Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Über den Begriff des Atoms IV.

Autor: Scherrer, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15553

Über den Begriff des Atoms IV

Von W. SCHERRER, Bern

Einleitung

Der vorliegende Teil IV*) ist die unmittelbare Fortsetzung der unter demselben Titel erschienenen Teile I[1]) und II[2]). Er kann aber auch als selbständige Studie über das Problem der wellenmechanischen Trägheit eines Elementarteilchens gelesen werden und ich schicke zu diesem Zwecke einige Erläuterungen voraus.

1. Ein einzelnes Elementarteilchen der Ruhmasse m_0 wird charakterisiert durch eine *Wellenfunktion*

$$u = u(t, x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

deren physikalischer Sinn darin besteht, daß das über das Weltgebiet $\mathfrak{G}$ erstreckte Integral

$$W = \iiiint\limits_{\mathfrak{G}} u^2 \, d(ct) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \tag{2}$$

im Mittel die Zahl derjenigen Weltstellen angibt, welche von unserem Teilchen innerhalb des Weltgebietes $\mathfrak{G}$ eingenommen werden. Die Funktion u stellt also nicht einen konkreten Einzelfall, sondern das Mittel sehr vieler und voneinander vollständig unabhängiger Elementarteilchen dar, die denselben Konkurrenzbedingungen unterliegen.

2. Als *Trägheitsgesetz* postulieren wir, daß die Wellenfunktion[3]) (1) eine *eindeutige* Lösung der kräftefreien relativistischen Wellengleichung

$$\Box u \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -a^2 u \tag{3}$$

sei, mit

$$a = \frac{2\pi m_0 c}{h}, \tag{4}$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit und h das Planck'sche Wirkungsquantum bedeutet.

---

[1]) Helv. Phys. Acta, XV, 1, 53 (1942).
[2]) Helv. Phys. Acta, XV, 5, 476 (1942).
[3]) respektive ihr Quadrat, solange man mit dieser schwächeren Forderung auskommt.
*) Teil III, Helv. Phys. Acta XVI, 4, 230 (1943), enthält lediglich eine kurze Zusammenfassung der in dem vorliegenden Artikel entwickelten Resultate.

3. Als *Randbedingung* postulieren wir das Verbot der Überlichtgeschwindigkeit. Dasselbe wird sich von Fall zu Fall, je nach der zugrunde liegenden Konfiguration, verschieden auswirken. Wie das zu verstehen ist, wird ohne weiteres klar, wenn man die denkbaren Fälle nacheinander aufzählt.

I. Das „*Einpunktproblem*".

Von einem Elementarteilchen sei bekannt, daß es an einer bestimmten Weltstelle Q_1 in Erscheinung trete. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dieses Teilchen an irgend einer anderen mit dem Verbot der Überlichtgeschwindigkeit verträglichen Weltstelle Q anzutreffen?

Das damit umschriebene Grundgebiet umfaßt offenbar den Nachkegel (Zukunftskegel) und den Vorkegel (Vergangenheitskegel) der „Gewißheitsstelle" Q_1.

II. Das „*Zweipunktproblem*".

Von einem Elementarteilchen sei bekannt, daß es an zwei zueinander zeitartig gelegenen Weltstellen Q_1 und Q_2 in Erscheinung trete, wobei Q_2 später sei als Q_1. Dann wird genau dieselbe Frage gestellt wie beim Einpunktproblem.

Das jetzt maßgebende Grundgebiet besteht offenbar aus dem Nachkegel von Q_2, dem Vorkegel von Q_1 und dem Durchschnitt des Nachkegels von Q_1 mit dem Vorkegel von Q_2. Den letzteren endlichen Bereich wollen wir in Zukunft kurz als „*Doppelkegel*" bezeichnen.

So fortfahrend, gelangt man zum Begriff eines „*n-Punktproblems*", wobei natürlich irgend zwei der n „Gewißheitsstellen" $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, zueinander zeitartig liegen müssen.

4. Die Hauptfrage wird nun sein, ob die nach den eben geschilderten Gesichtspunkten ermittelten Wellenfunktionen die *Erhaltung des Teilchens* garantieren. Ein genauer mikrokosmischer Erhaltungssatz wird im Rahmen der in Teil I und II entwickelten Weltpunktdynamik gar nicht angestrebt. Dagegen ist es notwendig, daß das Teilchen asymptotisch für große Zeiten erhalten bleibe. Um den Sinn dieser Aussage präziser zu fassen, bezeichnen wir den zwischen den Ebenen $t = 0$ und $t = T$ gelegenen Teil des Grundgebietes mit $\mathfrak{G}(T)$ und betrachten im Sinne von (2) das Integral

$$W(T) = \iiiint\limits_{\mathfrak{G}(T)} u^2 \, d(ct) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \,. \tag{5}$$

Nun fragen wir nach der mittleren Zahl der von dem Teilchen zur Zeit $t = T$ pro Sekunde eingenommenen Weltstellen. Sie wird gegeben durch

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \iiint\limits_{t=T} u^2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \nu(T) \,. \tag{6}$$

Offenbar hat es dann und nur dann einen Sinn, von der asymptotischen Erhaltung des Teilchens für große Zeiten zu sprechen, wenn der Grenzwert

$$\lim_{T \to \infty} \nu(T) = \nu^* \tag{7}$$

existiert.

Nach den eben entwickelten Gesichtspunkten wurde im Teil II das Einpunktproblem gelöst. Die im Sinne von (7) brauchbaren Lösungen sind daselbst zusammengestellt in den Tafeln (56) und (70). Da wir sie vorderhand nicht benötigen, verzichte ich auf ihre Wiedergabe. Wichtig für uns ist die Feststellung, daß sämtliche Lösungen entweder auf dem Nullkegel oder auf der Ruhachse singulär werden. Ganz besonders hervorzuheben ist aber die Tatsache, daß sich unter diesen Lösungen keine befindet, die der vollkommenen Zentralsymmetrie des Einpunktproblems in dem Sinne entspricht, daß sie nur von der Weltdistanz

$$r = \sqrt{c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \tag{8}$$

abhängt. Die einzige vollkommen singularitätenfreie Lösung dieser Art lautet

$$u = C \cdot \frac{J_1(a r)}{r} \tag{9}$$

(J_1 = Bessel'sche Funktion vom Index 1) und liefert in (7) $\nu^* = \infty$. Um also beim Einpunktproblem brauchbare Lösungen zu erhalten, ist man gezwungen, die Ruhachse auszuzeichnen und damit ein der Konfiguration nicht angemessenes Element zu benutzen.

Dieser begriffliche Mangel soll uns nun ein Anlaß sein, in dem vorliegenden Teil III das *Zweipunktproblem* zu behandeln. Eine derartige Untersuchung empfiehlt sich auch aus folgendem Grunde: In der klassischen Mechanik wird die Trägheitsbewegung eines Massenpunktes festgelegt durch Ort und Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit oder — in der Ausdrucksweise der relativistischen Metrik — durch die Angabe zweier zu einander zeitartig gelegener und infinitesimal benachbarter Weltpunkte. Es ist also zu erwarten, daß das Zweipunktproblem der klassischen Mechanik näher steht als das Einpunktproblem. Diese Erwartung wird sich tatsächlich bestätigen.

§ 1. Koordinatenwahl und Separation

Wir wählen das Koordinatensystem so, daß die beiden Weltstellen Q_1 und Q_2, welche unser Teilchen mit Sicherheit passiert, durch die Angaben

$$Q_1 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (-A, 0, 0, 0) \tag{10_1}$$

und

$$Q_2 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (A, 0, 0, 0) \tag{10_2}$$

bestimmt erscheinen. Dann führen wir an Stelle von x_1, x_2, x_3 räumliche Polarkoordinaten ein

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos \vartheta \\ x_2 &= \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_3 &= \varrho \sin \vartheta \sin \varphi , \end{aligned} \tag{11}$$

und schließlich ersetzen wir die Zeit t und den räumlichen Abstand ϱ durch — der relativistischen Metrik angepaßte — Lamé'sche Koordinaten τ und σ gemäß den Gleichungen

$$\begin{aligned} ct &= \frac{\tau \sigma}{A} \\ \varrho &= \frac{\sqrt{(A^2 - \tau^2)\,(A^2 - \sigma^2)}}{A} . \end{aligned} \tag{12}$$

Sind die Beträge $|\tau|$ und $|\sigma|$ beide kleiner als A, so bewegt sich der Bildpunkt im Innern des Doppelkegels; sind sie hingegen beide größer als A, so bewegt er sich im Vorkegel von Q_1 oder im Nachkegel von Q_2 je nach den gewählten Vorzeichen.

Die durch (11) und (12) eingeführten krummlinigen Koordinaten $\tau, \sigma, \vartheta, \varphi$ bilden ein „Orthogonalsystem" im Sinne der herrschenden Metrik. Das zugehörige Linienelement lautet

$$\begin{aligned} ds^2 = (\sigma^2 - \tau^2) \left(\frac{d\tau^2}{A^2 - \tau^2} - \frac{d\sigma^2}{A^2 - \sigma^2} \right) - \\ - \frac{(A^2 - \tau^2)\,(A^2 - \sigma^2)}{A^2} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2) . \end{aligned} \tag{13}$$

Daraus ergibt sich das vierdimensionale Volumenelement

$$d(ct)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{\sqrt{(A^2 - \tau^2)\,(A^2 - \sigma^2)}}{A} |\tau^2 - \sigma^2| \sin \vartheta \, d\tau\, d\sigma\, d\vartheta\, d\varphi , \tag{14}$$

sowie der Wellenoperator

$$\boxed{\begin{aligned}\Box u = & \frac{1}{\sigma^2-\tau^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{A^2-\tau^2}}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(\sqrt{A^2-\tau^2})^3\frac{\partial u}{\partial\tau}\right]-\frac{1}{\sqrt{A^2-\sigma^2}}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[(\sqrt{A^2-\sigma^2})^3\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right]\right\}-\\ & -\frac{A^2}{(A^2-\tau^2)(A^2-\sigma^2)}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}\end{aligned}} \quad (15)$$

Die Separation auf Grund des Produktansatzes

$$u = T(\tau)\,S(\sigma)\,P(\vartheta)\,\Phi(\varphi) \tag{16}$$

liefert dann die Gleichungen

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0\,, \qquad (\Phi)$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP}{d\vartheta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]P = 0\,, \qquad (\mathrm{P})$$

$$\frac{1}{\sqrt{A^2-\sigma^2}}\frac{d}{d\sigma}\left[(\sqrt{A^2-\sigma^2})^3\frac{dS}{d\sigma}\right]+\left[d^2(A^2-\sigma^2)-E-\frac{l(l+1)A^2}{A^2-\sigma^2}\right]S = 0\,, \qquad (\mathrm{S})$$

$$\frac{1}{\sqrt{A^2-\tau^2}}\frac{d}{d\tau}\left[(\sqrt{A^2-\tau^2})^3\frac{dT}{d\tau}\right]+\left[d^2(A^2-\tau^2)-E-\frac{l(l+1)A^2}{A^2-\tau^2}\right]T = 0\,. \qquad (\mathrm{T})$$

Hier sind in den beiden wohlbekannten Gleichungen (Φ) und (P) die Eigenwerte schon durch die geläufigen Quantenzahlen m und l ausgedrückt worden. Neu und für das Zweipunktproblem charakteristisch sind die beiden gleichlautenden Gleichungen (S) und (T).

§ 2. Die Quantenbedingungen

Die Eigenlösungen von (Φ) und (P) werden in bekannter Weise durch Kreis- und Kugelfunktionen geliefert. Wir haben uns also nur noch mit den Gleichungen (S) und (T) zu befassen. Es wird sich zeigen, daß ihre Quantisierung im wesentlichen auf der Forderung der *Eindeutigkeit* beruht.

Wir uniformisieren zuerst die Koeffizienten der beiden Gleichungen vermittelst der Transformation

$$\begin{aligned}\tau &= A\cos\beta\\ \sigma &= A\cos\alpha\end{aligned} \tag{17}$$

und erhalten

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\sin^2\alpha\frac{dS}{d\alpha}\right)+\left[A^2a^2\sin^2\alpha-E-\frac{l(l+1)}{\sin^2\alpha}\right]S=0\;, \qquad [\mathrm{S}]$$

$$\frac{1}{\sin\beta}\frac{d}{d\beta}\left(\sin^2\beta\frac{dT}{d\beta}\right)+\left[A^2a^2\sin^2\beta-E-\frac{l(l+1)}{\sin^2\beta}\right]T=0\;. \qquad (\mathrm{T})$$

An Stelle von (12) tritt

$$\begin{aligned} ct &= A\cos\beta\cos\alpha \\ \varrho &= A\sin\beta\sin\alpha\;. \end{aligned} \tag{18}$$

Nun betrachten wir eine bestimmte Weltstelle Q_0 mit den Koordinaten (t_0, ϱ_0). Ihr entsprechen in der (α, β)-Ebene unendlich viele Punkte, die gitterartig verteilt sind, nämlich alle Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} ct_0 &= A\cos\beta\cos\alpha \\ \varrho_0 &= A\sin\beta\sin\alpha\;, \end{aligned} \tag{19}$$

oder auch der Gleichungen

$$\begin{aligned} ct_0+\varrho_0 &= A\cos(\beta-\alpha)\;. \\ ct_0-\varrho_0 &= A\cos(\beta+\alpha)\;. \end{aligned}$$

Ist also (α_0, β_0) eine Lösung von (19), so genügen alle weiteren Lösungen (α, β) dem System

$$\begin{aligned} \cos(\beta+\alpha) &= \cos(\beta_0+\alpha_0) \\ \cos(\beta-\alpha) &= \cos(\beta_0-\alpha_0)\;. \end{aligned} \tag{20}$$

Die Eindeutigkeit von u^2 erfordert daher, daß die Gleichung

$$T^2[\beta]\,S^2[\alpha]=T^2[\beta_0]\,S^2[\alpha_0] \tag{21}$$

für sämtliche Lösungen der Gleichungen (20) erfüllt ist.

Es gibt aber noch eine zweite Gruppe von Stellen (α, β), für die (21) gelten muß. Ersetzt man nämlich die Winkelkoordinaten φ_0 und ϑ_0 der Stelle Q_0 durch $\varphi_0+\pi$ und $\pi-\vartheta_0$, so gelangt man wegen (11) und (18) in denselben Punkt, wie wenn man α_0 durch $-\alpha_0$ oder β_0 durch $-\beta_0$ ersetzt. Es muß also gelten

$$T^2[\beta_0]\,S^2[\alpha_0]\,P^2[\pi-\vartheta_0]\,\Phi^2[\varphi_0+\pi]=T^2[\pm\beta_0]\,S^2[\pm\alpha_0]\,P^2[\vartheta_0]\,\Phi^2[\varphi_0]\,.$$

Nun gilt aber für die Kreis- und Kugelfunktionen

$$P^2[\pi-\vartheta_0]\,\Phi^2[\varphi_0+\pi]=P^2[\vartheta_0]\,\Phi^2[\varphi_0]\,.$$

Somit ergibt sich

$$T^2[\beta_0]S^2[\alpha_0] = T^2[\pm\beta_0]S^2[\pm\alpha_0].$$

Daraus folgt, daß außer den Lösungen von (20) auch noch die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}\cos(\beta+\alpha) &= \cos(\beta_0-\alpha_0)\\ \cos(\beta-\alpha) &= \cos(\beta_0+\alpha_0)\end{aligned} \tag{22}$$

die Gleichung (21) erfüllen müssen.

Nun ergibt sich ohne Schwierigkeit folgendes *Eindeutigkeitskriterium:* Die Gleichung

$$T^2[\beta]S^2[\alpha] = T^2[\beta_0]S^2[\alpha_0] \tag{23}$$

muß erfüllt sein, sobald *entweder*

$$\begin{aligned}\alpha &= \pm\alpha_0 + k\pi\\ \beta &= \pm\beta_0 + l\pi\end{aligned} \tag{23_1}$$

oder

$$\begin{aligned}\alpha &= \pm\beta_0 + k\pi\\ \beta &= \pm\alpha_0 + l\pi\end{aligned} \tag{23_2}$$

gilt, wobei k und l ganze Zahlen darstellen, die simultan entweder gerade oder ungerade sein müssen, während die Vorzeichen von α_0 und β_0 unabhängig gewählt werden dürfen.

Dieses Kriterium wertet man bequem aus, wenn man nacheinander die Spezialfälle

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta_0\,, & \beta &= \alpha_0\\ \alpha &= \alpha_0\,, & \beta &= -\beta_0\\ \alpha &= \alpha_0+\pi\,, & \beta &= \beta_0+\pi\end{aligned}$$

behandelt. Es ergeben sich folgende

Quantenbedingungen:

1. Die Lösung $T(\beta)$ muß bis auf einen konstanten Faktor dieselbe Funktion darstellen wie die Lösung $S(\alpha)$:

$$T(x) \equiv C S(x)\,. \tag{24}$$

2. Die Lösungsfunktion ist entweder gerade oder ungerade:

$$S(-x) \equiv \pm S(x)\,.$$

3. Die Lösungsfunktion ist entweder ganzperiodisch mit der Periode π oder halbperiodisch mit der Periode 2π:

$$S(x + \pi) \equiv \pm S(x)$$

Es herrscht also eine weitgehende Analogie zum Eigenwertsproblem der Mathieu'schen Differentialgleichung[4]). Tatsächlich lassen sich auch die für dieses Problem entwickelten Methoden verwerten, wenn man an Stelle trigonometrischer Reihen Entwicklungen nach vierdimensionalen Kugelfunktionen benützt.

§ 3. Kugelfunktionen im R_4

Wir lassen den Parameter A in der Gleichung $[S]$ des vorigen Paragraphen gegen Null gehen und ersetzen die Zeichen S, α, E durch $G, \theta, -\lambda$. Es folgt die Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen im R_4:

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta\,\frac{dG}{d\theta}\right) + \left[\lambda - \frac{l(l+1)}{\sin^2\theta}\right] G = 0 \ . \tag{G}$$

Diese Differentialgleichung folgt auch aus der Gleichung (22) von Teil II, § 2, vermittelst der Substitution $\theta \to i\theta$. Aus den Entwicklungen daselbst erhält man unmittelbar für die bei $\theta = 0$ endlichen Lösungen den Ausdruck

$$G(\theta) = (-\sin\theta)^l \left(\frac{d}{\sin\theta\, d\theta}\right)^l \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = Q_n^l(\cos\theta) \ , \tag{27}$$

falls

$$\lambda = n(n+2) \tag{28}$$

gesetzt wird. Sollen diese Lösungen auch im Punkte $\theta = \pi$ endlich bleiben, so muß n eine ganze Zahl sein. Wie man leicht erkennt, sind diese trigonometrischen Polynome nur für $n \geqslant l$ von Null verschieden.

Die Funktionen $Q_n^l(\cos\theta)$ sind also die im abgeschlossenen Intervall $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ stetigen *Eigenlösungen* der Differentialgleichung (G) und die Größen (28) die zugehörigen *Eigenwerte*. Offenbar erfüllen diese Eigenlösungen die im vorigen Paragraphen angegebenen Quantenbedingungen (25) und (26), und zwar sind sie gerade oder ungerade, resp. ganzperiodisch oder halbperiodisch, je nachdem l resp. n gerade oder ungerade ist.

---

[4]) *M. J. O. Strutt*, Lamé'sche, Mathieu'sche und verwandte Funktionen in Physik und Technik; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. I, 1932.

Zur Darstellung der Lösungen von $[S]$ benötigen wir Serien von zugeordneten Kugelfunktionen Q_n^l mit festem l und laufendem n. Das wichtigste formale Hilfsmittel wird dabei eine dreigliedrige Rekursion für festes l sein. Ich entwickle daher kurz die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen $Q_n^l(\cos\theta)$. Dabei folge ich im Aufbau soweit als möglich der von Bethe[5]) gegebenen Zusammenstellung über die Kugelfunktionen in R_3.

I. Legendre'sche Kugelfunktionen $Q_n(\cos\theta)$ im R_4.

Wir setzen

$$\cos\theta = x \tag{29}$$

und definieren die $Q_n(x)$ vermittelst der *erzeugenden Funktion* Q:

$$Q \equiv \frac{1}{1 - 2sx + s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)\, s^n \tag{30}$$

Die beiden höchsten Glieder des Polynoms ergeben sich dann aus

$$Q_n(x) = 2^n x^n + 0(x^{n-2})\,. \tag{31}$$

Für $x = 1$ folgt aus (30)

$$Q_n(1) = n + 1\,. \tag{32}$$

Weiter folgt aus (30) *die Rekursion*

$$\left.\begin{aligned} &Q_0 && = 1\,, \\ &Q_1 - 2x\,Q_0 && = 0\,, \\ &Q_{n+1} - 2x\,Q_n + Q_{n-1} && = 0\,. \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Ableitung von (33) ergibt

$$\left.\begin{aligned} 2Q_0 &= Q_1' \,; \\ 2Q_n &= Q_{n+1}' - 2xQ_n' + Q_{n-1}' \,. \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Aus der Relation

$$s\,\frac{\partial Q}{\partial s} = (x - s)\,\frac{\partial Q}{\partial x}$$

folgt als weitere *Differentialrekursion* neben (34)

$$nQ_n = xQ_n' - Q_{n-1}'\,; \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{35}$$

[5]) *H. Bethe*, Quantenmechanik der Ein- und Zweielektronenprobleme. Handbuch der Physik, Bd. XXIV, S. 551 ff.

Mit (34) und (35) äquivalent sind die beiden Relationen

$$xQ'_n = Q'_{n-1} + nQ_n \; ; \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{36a}$$
$$xQ'_n = Q'_{n+1} - (n+2)\,Q_n \; ; \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{36b}$$

(36a) ist einfach eine Umstellung von (35) und (36b) erhält man, indem man in (34) Q'_{n-1} mit Hilfe von (35) eliminiert.

Multipliziert man (36a) mit x und wendet man hierauf (36b) auf das Glied xQ'_{n-1} an, so folgt

$$(1 - x^2)\,Q'_n = (n+1)\,Q_{n-1} - n\,x\,Q_n \,.$$

Wenn man nun diese Gleichung differenziert und hernach Q'_{n-1} vermittels (36a) eliminiert, so folgt die *Differentialgleichung:*

$$(1 - x^2)\,Q''_n - 3\,x\,Q'_n + n(n+2)\,Q_n = 0 \,. \tag{37}$$

Führt man hier wieder θ ein gemäß (29), so folgt:

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta\,\frac{dQ_n}{d\theta}\right) + n\,(n+2)\,Q_n = 0 \;. \tag{38}$$

Unser Polynom $Q_n(x) = Q_n(\cos\theta)$ ist also die zum Eigenwert $\lambda = n\,(n+2)$ gehörige Eigenlösung der Differentialgleichung (G) im Spezialfall $l = 0$. Es muß also bis auf einen konstanten Faktor mit der uns schon bekannten aus (28) sich ergebenden Eigenlösung

$$Q_n^0\,(\cos\theta) = \frac{\sin\,(n+1)\,\theta}{\sin\theta} \tag{39}$$

übereinstimmen. Der Vergleich von (32) und (39) zeigt aber, daß dieser Faktor gleich 1 sein muß. Damit haben wir die durch (30) eingeführten Polynome bestimmt zu

$$Q_n\,(\cos\theta) = \frac{\sin\,(n+1)\,\theta}{\sin\theta} \;. \tag{40}$$

Die Legendre'schen Kugelfunktionen im R_4 sind also nichts anderes als die Ableitungen der wohlbekannten Tschebyscheff'schen Polynome.

II. Zugeordnete Kugelfunktionen $Q_n^l\,(\cos\theta)$.

Wir definieren sie durch (27), oder — mit Rücksicht auf (29) und (40) — durch

$$Q_n^l(x) = (1 - x^2)^{\frac{l}{2}} Q_n^{(l)}(x) \ , \tag{41}$$

wo

$$Q_n^{(l)}(x) = \frac{d^l}{dx^l} Q_n(x) \tag{42}$$

ist. Nach den Bemerkungen am Eingang dieses Paragraphen stellen diese Funktionen die im abgeschlossenen Intervall $-1 \leqslant x \leqslant 1$ stetigen Eigenlösungen der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\, G'' - 3\, x\, G' + \left[\lambda - \frac{l(l+1)}{1 - x^2}\right] G = 0 \tag{43}$$

mit den Eigenwerten $\lambda = n(n+2)$, $n = l, l+1, \ldots$ dar.

Wir benötigen eine *Rekursion für festes* l. l-malige Ableitung von (35) liefert

$$(n - l)\, Q_n^{(l)} = x Q_n^{(l+1)} - Q_{n-1}^{(l+1)} \ . \tag{44}$$

l-malige Ableitung von (33) ergibt

$$2\, l Q_n^{(l-1)} = Q_{n+1}^{(l)} - 2 x Q_n^{(l)} + Q_{n-1}^{(l)} \ . \tag{45}$$

Erniedrigt man nun in (44) den Index l um 1, so kann man zwischen der entstehenden Gleichung und (45) den Term $Q_n^{(l-1)}$ eliminieren und erhält mit Rücksicht auf (41):

$$(n - l + 1)\, Q_{n+1}^l - 2(n+1)\, x\, Q_n^l + (n + l + 1)\, Q_{n-1}^l = 0 \ , \tag{46}$$

gültig für $l = 0, 1, 2, \ldots$ und $n = l, l+1, l+2, \ldots$, falls man $Q_{-1}^0 = Q_{-1}$ als Null erklärt. Die Gleichung (46) stellt also die gesuchte Rekursion für festes l dar.

III. Normierung. Zu diesem Zwecke schreiben wir (G) resp. (43) in selbstadjungierter Form:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta \frac{dG}{d\theta}\right) + [\lambda \sin^2\theta - l(l+1)]\, G = 0 \ , \tag{47}$$

resp.

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dG}{dx}\right] + \left[\lambda \sqrt{1 - x^2} - \frac{l(l+1)}{\sqrt{1 - x^2}}\right] G = 0 \ . \tag{48}$$

In bekannter Weise stellt man fest, daß die Q_n^l ein Orthogonalsystem bilden:

$$\int_{-1}^{1} Q_m^l Q_n^l \sqrt{1 - x^2}\, dx = 0 \ ; \quad (m \neq n) \ . \tag{49}$$

Die Normierung ergibt

$$\int_{-1}^{1} [Q_n^l]^2 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{(n+l-1)!\,\pi}{(n-l)!\; 2(n+1)} \; . \tag{50}$$

Sie berechnet sich leicht genau nach dem im klassischen Falle üblichen Verfahren[6]).

§ 4. Entwicklung nach Kugelfunktionen

Wir lösen jetzt die Differentialgleichung $[S]$ von § 2, oder — indem wir vorderhand noch an den Bezeichnungen von § 3 festhalten — die Gleichung

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta\frac{dG}{d\theta}\right) - \frac{l(l+1)}{\sin^2\theta}G = -(\lambda + B^2\sin^2\theta)\,G \tag{51}$$

durch eine Reihe von zugeordneten Kugelfunktionen

$$G = \sum_{n=l}^{\infty} A_n Q_n^l \; , \tag{52}$$

wobei noch die Abkürzung

$$A^2 a^2 = B^2 \tag{53}$$

eingeführt wurde. Es folgt vorerst

$$-\sum_{n=l}^{\infty} n(n+2)\, A_n Q_n^l = -(\lambda + B^2 - B^2\cos^2\theta)\sum_{n=l}^{\infty} A_n Q_n^l \; ,$$

oder

$$\sum_{n=l}^{\infty}[B^2 + \lambda - n(n+2)]\, A_n Q_n^l = \sum_{n=l}^{\infty} B^2 A_n \cos^2\theta\cdot Q_n^l \; . \tag{54}$$

Nun ergibt die zweimalige Anwendung der Rekursion (46)

$$\begin{aligned}\cos^2\theta\cdot Q_n^l = {} & \frac{(n-l+1)\;(n-l+2)}{4(n+1)\;(n+2)}\, Q_{n+2}^l \\ & + \frac{n(n+2) - l(l+1)}{2n(n+2)}\, Q_n^l \\ & + \frac{(n+l+1)\;(n+l)}{4(n+1)n}\, Q_{n-2}^l \; .\end{aligned} \tag{55}$$

Diese Formel gilt für alle $l \geqslant 2$ und $n \geqslant l$, wobei zu beachten ist, daß für die genannten l die Relation

---

[6]) Vgl. *Whittaker* and *Watson*, Modern Analysis, S. 325.

$$Q^l_{l-1} = Q^l_{l-2} = 0 \tag{56}$$

besteht. Die Formel gilt aber auch für $l = 0$ und 1, wenn man für diese Fälle (56) als Definition annimmt.

Einsetzen in (54) und koeffizientenweises Annullieren ergibt schließlich die *Koeffizientenrekursion*

$$-D_n A_{n-2} + (\lambda - E_n) A_n - F_n A_{n+2} = 0 \quad . \tag{57}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} D_n &= \frac{(n-l)\,(n-l-1)}{4n(n-1)} B^2 \\ E_n &= -\frac{n(n+2)+l(l+1)}{2n(n+2)} B^2 + n(n+2) \\ F_n &= \frac{(n+l+1)\,(n+l+3)}{4(n+1)\,(n+3)} B^2 \;. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Führen wir nun noch die Abkürzungen

$$a_n = \frac{D_n}{F_n} \tag{59}$$

und

$$b_n = \frac{\lambda - E_n}{F_n} \tag{60}$$

ein, so finden wir für $n = l$

$$\frac{A_{l+2}}{A_l} = b_l \;, \tag{61}$$

für $n = l + 1$

$$\frac{A_{l+3}}{A_{l+1}} = b_{l+1} \tag{62}$$

und schließlich für $n \geqslant l + 2$

$$\frac{A_n}{A_{n-2}} = \frac{a_n}{b_n - \dfrac{A_{n+2}}{A_n}} \;. \tag{63}$$

Offenbar ergibt sich aus der Rekursion (57), daß nach Vorgabe von A_l sämtliche Koeffizienten $A_{l+2}, A_{l+4}, \ldots$, und nach Vorgabe von A_{l+1} sämtliche Koeffizienten $A_{l+3}, A_{l+5}, \ldots$ eindeutig bestimmt sind. Man erhält so aus (52) das allgemeine Integral von (51).

Unsere Eigenwertaufgabe erfordert nun, daß wir unter allen möglichen Lösungen solche herausgreifen, die im abgeschlossenen Intervall $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, oder — gemäß (29) — im abgeschlossenen Intervall

$-1 \leqslant x \leqslant 1$ *stetig* sind. Um diese Forderung auszuwerten, wollen wir annehmen, G in (52) sei eine dieser gesuchten Lösungen und schreiben sie als Potenzreihe in x:

$$G(x) = \sum_{n=l}^{\infty} A_n Q_n^l(x) = (1-x^2)^{\frac{l}{2}} H(x) \quad , \tag{64}$$

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \quad . \tag{65}$$

Nun zeigen wir, daß zufolge unserer Forderung $H(x)$ eine ganze Transzendente sein muß. Zu dem Zwecke ermitteln wir nach dem bekannten Verfahren je ein Hauptsystem für die beiden singulären Stellen $x = 1$ und $x = -1$, die für unsere Differentialgleichung Stellen der Bestimmtheit sind. Indem wir hierauf unsere Lösung $G(x)$ aus jedem dieser Hauptsysteme kombinieren, erkennen wir, daß folgende Relationen gelten müssen:

$$\left.\begin{aligned} (1-x^2)^{\frac{l}{2}} H(x) &= C_{11}(x-1)^{\frac{l}{2}} \mathfrak{P}_1(x-1) + C_{12}(x-1)^{-\frac{l+1}{2}} \mathfrak{P}_2(x-1) \;, \\ (1-x^2)^{\frac{l}{2}} H(x) &= C_{21}(x+1)^{\frac{l}{2}} \mathfrak{Q}_1(x+1) + C_{22}(x+1)^{-\frac{l+1}{2}} \mathfrak{Q}_2(x+1) \;. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Hierbei sind die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Potenzreihen der eingeklammerten Argumente mit nicht verschwindendem Anfangsglied. Damit also unsere Lösung in den Punkten $x = -1$ und $x = 1$ endlich bleibt, müssen die Konstanten C_{12} und C_{22} verschwinden. Dann aber folgt aus (66), daß $H(x)$ an beiden Stellen regulär ist. Nun aber genügt auch $H(x)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung, welche außer -1, 1 und ∞ keine Singularitäten aufweist. Also hat $H(x)$ nur den singulären Punkt ∞, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

Die genaue Begründung der nun folgenden an sich durchaus plausiblen Schlüsse erfordert vielleicht noch eingehendere Konvergenzbetrachtungen, und ich teile sie daher unter diesem Vorbehalt mit.

Da die Potenzreihe (65) beständig konvergieren soll, ist zu erwarten, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+2}}{B_n} = 0 \tag{67}$$

sein muß. Hieraus wird man gemäß (64) weiter schließen, daß auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+2}}{A_n} = 0$$

gilt. Dann aber ergibt sich aus (63) eine Kettenbruchentwicklung für $\frac{A_{l+2}}{A_l}$. Der letztere Wert ist aber schon gegeben durch (61). Somit ergibt sich die Kettenbruchgleichung

$$b_l = \cfrac{a_{l+2}}{b_{l+2} - \cfrac{a_{l+4}}{b_{l+4} - \cdots}} \; . \tag{69}$$

In analoger Weise folgt aus (63) und (62) die Kettenbruchgleichung

$$b_{l+1} = \cfrac{a_{l+3}}{b_{l+3} - \cfrac{a_{l+5}}{b_{l+5} - \cdots}} \; . \tag{70}$$

Irgend ein zulässiger Eigenwert λ muß also eine dieser beiden Gleichungen erfüllen. Ist ein λ bekannt, so ergeben sich aus (57) die zugehörigen Koeffizienten A_n bis auf einen frei wählbaren konstanten Faktor, und die Entwicklung (64) stellt die zu diesem λ gehörige Eigenlösung dar.

Wir wollen uns noch überlegen, wieviele Koeffizienten normalerweise einem bestimmten Näherungswert eines Eigenwertes λ zuzuordnen sind. Eine bestimmte Näherungsstufe für λ wird dadurch gegeben, daß man die zugehörige Kettenbruchgleichung (69) resp. (70) mit dem Zeiger n abbricht, oder — anders ausgedrückt — in der Rekursionsgleichung (63) $A_{n+2} = 0$ setzt. Dann bilden die Gleichungen (57) ein homogenes lineares System mit ebensoviel Unbekannten wie Gleichungen, das für den Fall, daß man mit dem Index l einsetzt, folgende Gestalt hat:

$$\left.\begin{array}{r} (\lambda - E_l) A_l - F_l A_{l+2} \qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \\ - D_{l+2} A_l + (\lambda - E_{l+2}) A_{l+2} - F_{l+2} A_{l+4} \qquad = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - D_{n-2} A_{n-4} + (\lambda - E_{n-2}) A_{n-2} - F_{n-2} A_n = 0 \\ - D_n A_{n-2} + (\lambda - E_n) A_n = 0 \; . \end{array}\right\} \tag{71}$$

Die zugehörige Säkulargleichung ist dabei äquivalent der Kettenbruchgleichung (69). Man wird also dem der Stufe (71) entsprechenden λ gerade auch die aus diesem System sich ergebenden A-Werte zuordnen. Entsprechendes gilt natürlich für den Anfangsindex $l + 1$ und die Gleichung (70). So betrachtet, erkennt man, daß das benutzte Verfahren im Effekt identisch ist mit dem Ritz'schen Verfahren[7] [8]).

---

[7]) *W. Ritz*, Journal f. Math. 135 (1909), S. 1—61.

[8]) *E. Kamke*, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden. Berlin 1942, S. 220.

§ 5. Entwicklung in eine Potenzreihe

Um eine solche zu erhalten, schreiben wir (51) wieder mit $x = \cos\vartheta$ als unabhängiger Variablen in der Form

$$\frac{d^2G}{dx^2} - \frac{3x}{1-x^2}\frac{dG}{dx} + \left[B^2 + \frac{\lambda}{1-x^2} - \frac{l(l+1)}{(1-x^2)^2}\right] G = 0 \; , \tag{72}$$

und machen entsprechend (64) wieder den Ansatz

$$G(x) = (1-x^2)^{\frac{l}{2}}\, H(x) \, . \tag{73}$$

Die Berechnung gestaltet sich besonders bequem, wenn man (72) vorerst einmal in der Riccati'schen Form

$$\frac{d^2 \operatorname{Lg} G}{dx^2} + \left(\frac{d \operatorname{Lg} G}{dx}\right)^2 - \frac{3x}{1-x^2}\frac{d \operatorname{Lg} G}{dx} + B^2 + \frac{\lambda}{1-x^2} - \frac{l(l+1)}{(1-x^2)^2} = 0 \tag{73}$$

schreibt. Man erhält schließlich

$$(1-x^2)\frac{d^2H}{dx^2} - (2l+3)\,x\frac{dH}{dx} + [B^2 + \lambda - l(l+2) - B^2x^2]\,H = 0 \; . \tag{74}$$

Nun setzen wir $H(x)$ gemäß (65) als Potenzreihe

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \tag{65}$$

an.

Als Eingangsgleichungen der Rekursion ergeben sich

$$[\lambda + B^2 + 1 - (l+1)^2]\, B_0 + 2B_2 = 0 \tag{75_0}$$

für $n = 0$ und

$$[\lambda + B^2 + 1 - (l+2)^2]\, B_1 + 6B_3 = 0 \tag{75_1}$$

für $n = 1$. Für $n \geqslant 2$ aber folgt die dreigliedrige Rekursion

$$-B^2B_{n-2} + [\lambda + B^2 - 1 - (l+n+1)^2]B_n + n(n+2)\,B_{n+2} = 0. \tag{75}$$

Wiederum haben wir zu verlangen, daß $H(x)$ eine ganze Transzendente sei und die weiteren Entwicklungen laufen den entsprechenden des vorausgehenden Paragraphen parallel. Wir setzen

$$\beta_n = \frac{\lambda + B^2 + 1 - (l + n + 1)^2}{(n + 1)\,(n + 2)}\,, \tag{76}$$

und

$$\alpha_n = \frac{B^2}{(n + 1)\,(n + 2)} \tag{77}$$

und erhalten die den Eingangsindizes $n = 0$ resp. $n = 1$ entsprechenden Kettenbruchgleichungen

$$\beta_0 = \cfrac{\alpha_2}{\beta_2 + \cfrac{\alpha_4}{\beta_4 + \cdots}} \tag{78}$$

und

$$\beta_1 = \cfrac{\alpha_3}{\beta_3 + \cfrac{\alpha_5}{\beta_5 + \cdots}}\,. \tag{79}$$

Sie dienen wiederum zur Bestimmung der Eigenwerte λ. Aus den Gleichungen (75_0), (75_1) und (75) erhält man dann anschließend die Koeffizienten B_n der zugehörigen Eigenlösung (65) resp. (64).

§ 6. Näherungen im Nachkegel

Aus dem Vorausgehenden ist ersichtlich, daß die Quantisierung ausschließlich auf dem Verhalten der Wellenfunktion im Bereich des Doppelkegels beruht. Um nun zu beurteilen, ob die gewonnenen Lösungen als plausible wellenmechanische Beschreibung einer Trägheitsbewegung gedeutet werden können, muß man sich einen Überblick über den Totalverlauf der Lösungen verschaffen. Das kommt natürlich darauf hinaus, das asymptotische Verhalten der Lösungen im Nachkegel (resp. Vorkegel) zu ermitteln. Falls es — wie im vorausgehenden — möglich ist, den engen Anschluß an die Theorie der Mathieu'schen Funktionen aufrecht zu erhalten, so kann man sich dabei auf Arbeiten von *Horn*, *Erdely*[9]) und *Bickley*[10]) stützen.

Um aber die charakteristische Abweichung des Zweipunktproblems vom Einpunktproblem zu erkennen, genügen schon rohere Näherungen. Wir greifen zu dem Zweck zurück auf die Gleichungen (S) und (T) von § 1 und führen zuerst vermittels

---

[9]) Math. Zeitschrift 41 (1936), 653—664, wo auch die verschiedenen einschlägigen Arbeiten von *Horn* zitiert sind.

[10]) Philos. Mag. VII. s. 30, 312—322 (1940).

$$\sigma = A x \; ; \qquad \tau = A y \tag{81}$$

eine rationelle Längeneinheit ein. Durch die weitere Festsetzung

$$y \geqslant x \geqslant 1 \tag{82}$$

können wir dann jeden Punkt des Nachkegels erfassen. An Stelle von (12) tritt

$$\left.\begin{aligned} c t &= A y x \\ \varrho &= A \sqrt{(y^2-1)(x^2-1)} \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

und die Gleichungen (S) und (T) nehmen wegen (53) und mit die Gestalt (72) an:

$$\frac{d^2 S}{dx^2} + \frac{3x}{x^2-1}\frac{dS}{dx} + \left[B^2 - \frac{\lambda}{x^2-1} - \frac{l(l+1)}{(x^2-1)^2}\right] S = 0 \;, \tag{84}$$

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{3y}{y^2-1}\frac{dT}{dy} + \left[B^2 - \frac{\lambda}{y^2-1} - \frac{l(l+1)}{(y^2-1)^2}\right] T = 0 \;. \tag{85}$$

Nun ist zu beachten, daß aus großen t-Werten zufolge (82) mit Sicherheit nur auf große t-Werte, nicht aber auf große x-Werte geschlossen werden kann. So sind ja die Punkte der Ruhachse für beliebig große t durch $x = 1$ charakterisiert. Wir brauchen also die Gleichung (84) auch für beliebig große Werte $t = T$ im ganzen Intervall

$$1 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{cT}{A}} \;, \tag{86}$$

während y entsprechend der Ungleichung

$$\sqrt{\frac{cT}{A}} \leqslant y \leqslant \frac{cT}{A} \tag{87}$$

anwächst.

Wir ersetzen nun die Gleichung (85) approximativ durch eine andere, indem wir den Koeffizienten von $\frac{dT}{dy}$ bis zur ersten Näherung und den Koeffizienten von T bis zur zweiten Näherung nach $\frac{1}{y}$ entwickeln. Es folgt

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{3}{y}\frac{dT}{dy} + \left(B^2 - \frac{\lambda}{y^2}\right) T = 0 \;. \tag{88}$$

Die Lösung dieser Gleichung mit Hilfe Bessel'scher Funktionen lautet

$$T = \frac{C_1 J_p(By) + C_2 J_{-p}(By)}{y}, \tag{89}$$

wobei der Index p durch

$$p = \sqrt{\lambda + 1} \tag{90}$$

gegeben ist. Für große By gilt also näherungsweise

$$T = \frac{C \cos (By - \gamma)}{y \sqrt{\frac{\pi B y}{2}}} . \tag{91}$$

Eine entsprechende Formel

$$S = \frac{C \cos (Bx - \gamma)}{x \sqrt{\frac{\pi B x}{2}}} \tag{92}$$

gilt nur für x-Werte oberhalb einer genügend großen Schranke x_0, und zwar dürfen wir hier zufolge der Quantenbedingung (24) genau dieselbe Formel verwenden.

Nun können wir zeigen, daß die in der Einleitung in Betracht gezogenen Wahrscheinlichkeitsintegrale vom Typus (6) auch beim Grenzübergang zu beliebig großen Zeiten ausnahmslos konvergieren. Zu diesem Zwecke berechnen wir vorerst einmal die mittlere Anzahl derjenigen Weltstellen, welche von unserem Teilchen zur Zeit $t = T$ pro Sekunde eingenommen werden unter der Nebenbedingung, daß ihr räumlicher Abstand ϱ von der Ruhachse zwischen 0 und einer festen Schranke ϱ_0 liegt. Diese Zahl ist gegeben durch

$$\nu(T, \varrho_0) = \int_0^{\varrho_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} u^2 \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi . \tag{93}$$

Entsprechend dem Separationsansatz (16) und nach Vornahme der für die Winkelvariablen üblichen Normierung wird daraus

$$\nu(T, \varrho_0) = \int_0^{\varrho_0} T^2 S^2 \varrho^2 \, d\varrho . \tag{94}$$

Nun setzen wir in (83) $t = T$ und wählen entsprechend dieser Transformation statt ϱ die Größe x als unabhängige Variable, wobei der ϱ_0 zugeordnete x-Wert x_0 heißen möge. Lassen wir nun in dem so transformierten Integral T gegen ∞ gehen, so erhalten wir mit Rücksicht auf (91) und (53) nach einiger Rechnung eine Zahl

$$\bar{\nu}(x_0) = \frac{A^2 C^2}{\pi a} \int_1^{x_0} S^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\, dx \,. \tag{95}$$

Dieselbe stellt die mittlere Anzahl der im Koordinatenintervall $1 \leqslant x \leqslant x_0$ von unserem Teilchen asymptotisch für große Zeiten pro Sekunde eingenommenen Weltstellen dar. Diese Zahl kann folgendermaßen anschaulich interpretiert werden. Setzt man in (83) $t = T$, so folgt

$$\frac{\varrho}{c T} = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \,.$$

Hält man hier x fest, so gehen beim Grenzübergang $T \to \infty$ gleichzeitig auch y und ϱ nach ∞ und es folgt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\varrho}{c T} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \,.$$

Die linke Seite stellt offenbar eine Geschwindigkeitsabweichung von der Ruhachse dar und wir definieren demgemäß eine Geschwindigkeit v durch

$$v = c \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \,. \tag{96}$$

Nun können wir sagen: die Zahl $\bar{\nu}(x_0)$ stellt asymptotisch für große Zeiten die mittlere Anzahl derjenigen von unserem Teilchen pro Sekunde eingenommenen Weltstellen dar, deren Geschwindigkeitsabweichung von der Ruhachse im Intervall

$$0 \leqslant v \leqslant c \frac{\sqrt{x_0^2-1}}{x_0} \tag{97}$$

liegt.

Auf Grund von (92) erkennt man weiter ohne Schwierigkeit, daß das Integral (95) auch beim Grenzübergang $x_0 \to \infty$ konvergiert. Man erhält so den Grenzwert (7) der Einleitung

$$\nu^* = \frac{A^2 C^2}{\pi a} \int_1^{\infty} S^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx \,. \tag{98}$$

Die mittlere Anzahl der pro Sekunde überhaupt eingenommenen Weltstellen besitzt also für $T \to \infty$ einen festen Grenzwert. In diesem Sinne können wir sagen, das Teilchen bleibe erhalten.

Wir verwenden nun die gewonnene Näherung, um das asymptotische Verhalten der *Frequenz* der Wellenfunktion für große Zeiten festzustellen.

1. Fall: Wir betrachten eine *feste Raumstelle*

$$\varrho = \varrho_0 \quad , \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad , \quad \varphi = \varphi_0$$

im Laufe wachsender Zeiten t. Wie man leicht unter Beachtung von (53), (83) und (91) feststellt, gilt asymptotisch für große Zeiten

$$u \sim \frac{A\,C \cos\,(a\,c\,t - \gamma)}{c\,t \sqrt{\frac{\pi\,a\,c\,t}{2}}}\, S(0)\, P(\cos\vartheta_0)\, \Phi(\varphi_0)$$

oder

$$u \sim \text{konst.}\, \frac{\cos\,(a\,c\,t - \gamma)}{c\,t\sqrt{c\,t}} \quad . \tag{99}$$

Es handelt sich also um eine stehende Welle mit langsam abklingender Amplitude von der Frequenz

$$\nu_0 = \frac{a\,c}{2\pi} = \frac{m_0\,c^2}{h} \quad . \tag{100}$$

Ein irgendwo an einer festen Stelle im Raum ruhender Beobachter stellt also das Vorhandensein der de Broglie'schen Ruhfrequenz fest.

Für einen Beobachter, der nach genügend langer Zeit sich an derselben Raumstelle mit der Geschwindigkeit V relativ zu unserem System bewegt, ergibt sich in bekannter Weise eine ebene Welle, deren Frequenz und Wellenlänge gegeben sind durch

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad \lambda = \frac{c^2}{\nu\,V} \quad . \tag{101}$$

2. Fall: Wir betrachten die Weltstellen

$$x = x_0 \quad , \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad , \quad \varphi = \varphi_0 \quad , \quad t \gg 1 \; .$$

Sie bilden eine Weltlinie, die asymptotisch eine Geschwindigkeit

$$v = c\,\frac{\sqrt{x_0^2 - 1}}{x_0} \tag{102}$$

relativ zu unserem Ruhsystem repräsentiert. Eine ähnliche Rechnung wie oben ergibt mit Rücksicht auf (83) asymptotisch für große t

$$u \sim \text{konst.}\, \frac{\cos\left[a\sqrt{c^2 t^2 - \varrho^2} - \gamma\right]}{c\,t\sqrt{c\,t}} \quad . \tag{103}$$

Diese Raumzeitfunktion stellt in der näheren Umgebung der Weltstelle

$$t = t_0 \gg 1 \quad , \quad \varrho = \varrho_0 = v c t_0 \quad , \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad , \quad \varphi = \varphi_0$$

eine fortschreitende ebene Welle dar. Setzt man $t = t_0 + \Delta t$ und $\varrho = \varrho_0 + \Delta \varrho$, so findet man durch Entwicklung der Wellenphase gemäß

$$a \sqrt{c^2 t^2 - \varrho^2} = a \sqrt{c^2 t_0^2 - \varrho_0^2} + 2\pi\nu \Delta t - \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \varrho + \cdots$$

für die Frequenz ν und die Wellenlänge λ die Werte

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad \lambda = \frac{c^2}{\nu v} \, . \tag{104}$$

Es resultieren also dieselben Formeln wie in (101). Hier aber bedeutet v die zufällige Geschwindigkeit, mit der das Teilchen von der ursprünglich innegehaltenen Ruhrichtung abgewichen ist. (104) zeigt, daß nach unserem Modell ein ruhendes Teilchen jederzeit sprunghaft eine Geschwindigkeit annehmen kann, die beliebig nahe an die Lichtgeschwindigkeit c herankommt. Doch sind diese hohen Geschwindigkeiten entsprechend selten, denn als Mittelwert der Frequenz für große t hat man zu setzen

$$\bar{\nu} = \frac{\int\limits_1^\infty S^2 \nu \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx}{\int\limits_1^\infty S^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx} \, . \tag{105}$$

Wegen (96) und (104) ergibt sich daraus der Wert

$$\bar{\nu} = \nu_0 \frac{\int\limits_1^\infty S^2 \sqrt{x^2 - 1} \, dx}{\int\limits_1^\infty S^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx} \tag{106}$$

welcher zufolge (92) endlich ist.

Die eben geschilderten allen Lösungen gemeinsamen Züge bedeuten, daß jede einzelne Lösung eine virtuelle Streuung des einzelnen Teilchens darstellt. Dabei sind als Frequenz und Wellenlänge gerade diejenigen Werte zu erwarten, welche nach de Broglie der ausgewählten Geschwindigkeitsabweichung entsprechen. Die genauere individuelle Struktur der einzelnen Streuung hängt natürlich von der zugrunde gelegten Konfiguration — der Grunddistanz A — und dem Zustand — dem in Betracht gezogenen Eigenwert λ — ab. Die Ermittlung dieser Struktur erfordert offenbar die numerische Auswertung der Lösungsfunktionen $S(x)$ resp. $T(y)$ der Differentialgleichungen (84) und (85), oder — entsprechend der in § 1 gewählten Bezeichnung — der Lösungen $S(\sigma)$ und $T(\tau)$ der Gleichungen (S) und (T) daselbst. Die Inangriffnahme dieser Aufgabe muß ich einer besonderen Untersuchung vorbehalten.

Der Parameter A oder — im Sinne von (53) von § 4 — der Parameter $B = Aa$ wird also eine maßgebende Rolle spielen. Als Normalfall wird man etwa $B = 1$ oder $B = \frac{1}{2}$ betrachten. Weiter ist zu erwarten, daß $0 < B \ll 1$ in die Nähe des Einpunktproblems (starke Streuung) führt. Umgekehrt ist zu vermuten, daß für $B \gg 1$ eine Annäherung an die Trägheitsbewegung eines klassischen Korpuskels (Konzentration auf die Ruhachse) bewirken wird. Eine erste Bestätigung für diese Vermutungen werden wir im nächsten Paragraphen bei der Behandlung der *Grenzfälle* $B = 0$ und $B = \infty$ finden.

§ 7. Grenzfälle

I. $A \to 0$.

Wir behalten das ursprüngliche in § 1 zugrunde gelegte Koordinatensystem bei. Der Effekt wird also darin bestehen, daß die „Gewißheitsstellen" Q_1 und Q_2 in den Nullpunkt zusammenrücken. Sinngemäß betrachten wir eine feste Stelle (ct, ϱ) — die übrigen Winkelkoordinaten spielen keine Rolle — im Nachkegel von Q_2 und verwenden daher statt (12) die Formeln

$$\left.\begin{aligned} ct &= \frac{\tau\sigma}{A} \\ \varrho &= \frac{\sqrt{(\tau^2 - A^2)(\sigma^2 - A^2)}}{A} \end{aligned}\right\}, \tag{107}$$

wobei die Verabredung

$$\tau > \sigma > 0 \tag{108}$$

gelten soll. Man stellt nun leicht fest, daß σ mit A gegen Null geht und somit als Koordinate unbrauchbar wird. Wir setzen daher

$$\sigma = A \operatorname{Cos} \alpha\,. \tag{109}$$

Weiter ersetzen wir die festen Werte ct und ϱ durch die ebenfalls festen Werte r, θ gemäß den Formeln

$$\left.\begin{aligned} ct &= r \operatorname{Cos} \theta \\ \varrho &= r \operatorname{Sin} \theta \end{aligned}\right\} . \tag{110}$$

Indem wir nun (109) und (110) in (107) einführen, erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} r \operatorname{Cos} \theta &= \tau \operatorname{Cos} \alpha \\ r \operatorname{Sin} \theta &= \sqrt{\tau^2 - A^2} \operatorname{Sin} \alpha \end{aligned}\right\} . \tag{111}$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun leicht

$$\left.\begin{aligned} \lim_{A \to 0} \tau &= r \\ \lim_{A \to 0} \alpha &= \theta \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Die zugehörigen Differentialgleichungen ergeben sich, indem man für τ die entsprechend den Verhältnissen im Nachkegel modifizierte Gleichung (T) von § 1 und für α die analog modifizierte Gleichung [S] von § 2 zugrunde legt:

$$\frac{1}{\sqrt{\tau^2 - A^2}} \frac{d}{d\tau}\left[(\sqrt{\tau^2 - A^2})^3 \frac{dT}{d\tau}\right] + \left[a^2(\tau^2 - A^2) + E - \frac{l(l+1)A^2}{\tau^2 - A^2}\right] T = 0 , \tag{113}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \alpha} \frac{d}{d\alpha}\left(\operatorname{Sin}^2 \alpha \frac{dS}{d\alpha}\right) + \left[A^2 a^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha + E - \frac{l(l+1)}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}\right] S = 0 . \tag{114}$$

Führen wir noch an Stelle von T und S die Zeichen R und G ein, so liefert der gemäß (112) durchzuführende Grenzübergang $A \to 0$ die Gleichungen

$$\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr}\left(r^3 \frac{dR}{dr}\right) + \left(a^2 + \frac{E}{r^2}\right) R = 0 , \tag{115}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \theta} \frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{Sin}^2 \theta \frac{dG}{d\theta}\right) + \left[E - \frac{l(l+1)}{\operatorname{Sin}^2 \theta}\right] G = 0 . \tag{116}$$

Das sind genau die Gleichungen (R) und (G) des Einpunktproblems in § 1 von Teil II.

Offenbar ist es unmöglich, diesen Grenzübergang im Innern des Doppelkegels durchzuführen. Hingegen bleibt die Gleichung [S] von § 2 beim Grenzübergang sinnvoll. Es ergibt sich — worauf wir schon zu Beginn von § 3 hinwiesen — die Gleichung

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin^2 \theta \frac{dG}{d\theta}\right) - \left[E - \frac{l(l+1)}{\sin^2 \theta}\right] G = 0 . \tag{117}$$

die also aus (116) vermittels $\theta \to i\theta$ entsteht. Gemäß (28) von § 3 wissen wir nun, daß die Eigenwerte von (117) durch

$$\lambda = -E = n(n+2) \text{ *)} \tag{118}$$

gegeben sind. Wenn man also das Einpunktproblem als Grenzfall des Zweipunktproblems auffaßt, so erweist sich das in Teil II nach einem ganz anderen Gesichtspunkt behandelte „Geschwindigkeitsspektrum" als diskret.

Die Lösungen von (115) und (116) lauten mit Rücksicht auf (118)

$$R = \frac{J_{n+1}(a\,r)}{r}\,, \tag{119}$$

$$G = (\mathfrak{Sin}\,\theta)^l \left(\frac{d}{\mathfrak{Sin}\,\theta\, d\theta}\right)^l \frac{\mathfrak{Sin}\,(n+1)\,\theta}{\mathfrak{Sin}\,\theta}\,. \tag{120}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $R^2\, G^2$ ist im abgeschlossenen Nachkegel eindeutig und stetig, beschränkt dagegen nur für $n = l = 0$. Diese eine Lösung ist aber nicht im Sinne der Relationen (6) und (7) der Einleitung normierbar, wie schon daselbst erwähnt wurde. Im Gegensatz dazu sind, wie wir in § 6 gesehen haben, sämtliche Lösungen des Zweipunktproblems beschränkt und normierbar. Der Vergleich zeigt, daß das Einpunktproblem eine wesentliche Entartung des Zweipunktproblems darstellt.

II. $A \to \infty$ unter Festhaltung des Ursprungs.

Der feste Punkt (ct, ϱ) liegt jetzt natürlich im Innern des Doppelkegels. Dementsprechend haben wir wieder (12) zu verwenden

$$\left.\begin{aligned} ct &= \frac{\tau\sigma}{A} \\ \varrho &= \frac{\sqrt{(A^2-\tau^2)\ (A^2-\sigma^2)}}{A} \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Trifft man wieder die Verabredung (108), so muß τ mit A gegen ∞ gehen. Wir setzen daher

$$\sqrt{A^2-\tau^2} = r \tag{121}$$

und erhalten wegen (12)

$$\left.\begin{aligned} \lim_{A\to\infty} r &= \varrho \\ \lim_{A\to\infty} \sigma &= ct \end{aligned}\right\}. \tag{122}$$

*) Wie ich aus einem Referat im *Zentralblatt für Mathematik 27, 2 u. 6 (1943)* entnehme, haben *Born* und *Fuchs* in den *Proc. roy. Soc. Edinburgh 60, 100—116 (1940)* anläßlich einer ebenfalls vierdimensional zentralsymmetrischen Behandlung der kräftefreien Wellengleichung (3) dieselben Eigenwerte ermittelt. Doch ist die von diesen Autoren getroffene Auswahl der Eigenlösungen wesentlich verschieden von der unseren.

Der Grenzübergang ist durchzuführen an den Gleichungen (S) und (T) von § 1, wobei die letztere zuerst gemäß (121) transformiert werden muß in

$$\frac{\sqrt{A^2-r^2}}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\sqrt{A^2-r^2}\frac{dT}{dr}\right]+\left[a^2 r^2-E-\frac{l(l+1)A^2}{r^2}\right]T=0 \ . \qquad (123)$$

Dividieren wir die genannten Gleichungen durch A^2 und führen wir hierauf den Grenzübertritt $A \to \infty$ unter Beachtung von (122) durch, so erhalten wir, wenn wir zuletzt die Zeichen T und S durch R und T ersetzen:

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}+(a^2+E)\,T=0 \ , \qquad (124)$$

$$\frac{1}{\varrho^2}\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2\frac{dR}{d\varrho}\right)+\left[E-\frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right]R=0 \ . \qquad (125)$$

Hierbei haben wir an Stelle von $\lim\limits_{A\to\infty}\left(-\frac{E}{A^2}\right)$ nicht etwa Null, sondern einen endlichen Eigenwert E gesetzt. Das ist notwendig, denn wenn man den Grenzübergang direkt am Operator (15) in § 1 durchführt und nachher separiert, stellen sich die Eigenwertkonstanten von selbst ein. Wir machen hier die Grenzübergänge nur der Kürze halber an den schon separierten Gleichungen.

Die einzige eindeutige, stetige und beschränkte Lösung ergibt sich bekanntlich für $E = l = 0$ zu

$$T = \text{konst.}\sin(act-\gamma)\ , \qquad R = \text{konst.} \qquad (126)$$

Es handelt sich also um die klassische de Broglie'sche Welle eines ruhenden Teilchens. Dabei zeigt die Herleitung, daß diese Lösung für $\varrho = \infty$ und $t = \pm\infty$ sinngemäß nicht mehr als zuständig betrachtet werden kann.

III. $A \to \infty$ unter Festhaltung einer Gewißheitsstelle.

Wir wählen die Stelle Q_2:

$$Q_2 \sim (ct, x_1, x_2, x_3) = (A, 0, 0, 0) \ . \qquad (10_2)$$

Da also Q_2 festbleiben soll, führen wir zuerst eine Koordinatenverschiebung durch:

$$\overline{ct} = ct - A$$
$$\bar{\varrho} = \varrho \ .$$

Da wir die Verhältnisse im Nachkegel von Q_2 studieren wollen, haben wir wiederum (107) zu verwenden:

$$\left.\begin{aligned} ct &= \frac{\tau\sigma}{A} \\ \varrho &= \frac{\sqrt{(\tau^2 - A^2)(\sigma^2 - A^2)}}{A} \;. \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

Schließlich führen wir noch durch

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \sqrt{A^2 + A\bar{\tau}^2} \\ \sigma &= \sqrt{A^2 + A\bar{\sigma}^2} \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

neue krummlinige Koordinaten ein, die auch noch nach vollzogenem Grenzübergang $A \to \infty$ brauchbar sind. Es folgt

$$\begin{aligned} c\bar{t} &= A\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{\bar{\tau}^2}{A}\right)\left(1 + \frac{\bar{\sigma}^2}{A}\right)} - 1\right\} \\ \bar{\varrho} &= \bar{\tau}\,\bar{\sigma} \;. \end{aligned}$$

Nach dem Grenzübergang gilt daher

$$\left.\begin{aligned} c\bar{t} &= \tfrac{1}{2}(\bar{\tau}^2 + \bar{\sigma}^2) \\ \bar{\varrho} &= \bar{\tau}\bar{\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

Die den Variablen $\bar{\tau}$ und $\bar{\sigma}$ entsprechenden Differentialgleichungen erhalten wir, wenn wir in (113) und der äquivalenten Gleichung in σ die Substitution (128) machen und hernach zur Grenze $A \to \infty$ übergehen.

Läßt man zum Schluß alle Querstriche fallen, so ergeben sich — jetzt mit Bezugnahme auf Q_2 als neuen Nullpunkt — folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} ct &= \tfrac{1}{2}(\tau^2 + \sigma^2) \\ \varrho &= \tau\sigma \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

$$\frac{1}{\tau^2}\frac{d}{d\tau}\left(\tau^2 \frac{dT}{d\tau}\right) + \left[a^2\tau^2 + E - \frac{l(l+1)}{\tau^2}\right] T = 0 \;, \tag{131}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\frac{d}{d\sigma}\left(\sigma^2 \frac{dS}{d\sigma}\right) + \left[a^2\sigma^2 + E - \frac{l(l+1)}{\sigma^2}\right] S = 0 \;. \tag{132}$$

Um einen Vergleich mit bekannten Differentialgleichungen durchzuführen, führen wir an Stelle der Variablen τ und σ die Längen y und x gemäß

$$\left.\begin{aligned} y &= \tau^2 \\ x &= \sigma^2 \end{aligned}\right\} \tag{133}$$

ein. (131) und (132) gehen dann über in

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{3}{2y}\frac{dT}{dy} + \left[\frac{a^2}{4} + \frac{E}{4y} - \frac{l(l+1)}{4y^2}\right] T = 0 \tag{134}$$

und

$$\frac{d^2 S}{dx^2} + \frac{3}{2x}\frac{dS}{dx} + \left[\frac{a^2}{4} + \frac{E}{4x} - \frac{l(l+1)}{4x^2}\right] S = 0 \ , \tag{135}$$

mit

$$ct = \tfrac{1}{2}(y + x) \text{ und } \varrho = \sqrt{yx} \ . \tag{136}$$

Die gefundenen Gleichungen sind offenbar nahe verwandt mit der Schrödinger'schen Gleichung im Falle positiver Energie und bezogen auf parabolische Koordinaten. Doch spielen sie hier eine wesentlich andere Rolle, wie man schon daraus ersieht, daß der Eigenwertparameter E an der Stelle auftritt, wo üblicherweise die Ladung steht.

Die Behandlung nach wohlbekannten Methoden liefert für die bei $x = 0$ reguläre Lösung von (135)

$$S = C e^{\frac{aix}{2}} x^{\frac{l}{2}} \int_0^1 [\zeta(1-\zeta)]^{\frac{2l-1}{4}} \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{-\frac{Ei}{4a}} e^{-aix\zeta}\, d\zeta \ . \tag{137}$$

Zwecks asymptotischer Entwicklung für große x liefert eine geeignete Verlagerung des Integrationsweges in Verbindung mit einer passenden Substitution

$$S = \Re \left\{ C x^{\frac{l}{2}} e^{\frac{ajx}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{2l-1}{4} - \frac{Ei}{4a}} \left(1 + \frac{it}{a}\right)^{\frac{2l-1}{4} + \frac{Ei}{4a}} e^{-xt}\, dt \right\} . \tag{138}$$

Hieraus folgt asymptotisch in nullter Näherung

$$S \sim \Re \left\{ C e^{\frac{aix}{2}} x^{-\frac{3}{4} + \frac{Ei}{4a}} \right\} \tag{139}$$

oder also reell

$$S \sim C x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{ax}{2} + \frac{E}{4a} \operatorname{Lg} x - \gamma\right) . \tag{140}$$

In diesen Formeln bedeutet natürlich C nicht immer dieselbe Konstante.

Für T wählen wir angesichts der Quantenbedingung (24) von § 2 genau dieselbe Lösung:

$$T \sim C\, y^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{ax}{2} + \frac{E}{4a} \operatorname{Lg} x - \gamma\right) . \tag{141}$$

Nun berechnen wir im Sinne des Integrals (6) der Einleitung wieder die Eintreffwahrscheinlichkeit pro Sekunde für einen Querschnitt $t = t_0$ im Falle großer t_0. Es genügt sich dabei auf den Fall $E = 0$ zu beschränken.

Die Zahl der „Wirkungen", die im Mittel pro Sekunde im Koordinatenintervall

$$\varepsilon c t_0 \leqslant \varrho \leqslant c t_0$$

zur Zeit $t = t_0$ auftreten, wird asymptotisch für große t_0 gegeben durch

$$\begin{aligned}
\nu(\varepsilon, t_0) &= \iiint\limits_{\substack{t = t_0 \\ \varepsilon c t_0 \leq \varrho \leq c t_0}} u^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \\
&= \int\limits_{\varepsilon c t_0}^{c t_0} T^2 S^2 \varrho^2\, d\varrho \\
&\sim \int\limits_{\varepsilon c t_0}^{c t_0} \frac{C^4}{(\sqrt{y x})^3}\, \varrho^2\, d\varrho \; .
\end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (136) folgt somit

$$\nu(\varepsilon, t_0) \sim C^4 \operatorname{Lg}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) . \tag{142}$$

Unser Integral divergiert für $\varepsilon = 0$, d. h. also bei der Ruhachse. Wir können daher das Ergebnis folgendermaßen formulieren:

Die relative Wahrscheinlichkeit, zur Zeit $t = t_0$ ein Teilchen anzutreffen, dessen Geschwindigkeitsabweichung von der Ruhachse von Null verschieden ist, nähert sich mit wachsendem t_0 der Null.

Eine vollkommen analoge Rechnung im Anschluß an die Lösung (9) der Einleitung ergibt dagegen für das *Einpunktproblem* folgendes Resultat:

Die relative Wahrscheinlichkeit, zur Zeit $t = t_0$ ein Teilchen anzutreffen, dessen Geschwindigkeitsabweichung von der Ruhachse kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit, nähert sich mit wachsendem t_0 der Null.

Der Grenzfall III ist also das genaue Gegenstück zum Grenzfall I, dem Einpunktproblem. Er stellt gewissermaßen den klassischen Korpuskel dar, der nirgends von der geraden Trägheitsbahn abweicht. Doch scheinen alle Grenzfälle wesentliche Entartungen des Normalfalles zu bilden.

Schlußbemerkungen

Zusammenfassend ist also festzustellen, daß das *Zweipunktproblem* Lösungen liefert, die im *abgeschlossenen* Definitionsbereich eindeutig, stetig und endlich sind und überdies im Sinne der Gleichung (7) der Einleitung asymptotisch eine bestimmte Eintreffwahrscheinlichkeit pro Sekunde ergeben. Außerdem besteht die Möglichkeit, eine absolute Normierung vorzunehmen, indem man das Integral (5) der Einleitung auf den Doppelkegel bezieht.

Diese Lösungen besitzen damit alle Eigenschaften, welche *notwendig* sind, um das in Teil II formulierte einfachste relativistisch invariante Mehrteilchenproblem

$$\Box\, u_k = -\,a^2 u_k + \varepsilon \sum_{l=1}^{n}{}^{(k)} \Box\, u_l\,; \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{143}$$

in Angriff zu nehmen zu können, wobei also $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die den einzelnen Teilchen zuzuordnenden Wellenfunktionen bedeuten.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß es im Anschluß an die zugrunde gelegte kräftefreie Wellengleichung (3)

$$\Box\, u = -\,a^2 u \tag{3}$$

möglich ist, einen exakten differentiellen Erhaltungssatz zu formulieren. Definieren wir nämlich unter Verwendung der Abkürzung

$$(\mathrm{Grad}\ u)^2 \equiv \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 \tag{144}$$

den „Energie-Impuls-Tensor"

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= K\left\{\tfrac{1}{2}\left[a^2 u^2 - (\mathrm{Grad}\ u)^2\right] + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} \\ T^{k0} &= \qquad\qquad -\frac{K}{c}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x_k} \\ T^{kl} &= K\left\{-\tfrac{1}{2}\left[a^2 u^2 - (\mathrm{Grad}\ u)^2\right]\delta^{kl} + \frac{\partial u}{\partial x_k}\,\frac{\partial u}{\partial x_l}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

$$(k, l = 1,\ 2,\ 3)$$

so gilt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0l}}{\partial x_l}=0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial T^{k0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{kl}}{\partial x_l}=0 \end{aligned}\right\} . \tag{146}$$

Dabei ist K eine passend zu dimensionierende Konstante. Ein entsprechender Satz läßt sich auch für das System (143) formulieren.

(Eingegangen den 30. März 1943.)