x) = 0 \qquad (8.1)$$

und

$$V''(x) + \left(4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}\right) V(x) = 0\ , \qquad (8.2)$$

deren Integrale unter anderen die Funktionen

$$U(x) = e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \qquad \text{bzw.} \qquad V(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\alpha + \frac{1}{2}} L_n^{(\alpha)}(x^2) \qquad (8.3)$$

sind. Wir betrachten erstens die Differentialgleichung (8.1). Die mit Formel (3.6) definierte Größe $t(x)$ ist in diesem Falle gleich

[15]) Generalizzazione di una formula asintotica sui polinomi di Laguerre e sue applicazioni. Atti della Reale Accad. d. Scienze di Torino. 76 (1941), 288—316.

$$x^{4\alpha}\left[\frac{1-\alpha^2}{4}\,x^2 + \alpha^2(2n+\alpha+1)\,x + \left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)(2n+\alpha+1)^2\right].$$

Diese Größe ist positiv, wenn die simultanen Bedingungen $|\alpha| \leqq \frac{1}{2}$, $2n+\alpha+1 \geqq 0$, $x > 0$ erfüllt sind. Es gilt daher nach Satz **3**, daß in diesem Falle das bestimmte Integral

$$\int \sqrt{\frac{4n+2\alpha+2-x}{4x}}\,dx\,,$$

genommen zwischen zwei benachbarten, im Intervalle $(0,\, 4n+2\alpha+2)$ liegenden Nullstellen irgendeiner Lösung der Gleichung (8.1) — auch bei nicht ganzzahligen n — stets kleiner, als π ausfällt. Insbesondere gilt also nach (8.3), daß

$$\int_{x_{n,k}^{(\alpha)}}^{x_{n,k+1}^{(\alpha)}} \sqrt{\frac{4n+2\alpha+2-x}{4x}}\,dx < \pi \qquad |\alpha| \leqq \tfrac{1}{2}$$

ist, da die Zahlen $x_{n,k}^{(\alpha)}$ positiv und kleiner, als $4n+2\alpha+2$ sind. Nun ist nach Anmerkung [5])

$$k_n^{(\alpha)} = \int_0^{x_{n,1}^{(\alpha)}} \sqrt{\frac{4n+2\alpha+2-x}{4x}}\,dx < \pi$$

und

$$K_n^{(\alpha)} = \int_{x_{n,n}^{(\alpha)}}^{4n+2n+2} \sqrt{\frac{4n+2\alpha+2-x}{4x}}\,dx < \pi\,. \tag{8.4}$$

Wenn wir noch die Gleichheit

$$\int_0^{4n+2\alpha+2} \sqrt{\frac{4n+2\alpha+2-x}{4x}}\,dx = \left(n+\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

in Betracht nehmen, ergibt sich ebenso, wie im § 5, eine *Abschätzung der Nullstellen der Laguerre'schen Polynome mit* $|\alpha| \leqq \frac{1}{2}$:

$$\left(k+\frac{\alpha-1}{2}\right)\pi < \int_0^{x_{n,k}^{(\alpha)}} \sqrt{\frac{4n+2\alpha+2-x}{4x}}\,dx < k\pi \quad |\alpha| \leqq \tfrac{1}{2}\,, \tag{8.5}$$

oder nach Ausführung der Integration im mittleren Gliede

$$\left(k+\frac{\alpha-1}{2}\right)\pi<(2n+\alpha+1)\ (\operatorname{arc}\ \sin t+t\sqrt{1-t^2})<k\pi \qquad |\alpha|\leqq\tfrac{1}{2}\,,$$

wobei

$$t^2=\frac{x_{n,k}^{(\alpha)}}{4n+2\alpha+2} \qquad \text{und} \qquad 0<\operatorname{arc}\ \cos t<\frac{\pi}{2}$$

ist.

Zur Abschätzung der Wurzeln derjenigen Laguerre'schen Polynome, deren Index α im absoluten Betrage mindestens $\frac{1}{2}$ ist, können wir die Gleichung (8.2) brauchen. Der Koeffizient von V ist im Intervalle $\langle\, 0, \infty\,\rangle$ eine von unten aus konkave Funktion von x. Nach § 4, Teil **1**, wird also die Größe $r(x)$ bzw. $t(x)$ immer positiv sein. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall $\alpha>\frac{1}{2}$. Dann hat die Gleichung $4n+2\alpha+2-x^2-(\frac{1}{4}-\alpha^2)\,x^{-2}=0$ immer zwei reelle, positive Wurzeln, die wir mit $t_n^{(\alpha)}$ und $T_n^{(\alpha)}$ bezeichnen wollen $(t_n^{(\alpha)}<T_n^{(\alpha)})$. Andererseits sind die Wurzeln von $L_n^{(\alpha)}(x)$ im Falle $\alpha>\frac{1}{2}$ und $n>0$ sämtlich positiv. Nach einem allgemeinen Satze der Theorie der Differentialgleichungen[16]) bieten also die Zahlen $t_n^{(\alpha)}$ und $T_n^{(\alpha)}$ eine untere und obere Schranke der Größen $(x_{n,k}^{(\alpha)})^2$. Nun folgt nach Satz **3**, daß das bestimmte Integral

$$\int\sqrt{4n+2\alpha+2-x^2+\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2}}\,dx \qquad |\alpha|\geqq\tfrac{1}{2}$$

genommen zwischen zwei benachbarten, im Intervalle $(t_n^{(\alpha)},\ T_n^{(\alpha)})$ liegenden Nullstellen irgendeiner Lösung der Gleichung (8.2), stets kleiner als π ausfällt. Insbesondere gilt dies nach (8.3) für die Integrationsgrenzen $(x_{n,k-1}^{(\alpha)})^2$ und $(x_{n,k}^{(\alpha)})^2$. Wenn wir noch in Betracht nehmen, daß der Wert dieses Integrals, genommen zwischen den Integrationsgrenzen $t_n^{(\alpha)}$ und $(x_{n,1}^{(\alpha)})^2$ bzw. $(x_{n,n}^{(\alpha)})^2$ und $T_n^{(\alpha)}$ auch kleiner, als π ausfällt, ferner, daß

$$\int_{t_n^{(\alpha)}}^{T_n^{(\alpha)}}\sqrt{4n+2\alpha+2-x^2+\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2}}\,dx=$$

$$=\left(n+\frac{\alpha+1-\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{4}}}{2}\right)\pi\geqq\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{8\alpha}\right)\pi$$

[16]) Der angeführte Satz lautet: Wenn die Funktion $\varrho(x)$ im endlichen oder unendlichen Intervalle (a,b) endlich, stetig und negativ ist, dann kann diejenige Lösung der Differentialgleichung $y''+\varrho(x)\,y=0$, deren Derivat an einem Endpunkte des Intervalles verschwindet, im Intervalle (a,b) keine Nullstellen besitzen.

ist, erhalten wir ebenso, wie im § 5, *die Wurzelabschätzung der Laguerreschen Polynome im Falle* $\alpha > \frac{1}{2}$:

$$\left(k - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\alpha}\right) < \int_{t_n^{(\alpha)}}^{(x_{n,k}^{(\alpha)})^2} \sqrt{4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}}\, dx < k\pi \; .$$

9. Genauere Abschätzung der Nullstellen der Laguerre'schen Polynome 0-ter Ordnung

1. Um eine schärfere Abschätzung der Nullstellen der Laguerre'schen Polynome zu erhalten, könnten wir denselben Weg einschlagen, wie im § 6. Wir fänden dann insbesondere für die Größen $k_n^{(\alpha)}$ und $K_n^{(\alpha)}$ erheblich bessere obere Schranken, als die in den Formeln (8.4) angegebenen. Die Einzelheiten dieser Rechnung bieten aber nichts Interessantes und wir würden im wesentlichen nur das Schema des § 6 an einem anderen Beispiel wiederholen. Für eine schärfere Nullstellenabschätzung wählen wir deshalb einen anderen Weg.

Fr. Tricomi (a. a. O.) hat die Näherungsformel von *E. Moecklin* [17])

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n \sin 2\vartheta}} \left\{ \cos\left[n(2\vartheta + \sin 2\vartheta) + \vartheta - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$\left(\vartheta = \text{arc sin} \sqrt{\frac{x}{4n}}\,, \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right) . \qquad (9.1)$$

im konkreten Fall $L_{10}^{(0)}(x)$ mit den exakten Werten des Laguerre'schen Polynoms verglichen und fand, daß die Näherungsformel (9.1) vom Gliede $O(n^{-\frac{1}{2}})$ abgesehen, im Intervalle $(0, 4n)$ — außer an den beiden Enden des Intervalles — überraschend gute Werte liefert. Mittels dieser Formel hat er auch die Wurzeln von $L_{10}^{(0)}(x)$ näherungsweise berechnet. Diese Näherungswerte stehen in guter Übereinstimmung mit den wahren Werten von $x_{n,k}^{(0)}$. Die Formel (9.1) ist aber naturgemäß nicht imstande, die *Fehlergrenzen der einzelnen Nullstellennäherungswerte* anzugeben.

In diesem Paragraphen wollen wir, von *Moecklins* Näherungsformeln ausgehend, obere und untere Schranken der Nullstellen der klassischen Laguerre'schen Polynome $L_n^{(0)}(x)$ aufsuchen. (Auf den Fall $\alpha \neq 0$ verzichten wir.) Die Formel (9.1) zeigt, daß wir, wenn wir in der Funktion $L_n^{(0)}(x)$ anstatt x die Veränderliche

[17]) *E. Moecklin:* Asymptotische Entwicklungen der Laguerre'schen Polynome. Comm. Math. Helv. 7, 1935, 24—46.

$$X = n(2\vartheta + \sin 2\vartheta) + \vartheta \quad \left(\vartheta = \arcsin \sqrt{\frac{x}{4n}}\;,\; 0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}\right) \tag{9.2}$$

einführen, zu einer Funktion von X gelangen, deren Wurzeln angenähert äquidistant liegen. Die Funktion selber ist, bis auf einen sich langsam verändernden Faktor, eine Kosinusfunktion von X [abgesehen vom Gliede $O(n^{-\frac{1}{2}})$]. Es liegt also folgende Vermutung nahe. Wenn wir in der Differentialgleichung (8.1) ($\alpha = 0$) eine neue unabhängige Veränderliche X durch Formel (9.2) einführen, ferner $U = v(X)\, w(X)$ schreiben und den Faktor $v(X)$ so bestimmen, daß in der umgeformten Differentialgleichung der Koeffizient der ersten Derivierten von $w(X)$ verschwindet, so erhalten wir eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2 w(X)}{dX^2} + [1 + R(X)]\, w(X) = 0 \tag{9.3}$$

wo — im allgemeinen — *der absolute Wert von $R(X)$ klein gegen 1 sein wird.* Nach dieser Vermutung wird also die allgemeine Lösung von (9.3) annähernd von der Form $\alpha \cos(X + \beta)$ sein.

Die Durchführung der Rechnungen zeigt, daß die Bedingung für $v(X) = v$ den Wert

$$v = \left(x \frac{dX}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}} = (xX')^{-\frac{1}{2}}$$

liefert. Ferner ist

$$1 + R(X) = 1 + R = \frac{v^{-1}(xv')' + n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}}{x(X')^2} =$$

$$= \frac{1}{xX'^2}\left\{\frac{1}{x}\left[\frac{(xX')'}{2X'}\right]^2 - \frac{d}{dx}\left[\frac{(xX')'}{2X'}\right] + n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right\}.$$

Wenn wir in Betracht nehmen, daß

$$\frac{dX}{dx} = \frac{4n\cos^2\vartheta + 1}{4n \sin 2\vartheta} \quad \text{und} \quad 4n \sin^2\vartheta = x \tag{9.4}$$

sind, so erhalten wir

$$R = -1 + 4\frac{4n - x}{(4n+1-x)^2}\left\{\frac{1}{x}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{x}{4n+1-x} + \frac{n}{4n-x}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{4n+1}{(4n+1-x)^2} - \frac{n}{(4n-x)^2} + n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(4n+1-x)^2}\left[\frac{n}{x} - \frac{3n}{4n-x} + \frac{-4n - 1 + 2x(4n-x)}{(4n+1-x)^2}\right]. \tag{9.5}$$

In dieser Formel ist R als Funktion von $x = x(X)$ ausgedrückt. Diese Größe R ist in einer recht unübersichtlichen Weise abhängig von X. Man kann jedoch einfache Funktionen von X finden, die in einem gegebenen Intervall Majoranten bzw. Minoranten von $R(x)$ sind. Es gelten nämlich die Beziehungen (vorausgesetzt, daß $n > 3$ ist)

$$\frac{1}{4X^2} - \frac{1}{16n^2} < R(X) < \frac{1}{4X^2} \qquad 0 \leqq X \leqq \frac{n}{2}\pi\,, \tag{9.6}$$

$$R(X) > 0 \qquad 0 \leqq X \leqq n\pi - \frac{2}{3}\,, \tag{9.7}$$

$$R(X) < \frac{5n}{(4n - x)^3} < \frac{1}{4(n\pi - X)^2} \qquad \frac{n}{2}\pi \leqq X \leqq n\pi - \frac{2}{3}\,. \tag{9.8}$$

2. Den Beweis dieser Ungleichungen werden wir später angeben. Hier wollen wir sogleich *aus diesen Beziehungen auf die Lage der Nullstellen schließen.* Wir werden dabei die Sturm'sche Vergleichsmethode anwenden. Nun nützen wir zwei Tatsachen aus: erstens, daß die Lösung $w(X)$ der Differentialgleichung (9.3) eine solche Funktion von X ist, die sich an der singulären Stelle $X = 0$ in eine Potenzreihe der Form $\sqrt{X}(A + BX + \cdots)$ entwickeln läßt [das folgt daraus, daß in der Umgebung von $x = 0$ die Funktion $U(x)$ die Form $(a + bx + \cdots)$ hat]; zweitens, daß diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + \left(\varkappa^2 + \frac{1}{4X^2}\right)Y = 0\,,$$

die sich in gleicher Weise durch eine Potenzreihe darstellen läßt, gleich $\sqrt{X}\,J_0(\varkappa X)$ ist, wo $J_0(z)$ die Bessel'sche Funktion 0-ter Ordnung bedeutet. Die positiven Nullstellen dieser Funktion sollen der Reihe nach mit $\varkappa^{-1} j_1, \varkappa^{-1} j_2, \ldots, \varkappa^{-1} j_k, \ldots$ bezeichnet werden. Die Größe j_k liegt bekanntlich im Intervalle $\left((k - \frac{1}{4})\pi, k\pi\right)$. Daraus und aus (9.6) folgt nach den Sturm'schen Prinzipien und Antizipation der noch zu beweisenden Ungleichung $X_{n,k} < k\pi$, wobei $X_{n,k} = X(x_{n,k})$ ist, daß

$$j_k < X_{n,k} < \frac{j_k}{\sqrt{1 - \frac{1}{16n^2}}} \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \nu,\ \nu = \left[\frac{n}{2}\right]\right)\,. \tag{9.9}$$

ist. Diese Schranken von $X_{n,k}$ bieten *schon bei verhältnismäßig kleinem n* sehr genaue Abschätzungen.

Nun ist $R(X)$ im Intervalle $0 < X < n\pi - \frac{2}{3}$ positiv und im Falle $n \geqq 4$ folgt aus dem numerischen Wert von $j_1 = 2{,}40483$ die Ungleichung $X_{n,1} < \pi - \frac{2}{3}$. Daraus folgt wieder mit der Sturm'schen Vergleichsmethode, daß

$$X_{n,k+1} - X_{n,k} < \pi \quad \text{und} \quad X_{n,k} < k\pi - \frac{2}{3} \quad (n > 3) \tag{9.10}$$

ist.

Um eine untere Abschätzung der Nullstellen $X_{n,k}$ $(k > \nu)$ zu gewinnen, brauchen wir *eine bessere Kenntnis der Größen* j_k, *der Nullstellen der Bessel'schen Funktion* 0-*ter Ordnung*, als die oben erwähnte. Dies erhalten wir etwa folgendermaßen: Die erste Eigenfunktion des Randwertproblems

$$y''(x) + \lambda\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) y(x) = 0 \qquad (y(j_l) = y(j_{l+1}) = 0)$$

ist die Bessel'sche Funktion $J_0(x)$. Der zugehörige Eigenwert ist $\lambda = 1$. Nun ist nach den Sturm'schen Lehrsätzen

$$\frac{\pi}{j_{l+1} - j_l} \cdot \frac{1}{\min\limits_{j_l < x < j_{l+1}} \sqrt{1 + (4x^2)^{-1}}} > \sqrt{\lambda} = 1 \ ,$$

oder

$$j_{l+1} - j_l < \frac{\pi}{\sqrt{1 + [4(l+1)^2 \pi^2]^{-1}}} < \pi - \frac{1}{9\pi(l+1)^2} \ , \tag{9.11}$$

denn es gilt im Intervalle $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{4}}} < 1 - \frac{\varepsilon}{9} \ .$$

Weiter folgt aus (9.11), daß

$$\left[\left(l + \frac{3}{4}\right)\pi - j_{l+1}\right] - \left[\left(l - \frac{1}{4}\right)\pi - j_l\right] > \frac{1}{9\pi(l+1)^2} >$$

$$> \frac{1}{9\pi} \frac{1}{(l+1)\,(l+2)} = \frac{1}{9\pi}\left[\frac{1}{l+1} - \frac{1}{l+2}\right]$$

ist. Wenn wir in dieser Ungleichung $l = k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots,\ m-1$ schreiben und die so erhaltenen Ungleichungen addieren, gelangen wir zur Beziehung

$$\left[\left(m-\frac{1}{4}\right)\pi-j_m\right]-\left[\left(k-\frac{1}{4}\right)\pi-j_k\right]>\frac{1}{9\pi}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{m+1}\right)\ (m>k)\ .$$

Da bekanntlich $\lim\limits_{m\to\infty}\left[(m-\frac{1}{4})\pi-j_m\right]=0$ ist, liefert uns ein Grenzübergang

$$j_k-(k-\tfrac{1}{4})\pi\geqq\frac{1}{9\pi(k+1)}\ . \qquad (9.11\text{a})$$

Daraus folgt

$$X_{n,\nu}>j_\nu\geqq(\nu-\tfrac{1}{4})\pi+\frac{1}{9\pi(\nu+1)}\geqq(\nu-\tfrac{1}{4})\pi+\frac{2}{9\pi(n+2)}\ . \qquad (9.12)$$

Die Differenz $X_{n,\nu+1}-X_{n,\nu}$ können wir auf ähnliche Weise von oben abschätzen, wie wir es mit den Nullstellen von $J_0(x)$ getan haben. So erhalten wir

$$X_{n,\nu+1}-X_{n,\nu}>\frac{\pi}{\max\limits_{X_{n,\nu}<X<X_{n,\nu+1}}\sqrt{1+R(X)}}>\frac{\pi}{\max\limits_{\left(\frac{n}{2}-\frac{3}{4}\right)\pi<X<\left(\frac{n}{2}+1\right)\pi-\frac{2}{3}}\sqrt{1+R(X)}}>$$

$$>\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left[\frac{n\pi}{2}-\pi+\frac{2}{3}\right]^{-2}}}>\pi\left(1-\frac{1}{2\left[(n-2)\pi+\frac{4}{3}\right]^2}\right)\ .$$

Im folgenden sollen mit $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ die in wachsender Reihe geordneten positiven Nullstellen von $Y_0(x)$, der Bessel'schen Funktion zweiter Art und nullter Ordnung bezeichnet werden. Bekanntlich ist $y_m>(m-\frac{3}{4})\pi$. Nun folgt aus der letzten Ungleichung und aus (9.12) im Falle $n\geqq 5$, daß

$$X_{n,\nu+1}>(\nu+1-\tfrac{1}{4})\pi+\frac{2}{9\pi(n+2)}-\frac{1}{2\pi(n-2)^2}>(\nu+\tfrac{3}{4})\pi>n\pi-y_{n-\nu}$$

ist. (Im Falle $n=4$ zeigt eine genauere Durchführung der obenstehenden Abschätzungen — ohne Kenntnis der numerischen Werte $X_{4,k}$ — daß die Ungleichung $X_{n,\nu+1}>n\pi-y_{n-\nu}$ auch in diesem Falle wahr ist.)

Nun vergleichen wir Gleichung (9.3) im Intervalle $\left(\frac{n\pi}{2}, n\pi\right)$ mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2Y}{dX^2}+\left(1+\frac{1}{4(n\pi-X)^2}\right)Y=0\ .$$

Wir fassen diejenige Lösung der letzteren Differentialgleichung ins Auge, die der Bessel'schen Funktion zweiter Art entspricht, nämlich $\sqrt{X}\cdot Y_0(n\pi - X)$. Da nach (9.8) der Koeffizient von Y in dieser Gleichung im erwähnten Intervalle überall größer, als $1 + R(X)$ ist, ferner $X_{n,\nu+1} > n\pi - y_{n-\nu} > \frac{n}{2}\pi$ ist, erhalten wir nach bekannten Sätzen die Ungleichungen

$$X_{n,\nu+2} > n\pi - y_{n-\nu-1}, \ldots, X_{n,k} > n\pi - y_{n-k+1}, \ldots, X_{n,n} > n\pi - y_1 \left(k > \left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{9.12a}$$

Damit haben wir für alle $X_{n,k}$ obere und untere Schranken angegeben.

3. Wir sind noch die Beweise der Ungleichungen (9.6, 7, 8) schuldig. Zu diesem Zwecke müssen wir erstens *das Verhalten der Funktion $X(x)$ in der Umgebung von $x = 4n$ näher untersuchen.* Deshalb wollen wir mit x_i, ϑ_i, X_i $(i = 1, 2)$ einander entsprechende Werte von x, ϑ, X bezeichnen. Nun sei $x_1 = 4n - n\alpha^2$. Es gilt dann[18])

$$x_1 = 2n\left[1 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!}\right)\right] < 2n(1 + \cos\alpha) = 4n\cos^2\frac{\alpha}{2} = 4n\sin^2\frac{\pi - \alpha}{2}.$$

Es ist also $\vartheta_1 < \frac{\pi - \alpha}{2}$. Da aber X eine monoton wachsende Funktion von $\vartheta(x)$ ist, folgt, daß

$$X_1 = (2n+1)\,\vartheta_1 + n\sin 2\vartheta_1 < (2n+1)\,\frac{\pi-\alpha}{2} + n\sin(\pi - \alpha) =$$

$$= (2n+1)\frac{\pi-\alpha}{2} + n\sin\alpha < (2n+1)\,\frac{\pi-\alpha}{2} + n\alpha - n\frac{\alpha^3}{3!} + n\frac{\alpha^5}{5!} =$$

$$= n\pi + \frac{\pi-\alpha}{2} - n\,\frac{\alpha^3}{3!} + n\,\frac{\alpha^5}{5!} = \overline{X}(\alpha)$$

---

[18]) In den folgenden machen wir von der Tatsache ausgiebig Gebrauch, daß für $\vartheta > 0$ das Vorzeichen der beiden Größen

$$1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{\vartheta^{2n}}{(2n)!} - \cos\vartheta$$

und

$$\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{\vartheta^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sin\vartheta$$

gleich dem Vorzeichen von $(-1)^n$ ist. (Siehe *G. H. Hardy:* A course of pure mathematics, 7. Aufl. Cambridge, 1938, S. 237).

ist. X ist aber eine monoton wachsende Funktion auch von x und so gilt die Ungleichung $X(x) < \overline{X}(\alpha)$ für $x \leqq 4n - n\alpha^2$, oder umgekehrt

$$x > 4n - n\alpha^2 \ , \ \text{wenn} \ X(x) \geqq n\pi + \frac{\pi-\alpha}{2} - n\,\frac{\alpha^3}{3!} + n\,\frac{\alpha^5}{5} \ . \quad (9.13)$$

Zu einer andern Eigenschaft der Funktion $X(x)$ gelangen wir, wenn $x_2 = 4n - n\beta^2 + \frac{1}{12}n\beta^4$ gesetzt wird. Es gilt dann

$$x_2 = 2n\left[1 + \left(1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!}\right)\right] > 2n(1+\cos\beta) = 4n\cos^2\frac{\beta}{2} = 4n\sin^2\frac{\pi-\beta}{2} \ ,$$

also ist $\vartheta_2 > \dfrac{\pi-\beta}{2}$. Weiter folgt

$$X_2 = (2n+1)\ \vartheta_2 \ + n\sin 2\vartheta_2 > (2n+1)\frac{\pi-\beta}{2} + n\sin(\pi-\beta) =$$

$$= (2n+1)\frac{\pi-\beta}{2} + n\sin\beta \ > (2n+1)\frac{\pi-\beta}{2} + n\beta - n\,\frac{\beta^3}{6} =$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\beta}{2} - n\,\frac{\beta^3}{6} = \underline{X}(\beta)$$

oder $X > \underline{X}(\beta)$ für $x \geqq x_2$. Umgekehrt gilt

$$x < 4n - n\beta^2 + \frac{1}{12}n\beta^4, \ \text{wenn} \ X(x) \leqq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\beta}{2} - n\,\frac{\beta^3}{6} \ . \quad (9.14)$$

Nun sei $\beta = \left(\dfrac{3\pi}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$. Dann gilt

$$x < 4n - (3\pi)^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}} + \frac{(3\pi)^{\frac{4}{3}}}{12n^{\frac{1}{3}}} \quad \text{für} \quad X \leqq n\pi - \left(\frac{3\pi}{8n}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

Wenn $n \geqq 4$ ist, dann ist weiter

$$4n - (3\pi)^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}} + \frac{(3\pi)^{\frac{4}{3}}}{12n^{\frac{1}{3}}} < 4n - 4$$

und

$$n\pi - \left(\frac{3\pi}{8n}\right)^{\frac{1}{3}} > n\pi - \frac{2}{3} \ , \quad (9.14\text{a})$$

also x ist kleiner, als $4n-4$, wenn $X \leqq n\pi - \frac{2}{3}$ und $n \geqq 4$ ist.

4. Nach diesen Überlegungen kommen wir zur *Abschätzung der Größe* $R(x)$. Zum Beweise der Ungleichung (9.6) gehen wir von den mit einfachen Hilfsmitteln (Vergleich des Differentialquotienten nach ϑ) beweisbaren Ungleichungen

$$(4n\cos^2\vartheta+1)\tan\vartheta < n(2\vartheta+\sin 2\vartheta)+\vartheta < (4n\cos^2\vartheta+1)\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}$$

aus. Diese Ungleichungen sind gültig, wenn $0<\vartheta<\operatorname{arc}\cos(4n)^{-\frac{1}{2}}$, d.h. $0<x<4n-1$ ist, und für $n\geqq 4$ a fortiori, wenn $0<X<n\pi-\frac{2}{3}$ ist. Wir erinnern daran, daß das mittlere Glied gleich X ist. Nun folgt aus diesen Ungleichungen, daß

$$\left(\frac{1}{2}\,\frac{\cot\vartheta}{4n\cos^2\vartheta+1}\right)^2 > \frac{1}{4X^2} > \left(\frac{\cos\vartheta}{2}\,\frac{\cot\vartheta}{4n\cos^2\vartheta+1}\right)^2$$

ist. Mit Hilfe der Beziehung $x=4n\sin^2\vartheta$ können wir die linke und rechte Seite als Funktionen von x ausdrücken und so erhalten wir

$$\frac{1}{(4n+1-x)^2}\left(\frac{n}{x}-\frac{1}{4}\right) > \frac{1}{4X^2} > \frac{1}{(4n+1-x)^2}\left(\frac{n}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{16n}\right)$$

oder

$$\frac{1}{(4n+1-x)^2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{3n}{4n-x}-\frac{-4n-1+2x(4n-x)}{(4n+1-x)^2}\right) > \frac{1}{4X^2}-R$$

$$> \frac{1}{(4n+1-x)^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{16n}+\frac{3n}{4n-x}-\frac{-4n-1+2x(4n-x)}{(4n+1-x)^2}\right).$$

Wenn $x\leqq\frac{2}{3}n$ und $n\geqq 4$ ist, können wir weiter schreiben

$$\frac{1}{(4n+1-x)^2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{9}{10}+\frac{1}{4n+1}\right) > \frac{1}{4X^2}-R >$$

$$> \frac{1}{(4n+1-x)^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{16n}+\frac{3n}{4n-x}-\frac{2x(4n-x)}{(4n-x)^2}\right),$$

$$\frac{4}{49n^2}\left(-\frac{1}{4}+1\right) > \frac{1}{4X^2}-R > \frac{1}{(4n+1-x)^2}\left(\frac{x}{16n}+\frac{n-\frac{3}{2}x}{4n-x}\right),$$

$$\frac{1}{16n^2} > \frac{1}{4X^2}-R > 0\,. \tag{9.15}$$

Daraus folgt Formel (9.6), da

$$X\left(\frac{2}{3}n\right) = (2n+1)\ \text{arc sin}\ \sqrt{\frac{1}{6}} + n \sin\left(2\ \text{arc sin}\ \sqrt{\frac{1}{6}}\right) > \frac{n}{2}\pi\,,$$

also das zu $X = \frac{n\pi}{2}$ gehörige x kleiner, als $\frac{2}{3}n$ ist.

Durch diesen Beweisgang ist auch Formel (9.7) im Intervalle $0 < x \leqq \frac{2}{3}n$ schon bewiesen. Nun sei

$$A(x) \equiv -(4n+1)(4n-x) + 2x(4n-x)^2 - x(4n+1-x)^2$$

Es gelten die folgenden Beziehungen $(n \geqq 4)$:

$$A(0) < 0,\ A\left(\frac{2}{3}n\right) > 0,\ A(4n-4) > 0,\ A(4n) < 0,\ A(+\infty) = +\infty,$$

d. h. die Wurzeln von $A(x) = 0$ sind reell und sie liegen in den Intervallen $0 < x < \frac{2}{3}n$, $4n-4 < x < 4n$, $4n < x < +\infty$. $A(x)$ ist also im Intervalle $\frac{2}{3}n < x < 4n-4$ positiv, oder, was dasselbe ist, es gilt

$$\frac{-4n-1+2x(4n-x)}{(4n+1-x)^2} > \frac{x}{4n-x} \quad \left(\tfrac{2}{3}n < x < 4n-4\,,\ n \geqq 4\right).$$

Daraus folgt aber, daß

$$R > \frac{1}{(4n+1-x)^2}\left[\frac{n}{x} - \frac{3n}{4n-x} + \frac{x}{4n-x}\right] =$$

$$= \frac{1}{(4n+1-x)^2}\,\frac{(2n-x)^2}{x(4n-x)} \geqq 0 \quad \left(\tfrac{2}{3}n < x < 4n-4\right)$$

ist. Damit ist die Aussage (9.7) in ihrem ganzen Umfange gerechtfertigt.

Endlich können wir die Abschätzung (9.8) folgendermaßen herleiten:

$$R < \frac{1}{(4n-x)^2}\left[\frac{n}{x} - \frac{3n}{4n-x} + \frac{2x(4n-x)}{(4n-x)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{(4n-x)^3}\cdot\frac{(2n-x)^2+x^2}{x} = \frac{5nx-(4n-x)(2x-n)}{x\cdot(4n-x)^3}.$$

Also gilt

$$R < \frac{5n}{(4n - x)^3} \qquad \left(\frac{n}{2} \leqq x \leqq 4n\right). \tag{9.16}$$

Ferner ist

$$B(\vartheta) = 4\cos^3\vartheta + \sqrt{5}\,(-\pi + 2\vartheta + \sin 2\vartheta)$$

eine Funktion, deren Differentialquotient nach ϑ, $12\cos^2\vartheta(3^{-1}\cdot\sqrt{5} - \sin\vartheta)$, im Intervalle $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ mit wachsendem ϑ erst positiv, dann negativ ist. Weiter ist $B(\vartheta)$ positiv, wenn $\sin^2\vartheta = \frac{1}{3}$ ist und es ist $B\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; daraus folgt, daß $B(\vartheta)$ im Intervalle $\arcsin 3^{-\frac{1}{2}} \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ positiv ist. A fortiori gilt, daß

$$nB(\vartheta) + \sqrt{5}\,\vartheta = 4n\cos^3\vartheta - \sqrt{5}\,[n\pi - n(2\vartheta + \sin 2\vartheta) - \vartheta] =$$

$$= 4n\cos^3\vartheta - \sqrt{5}\,(n\pi - X) > 0\,,$$

oder

$$\frac{1}{4(n\pi - X)^2} > \frac{5n}{(4n\cos^2\vartheta)^3} = \frac{5n}{(4n - x)^3} > R \qquad \left(\frac{4n}{3} \leqq x \leqq 4n\right)$$

infolge der Ungleichung (9.16). Damit ist die Abschätzung im Intervalle $(\frac{4}{3}n \leqq x \leqq 4n)$, oder $X(\frac{4}{3}n) \leqq X \leqq n\pi - \frac{2}{3}$ $[< X(4n)]$ bewiesen.

Nun ist (siehe oben)

$$R < \frac{1}{(4n - x)^3}\,\frac{(2n - x)^2 + x^2}{x} = \frac{2n - x}{(4n - x)^3}\cdot\left[\frac{2n - x}{x} + \frac{x}{2n - x}\right].$$

Der erste Faktor der rechten Seite hat ein Maximum an der Stelle $x = n$. Der zweite Faktor hat hingegen an derselben Stelle ein Minimum; diese Funktion von x ist von unten aus konvex im Intervalle $\frac{2}{3}n \leqq x \leqq \frac{4}{3}n$. Also gilt es im Intervalle

$$\frac{2}{3}n \leqq x \leqq \frac{4}{3}n \quad \text{oder} \quad X\left(\frac{2}{3}n\right) \leqq X \leqq X\left(\frac{4}{3}n\right),$$

daß

$$R < \left[\frac{2n - x}{(4n - x)^3}\right]_{x=n} \cdot \operatorname*{maj}_{\substack{x = \frac{2}{3}n \\ x = \frac{4}{3}n}} \left[\frac{2n - x}{x} + \frac{x}{2n - x}\right] <$$

$$< \frac{5}{54n^2} < \frac{1}{4\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} < \frac{1}{4(n\pi - X)^2}$$

ist, da $X > \frac{n\pi}{2}$, wenn $x > \frac{2}{3}n$ ist. Endlich ist im Intervalle $\frac{n\pi}{2} \leqq X \leqq X\left(\frac{2}{3}n\right)$ nach (9.15)

$$R < \frac{1}{4X^2} < \frac{1}{4(n\pi - X)^2} .$$

Damit ist (9.8) vollständig bewiesen.

5. *Direkte Abschätzung der größten Nullstelle von* $L_n^{(0)}(x)$. Wir wissen schon nach (9.10, 12a, 14a), daß für $n \geqq 4$

$$n\pi - y_1 < X_{n,n} < n\pi - \frac{2}{3} < n\pi - \left(\frac{3\pi}{8n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ist. Aus (9.13) und (9.14) erhalten wir, wenn

$$\alpha = \left(\frac{3\pi + 6y_1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad \beta = \left(\frac{3\pi}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

gesetzt wird, daß

$$4n - n\left(\frac{3\pi + 6y_1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} < x_{n,n} < 4n - n\left(\frac{3\pi}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{12}\,\frac{(3\pi)^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}} ,$$

oder mit numerischen Werten

$$4n - 6{,}03n^{\frac{1}{3}} < x_{n,n} < 4n - 4{,}46n^{\frac{1}{3}} + 1{,}66n^{-\frac{1}{3}} \tag{9.17}$$

ist. Diese Ungleichungen haben wir nur für $n \geqq 4$ bewiesen; man kann sich aber mit numerischer Rechnung überzeugen, daß sie auch im Falle $n < 4$ bestehen.

Dieser letzten Formel sei die von *Bottema*[18a]) gegenübergestellt:

$$4n - 16\sqrt{2n} < x_{n,n} < 4n - \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{n} + \tfrac{1}{2} .$$

Abgesehen davon, daß die linke Seite nur von $n > 32$ ab sinngemäße positive Werte liefert, läßt sich aus dieser Formel nur $x_{n,n} = 4n + O(\sqrt{n})$ schließen, während aus unserer Ungleichung $x_{n,n} = 4n + O(\sqrt[3]{n})$ folgt.

[18a]) Proc. Roy. Soc. Acad. Amsterdam, 34 (1931), 677—680.

6. *Numerische Beispiele.* Die kleinste und die größte Wurzel von $L_{10}(x)$ genügt nach Teil 2 dieses Paragraphen den Ungleichungen

$$0{,}13776 < x_{10,1} < 0{,}13786 \quad \text{und} \quad 29\tfrac{1}{2} < x_{10,10} < 30\tfrac{1}{3} \; .$$

Die asymptotische Formel von *Moecklin* liefert in erster Annäherung 0,1322 und 29,9344, während die Näherungswerte nach *Tricomi*'s Methode 0,1380 und 29,9315 sind [19].

10. Bessel'sche Funktionen 0-ter Ordnung

Für die Differentialgleichung

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \tag{10.1}$$

ist die mit Gleichung (3.1) definierte Größe $r(x)$, $\lambda = 1$ gesetzt, gleich $-x^{-4} - 6x^{-6}$, sie ist also negativ. Daraus folgt nach Satz 3, daß wenn $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ die in wachsender Reihe geordneten positiven Nullstellen irgendeiner Lösung von (10.1) bedeuten, dann ist

$$(l-k)\,\pi < \int_{x_k}^{x_l} \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}\, dx \qquad (k < l) \; . \tag{10.2}$$

Nun ist die rechte Seite kleiner, als

$$\int_{x_k}^{x_l} \left(1 + \frac{1}{8x^2}\right) dx < \left(x_l - \frac{1}{8x_l}\right) - \left(x_k - \frac{1}{8x_k}\right) \; .$$

Es ist also

$$k\pi - x_k + \frac{1}{8x_k} > l\pi - x_l + \frac{1}{8x_l} \qquad (k < l) \; . \tag{10.3}$$

Die Differentialgleichung (10.1) hat zwei ausgezeichnete Lösungen, nämlich $\sqrt{x}\, J_0(x)$ und $\sqrt{x}\, Y_0(x)$, deren Nullstellen wir näher untersuchen wollen. Die positiven Nullstellen der Bessel'schen Funktion erster

[19]) *Tricomi* gibt die Näherungswerte nach *Moecklin's* Formel mit einer Genauigkeit von 4 Dezimalen an, die aber (0,1355, bzw. 29,9303) schon im dritten Dezimal unrichtig sind. Die Näherungswerte nach *Tricomi's* Methode habe ich wegen der schwierigen Weise der Auswertung nicht nachgerechnet.

Art, $J_0(x)$, sollen der Reihe nach mit $j_1, j_2, \ldots, j_m, \ldots$, die der Bessel-schen Funktion zweiter Art, nämlich $Y_0(x)$ der Reihe nach mit $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ bezeichnet werden. Wir setzen die Kenntnis der Beziehungen

$$j_k > (k-\tfrac{1}{4})\pi,\ y_k > (k-\tfrac{3}{4})\pi\ ;\ \lim_{l\to\infty}\ [j_l-(l-\tfrac{1}{4})\pi] = 0,\ \lim_{l\to\infty}\ [y_l-(l-\tfrac{3}{4})\pi] = 0$$

voraus. Für die Nullstellen der Bessel'schen Funktionen erster und zweiter Art gelten also die Zusammenhänge ($k < l$)

$$(k-\tfrac{1}{4})\pi - j_k + \frac{1}{8j_k} > (l-\tfrac{1}{4})\pi - j_l + \frac{1}{8j_l} > \lim_{l\to\infty}\left[(l-\tfrac{1}{4})\pi - j_l + \frac{1}{8j_l}\right] = 0\,.$$

bzw.

$$(k-\tfrac{3}{4})\pi - y_k + \frac{1}{8y_k} > (l-\tfrac{3}{4})\pi - y_l + \frac{1}{8y_l} > \lim_{l\to\infty}\left[(l-\tfrac{3}{4})\pi - y_l + \frac{1}{8y_l}\right] = 0\,,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} j_k &< (k-\tfrac{1}{4})\pi + \frac{1}{8j_k} < (k-\tfrac{1}{4})\pi + \frac{1}{8\pi(k-\tfrac{1}{4})}\,,\\ y_k &< (k-\tfrac{3}{4})\pi + \frac{1}{8y_k} < (k-\tfrac{3}{4})\pi + \frac{1}{8\pi(k-\tfrac{3}{4})}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (10.4)\ [20]$$

Für die Güte dieser Abschätzung sollen hier einige Beispiele stehen:

Nullstellen:	j_1	j_2	y_1	y_2
Wert für 4 Dezimalen:	2,4048	5,5201	0,8936	3,9578
Obere Grenze nach (10.4) rechte Seite:	2,4093	5,5206	0,9446	3,9588

Für höhere Nullstellen sind diese Abschätzungen noch schärfer.

11. Die Mathieu'schen Funktionen

Endlich wollen wir unsere Sätze auf ein Problem anwenden, bei dem weder die Nullstellen, noch die Eigenwerte bekannt sind. Wir wählen die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda\,(a + \cos 2\,x)\,y = 0\ , \qquad (11.1)$$

deren Lösungen bei geeigneten Werten von λ die Mathieu'schen Funktionen sind[21]). Zwei Fälle müssen wir unterscheiden.

---

[20]) Als ein Gegenstück dieser Abschätzung vgl. Formel (9.11a).

[21]) λ sei nichtnegativ, was nötigerweise durch die Substitutionen $\lambda \to -\lambda$, $x \to x + \frac{\pi}{2}$ erreicht werden kann.

Fall **1.** $|a| \leqq 1$. Dies ist der Fall, der mit den bisher benutzten Mitteln schwerer zu behandeln war, als der unten zu diskutierende Fall **2.** Im Falle **1** ist die Größe $r(x)$ nach Gleichung (3.1) gleich $4 \sin^2 2x + 16(1 + a \cos 2x)$. Sie ist immer positiv, falls nicht $a = 1$ und $x = (k + \frac{1}{2})\pi$, oder $a = -1$ und $x = k\pi$ ist.

Nun sei x_0 durch $a + \cos 2x_0 = 0$ $(0 \leqq 2x_0 < \pi)$ definiert. Der Koeffizient der Gleichung (11.1) ist dann positiv in den Intervallen I_m $(m\pi - x_0 < x < m\pi + x_0)$ und negativ in den Intervallen J_m $(m\pi + x_0 < x < (m+1)\pi - x_0)$. Wenn x' und x'' zwei benachbarte Nullstellen einer beliebigen Lösung von (11.1) bedeuten, folgt aus Satz **3** die Ungleichung

$$\int_{x'}^{x''} \sqrt{\lambda} \sqrt{a + \cos 2x}\, dx < \pi \,. \qquad (x' < x'')$$

Wenn außerdem $'x$ und $''x$ die kleinste bzw. größte Wurzel im Intervalle I_m bedeuten, dann ist dasselbe Integral, genommen zwischen den Grenzen $m\pi - x_0$ und $'x$, bzw. $''x$ und $m\pi + x_0$ stets kleiner als π.

Ferner ist bekannt, daß die Mathieu'schen Funktionen $\mathrm{se}_n x$ und $\mathrm{ce}_n x$ n Nullstellen im Intervalle $\alpha \leqq x < \pi + \alpha$ haben. Keine der Nullstellen von $\mathrm{se}_{2\nu+1} x$ und $\mathrm{ce}_{2\nu} x$ liegt aber in den Intervallen $\overline{J_m}$, während die Funktionen $\mathrm{se}_{2\nu} x$ und $\mathrm{ce}_{2\nu+1} x$ die einzige Nullstelle $(m + \frac{1}{2})\pi$ in $\overline{J_m}$ haben. [$\overline{J_m}$ bedeute das geschlossene Intervall $m\pi + x_0 \leqq x \leqq (m+1)\pi - x_0$][22]). Daraus folgt, wenn die zu $\mathrm{ce}_n x$ gehörige Eigenwert und Nullstellen im Intervalle $-\frac{\pi}{2} < x \leqq \frac{\pi}{2}$ mit λ_n^c; $c_{n,1}, c_{n,2}, \ldots, c_{n,n}$ $(c_{n,k} < c_{n,k+1})$ bezeichnet werden, ferner $c_{n,0} = -x_0$ und $c_{n,n+1} = x_0$ ist, daß

[22]) Wegen der Periodizität der Mathieu'schen Funktionen genügt es, unsere Behauptung nur für das Intervall $\overline{J_0}$ zu beweisen. Es gelten die Symmetrie-, bzw. Antisymmetriebeziehungen

$$\mathrm{se}_{2\nu}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\mathrm{se}_{2\nu}\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \quad \mathrm{se}_{2\nu+1}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{se}_{2\nu+1}\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

$$\mathrm{ce}_{2\nu}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{ce}_{2\nu}\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \quad \mathrm{ce}_{2\nu+1}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\mathrm{ce}_{2\nu+1}\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Daraus folgt, daß wenn $\frac{\pi}{2} - \xi$ eine Nullstelle einer Mathieu'schen Funktion ist, $\frac{\pi}{2} + \xi$ auch Nullstelle derselben Funktion ist. Nun kann eine Lösung von (11.1) nach einem allgemeinen Satz nur *eine* Nullstelle in $\overline{J_0}$ besitzen. Dies kann aber nur $\frac{\pi}{2}$ sein. Es folgt aber aus den obigen Relationen, daß $\mathrm{se}_{2\nu}$ und $\mathrm{ce}_{2\nu+1} x$ bei $x = \frac{\pi}{2}$ verschwinden. Andererseits können die Funktionen $\mathrm{se}_{2\nu+1} x$ und $\mathrm{ce}_{2\nu} x$ an diesen Stellen nicht verschwinden. Angenommen nämlich, daß ihr Wert bei $x = \frac{\pi}{2}$ gleich 0 wäre, müßten sie nach den obigen Beziehungen an dieser Stelle eine doppelte, oder $2p$-fache Nullstelle haben, was aber in Widerspruch mit der Tatsache steht, daß diese Funktionen nur einfache Wurzeln besitzen.

$$\sqrt{\lambda_n^c} \cdot \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{a + \cos 2x}\, dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{c_{n,i}}^{c_{n,i+1}} \sqrt{\lambda_n^c}\, \sqrt{a + \cos 2x}\, dx < 2\pi \left(\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{1}{2}\right)$$

oder

$$\sqrt{\lambda_n^c} < \frac{2\pi\left(\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{1}{2}\right)}{\int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{a + \cos 2x}\, dx} \qquad (|a| \leqq 1) \qquad (11.2)$$

ist. Ebenso läßt sich die Ungleichung

$$\sqrt{\lambda_n^s} < \frac{2\pi\left[\frac{n+1}{2}\right]}{\int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{a + \cos 2x}\, dx} \qquad (|a| \leqq 1) \qquad (11.3)$$

herleiten, wo λ_n^s den zu $\mathrm{se}_n x$ gehörigen Eigenwert bedeutet.

Fall **2.** $|a| > 1$. Es genügt, den Fall $a > 1$ zu betrachten, da es für $a < -1$ überhaupt keinen positiven Eigenwert gibt. Wenn $a > 1$ ist, so bleibt der Koeffizient von y in Gleichung (11.1) — im Gegensatz zu Fall **1** — immer positiv. Die Größe $r(x)$ wechselt aber ihr Vorzeichen und so können wir die Sätze des § 3 nicht unmittelbar benutzen. Wenn wir aber die im Beweise des Satzes **1** benutzte Transformation durchführen, erhalten wir aus Gleichung (11.1) gemäß Formel (3.5a)

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + \left[\lambda + \frac{4\sin^2 2x + 16(1 + a\cos 2x)}{16(a + \cos 2x)^3}\right] Y = 0 \,, \qquad (11.4)$$

wo x als Funktion von $X = \int\limits_0^x \sqrt{a + \cos 2x}\, dx$ aufzufassen ist.

Zähler und Nenner des Bruches in der letzten Formel sollen nun mit $Z(\cos 2\vartheta)$ bzw. $N(\cos 2\vartheta)$ bezeichnet werden, wobei

$$Z(u) = 4(1 - u^2) + 16(1 + au) \quad \text{und} \quad N(u) = 16(a + u)^3$$

ist. Im Intervalle $-1 \leqq u \leqq 1$ sind die beiden Funktionen $Z(u)$ und $N(u)$ monoton wachsend. In diesem Intervalle wechselt $Z(u)$ sein Vorzeichen, während $N(u)$ überall positiv bleibt. Daraus folgt, daß unser Bruch zwischen den Schranken

$$\frac{Z(-1)}{N(-1)} = -\frac{1}{(a-1)^2} \quad \text{und} \quad \frac{Z(1)}{N(-1)} = \frac{a+1}{(a-1)^3}$$

bleibt.

Nun sei α eine Nullstelle von $\mathrm{ce}_n x$; dann ist auch $\mathrm{ce}_n(\pi + \alpha) = 0$. Diese Funktion ist also die n-te Eigenfunktion des Eigenwertproblems (11.1) mit den Randbedingungen $y(\alpha) = y(\pi + \alpha) = 0$. Der Eigenwert sei wieder λ_n^c benannt. Es folgt, daß die transformierte Funktion Y von $\mathrm{ce}_n x$ die n-te Eigenfunktion des Eigenwertproblems (11.4) mit den Randbedingungen $Y(X(\alpha)) = Y(X(\pi + \alpha)) = 0$ ist. (Der Eigenwert ist wiederum λ_n^c.) Nach dem fundamentalen Satze der Eigenwertabschätzungen gilt also

$$\lambda_n^c + \frac{a+1}{(a-1)^3} > \left(\frac{n\pi}{X(\pi+\alpha) - X(\alpha)}\right)^2 > \lambda_n^c - \frac{1}{(a-1)^2}$$

oder da

$$X(\pi+\alpha) - X(\alpha) = \int_\alpha^{\pi+\alpha} \sqrt{a + \cos 2x}\, dx = \int_0^\pi \sqrt{a + \cos 2x}\, dx$$

ist,

$$\frac{1}{(a-1)^2} > \lambda_n^c - \left(\frac{n\pi}{\int_0^\pi \sqrt{a + \cos 2x}\, dx}\right)^2 > -\frac{a+1}{(a-1)^3} \quad (a > 1)\ . \qquad (11.5)$$

Mit einem genau entsprechenden Gedankengange können wir schließen, daß sich in der letzten Formel λ_n^c durch λ_n^s ersetzen läßt.

Zu den Formeln (11.2, 3, 5) sei bemerkt, daß nach einem allgemeinen Satz

$$\sqrt{\lambda_n^c} \sim \sqrt{\lambda_n^s} \sim \frac{n\pi}{\int_0^\pi \Re \sqrt{a + \cos 2x}\, dx}$$

gilt. Es soll noch erwähnt sein, daß die Integrale, die in diesen Abschätzungsformeln vorkommen, leicht durch vollständige elliptische Integrale auszudrücken sind.

(Eingegangen den 26. Dezember 1942.)