Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Über symmetrische analytische Funktionen.

Autor: Speiser, Andreas

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15552

Über symmetrische analytische Funktionen

Von ANDREAS SPEISER, Zürich

Dem Meister der konformen Abbildung, Constantin Carathéodory, möchte ich zur Feier des siebzigsten Geburtstages diese Arbeit widmen, welche sich mit den zahlen- und gruppentheoretischen Eigenschaften der elliptischen Funktionen befaßt, einem Gebiet, das noch lange nicht erschöpft ist und zweifellos noch tiefe Geheimnisse enthält.

1. Konstruktion der elliptischen Integrale

Wir gehen im folgenden von dem Theorem aus, daß jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche von elliptischem, parabolischem oder hyperbolischem Typus ist, d. h. entweder auf die Kugelfläche oder auf die Euklidische Ebene oder auf das Innere des Einheitskreises konform abgebildet werden kann. Die drei Fälle unterscheiden sich vor allem durch die Gruppe der konformen Selbstabbildungen. Nun konstruieren wir eine unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche, welche eine Gruppe von Selbstabbildungen gestattet. Aus ihrer Struktur kann man schließen, ob der parabolische oder der hyperbolische Fall vorliegt, und man gelangt so tief ins Wesen der zugehörigen Funktionen unmittelbar hinein.

Als erstes Beispiel wählen wir die logarithmische Fläche, welche bei 0 und ∞ je einen Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung enthält. Sie gestattet eine zweifach kontinuierliche Schar von Abbildungen auf sich selbst, welche eine Abelsche Gruppe bilden: Drehungen um den Nullpunkt von beliebigem Winkel und Dehnungen vom Nullpunkt aus. Die Automorphismen der hyperbolischen Ebene besitzen keine solche Untergruppe, daher liegt der parabolische Fall vor und die Automorphismen, welche ja keinen Punkt invariant lassen, müssen Translationen sein, deren Richtungen aufeinander senkrecht stehen. So erhält man die komplexe Logarithmusfunktion.

Als zweites Beispiel nehmen wir die elliptischen Integrale. In der w-Ebene seien vier Punkte A, B, C, D gegeben, ferner seien von einem beliebig wählbaren fünften Punkte P aus Linien nach den vier Punkten gezogen, welche sich nirgends schneiden. Längs dieser vier Linien sei das Blatt aufgeschnitten. Nun nehmen wir ein zweites kongruentes Exemplar und heften es längs PA mit dem ersten kreuzweise zusammen, so daß bei A ein Verzweigungspunkt erster Ordnung entsteht. An dieses zweite Exemplar heften wir längs PB ein drittes an, an dieses dritte längs PC

ein viertes und dieses vierte heften wir schließlich längs PD wieder an das erste. An die übrig bleibenden Schnitte heften wir in der nämlichen Weise neue Exemplare an, so daß der Umlauf um P stets ins Ausgangsexemplar zurückführt und P nur scheinbar singulär ist. Die so entstehende Riemannsche Fläche ist einfach zusammenhängend. Denn wir können jedes Exemplar als Quadrat deuten, indem wir den Weg von P nach A auf dem einen Ufer des Schnittes und von A nach P auf dem andern Ufer als Seite des Quadrates annehmen, hierauf den Weg PBP als nächste Seite usw. Die Verheftung der Blätter ist dann identisch mit der Pflasterung der Ebene mit Quadraten, woraus sich der einfache Zusammenhang der Fläche ergibt.

Die Fläche ist symmetrisch in sich, denn jedes Blatt derselben ist von der ganzen Fläche gleich umgeben. Man kann eine kongruente Abbildung herstellen, indem man irgendein Blatt auf ein anderes kongruent abbildet und diese Abbildung auf die ganze Fläche nach dem Prinzip der gleichen Umgebung überträgt. Wir haben nun die Gruppe dieser Automorphismen zu bestimmen. Umläuft man den Punkt A einmal, so geht jedes Blatt in ein benachbartes über. Diese Operation bezeichnen wir wieder mit A; sie ist offenbar eine Involution. So erhalten wir vier erzeugende Operationen A, B, C, D, deren Quadrate jeweils die Identität bilden. Außerdem besteht nur noch folgende Relation: $ABCD = 1$. Umläuft man alle vier Punkte, oder was dasselbe bedeutet, umläuft man bloß den Punkt P, so kommt man ins Anfangsexemplar zurück. Daraus ergibt sich $D = ABC$ und ferner, daß ABC eine Involution ist. Alle sechs Produkte, die man durch Vertauschung der drei Buchstaben erhält, bilden auch eine Involution, denn BCA entsteht aus ABC durch Transformation mit A, ist also wieder eine Involution, ferner ist CBA als inverses von ABC ebenfalls eine Involution. Man kann die Gruppe vollständig bestimmen, wenn man bedenkt, daß diejenigen Operationen, welche eine gerade Anzahl von Buchstaben A, B, C enthalten, einen Normalteiler vom Index 2 bilden, der durch folgende beiden Operationen erzeugt werden kann: AB und AC. So ist z. B. $BCBC = (AB)^{-1} AC$ $(AB)^{-1} AC$. Nun sind aber diese beiden Operationen miteinander vertauschbar. Es ist nämlich

$$AB \cdot AC = A \cdot BAC = A \cdot CAB = AC \cdot AB\,,$$

weil CAB invers zu BAC ist und letzteres ein Element der Ordnung 2, daher mit seinem inversen identisch ist.

Zwischen den beiden Elementen AB und AC besteht keine weitere

Relation mehr, sie erzeugen eine unendliche freie Abelsche Gruppe. Die Automorphismen der hyperbolischen Ebene besitzen keine Abelsche Untergruppe mit zwei Erzeugenden, die diskontinuierlich ist, denn vertauschbare Elemente derselben gehören stets einer und derselben einparametrigen kontinuierlichen Schar an. Nimmt man zwei derselben heraus, so können sie allerdings unabhängig sein, aber es läßt sich alsdann eine Bewegung aus ihnen zusammensetzen, welche beliebig nahe bei der identischen ist. Dies ist aber bei den Abbildungen der Riemannschen Fläche, welche ja stets ganze Blätter kongruent in verschiedene überführen, sicher nicht der Fall. So ergibt sich, daß unsere Riemannsche Fläche zum parabolischen Fall gehört.

Die einzelnen Blätter gehen nun in Euklidische Vierecke über. Die Operation A muß eine Abbildung der Euklidischen Ebene auf sich selber liefern, welche eine Involution ist und einen Fixpunkt besitzt, nämlich den dem Punkte A entsprechenden Punkt derselben. Eine solche Abbildung kann nur eine Drehung um 180° sein, mit dem eben angegebenen Fixpunkt, denn die parabolische Ebene besitzt sonst keine Involution mehr. Man erhält also das Bild des längs PA mit dem ersten zusammengehefteten Blattes, indem man das Viereck um den Bildpunkt von A, der auf einer seiner Seiten liegt, um 180° dreht. Es ergibt sich daraus, daß die vier Seiten unseres Vierecks Kurven mit Mittelpunkt sein müssen, und daß man die ganze Euklidische Ebene pflastern kann, indem man das Viereck um die Mittelpunkte der Seiten dreht und so ins Unendliche fortfährt. Diejenigen Operationen, welche aus einer geraden Anzahl solcher Drehungen entstehen, sind einfache Translationen. Die Funktion, welche die Euklidische Ebene auf die Riemannsche Fläche abbildet, ist daher doppelt periodisch, die Umkehrfunktion nimmt auf den verschiedenen Blättern nur Werte an, die sich durch das Vorzeichen oder durch additive Perioden unterscheiden, ihre Ableitung ist über der w-Ebene zweiwertig.

Auf diesem Wege gelangt man zu den elliptischen Integralen erster Gattung, und das Umkehrproblem ist in seinem schwierigeren Teil gelöst, denn die Punkte A, B, C, D sind ja beliebig wählbar. Daß man damit alle doppeltperiodischen Funktionen erhält, kann nun durch die Eisensteinschen Reihen bewiesen werden.

Bemerkenswert ist der Satz, daß man mit einem beliebigen Viereck, dessen Seiten Mittelpunkte haben, die Ebene pflastern kann. Man überzeugt sich leicht, daß bei den Drehungen um die Seitenmittelpunkte sich die vier Winkel, deren Summe ja 360° ist, um jede Ecke herumlegen, wodurch die Schließung der Figur bewirkt wird.

2. Der hyperelliptische Fall

Wir wollen nun in ähnlicher Weise von einem Blatt ausgehen, das sechs Punkte A, B, C, D, E, F als Windungspunkte erster Ordnung ergibt. Wir denken es wieder von einem beliebigen Punkte P aus nach den sechs Punkten aufgeschnitten und heften wie vorher neue Exemplare an, das zweite ans erste längs PA, das dritte ans zweite längs PB usw., schließlich das sechste wieder an das erste längs PF. Auch diese Fläche ist einfach zusammenhängend. Das einzelne Blatt ist ein Sechseck mit der Winkelsumme von 360° und wir erhalten eine Pflasterung mit Sechsecken, wobei jedoch sechs derselben um eine Ecke herumliegen. Offenbar befinden wir uns im hyperbolischen Fall, denn im Euklidischen hätte das Sechseck die Winkelsumme 720°. Man beachte bei diesem Schluß, daß die Abbildung bei P durchaus konform ist, da ja P nur scheinbar singulär ist; auf der Riemannschen Fläche ist P als regulär anzusehen, da sich bei seiner Umlaufung das Blatt nicht ändert.

Man erhält nun wie früher eine Pflasterung der Ebene, indem man das Sechseck um die Mittelpunkte seiner Seiten dreht. Gleichzeitig ergibt sich der Satz, daß man die hyperbolische Ebene mit einem beliebigen n-Eck pflastern kann, dessen Seiten Mittelpunkte haben und bei dem die Summe der Innenwinkel 360° oder ein echter Teiler davon ist.

Wir wollen statt des Einheitskreises lieber die obere Halbebene nehmen und die Variable in derselben mit τ bezeichnen. Die Funktion $w = f(\tau)$, welche die obere τ-Halbebene auf die soeben konstruierte unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche abbildet, ist nun automorph unter der Gruppe, welche durch die Pflasterung der Ebene mit Sechsecken gegeben ist. Wir wollen sie näher bestimmen. Sie wird durch 6 Involutionen A, B, C, D, E, F erzeugt. Zwischen diesen besteht die Relation $ABCDEF = 1$. Also ist $ABCDE$ selber eine Involution. Diejenigen Elemente der Gruppe, welche durch eine gerade Anzahl von erzeugenden Elementen zusammengesetzt werden, bilden wieder einen Normalteiler vom Index zwei. Er heiße H. Seine Erzeugenden können gewählt werden als AB, AC, AD, AE und sie mögen in dieser Reihenfolge mit S_1, S_2, S_3, S_4 bezeichnet werden. Zwischen ihnen besteht folgende Relation, und nur diese: $S_1 S_2^{-1} S_3 S_4^{-1} = S_4^{-1} S_3 S_2^{-1} S_1$, nämlich

$$AB \cdot CA \cdot AD \cdot EA \cdot BA \cdot AC \cdot DA \cdot AE = 1 \ .$$

Betrachten wir nun die Riemannsche Fläche der Abelschen Integrale erster oder zweiter Gattung. Umläuft man mit dem Integranden eine ungerade Anzahl von Verzweigungspunkten, so ändert er bloß das Vorzeichen. Integriert man daher zweimal über einen solchen Weg, so gelangt man in den Anfangswert zurück. Dadurch werden Blätter identifiziert, welche vorher verschieden waren. Die Gruppe erhält folgende weiteren Relationen zwischen den erzeugenden Elementen: Die Produkte einer ungeraden Anzahl von Erzeugenden sind stets Involutionen. Hieraus ergibt sich nach bekannten und einfachen Schlüssen, daß die „Translationen" S_1, S_2, S_3, S_4 vertauschbar werden. Die Gruppe der Abelschen Integrale gegenüber der Quadratwurzel (der zweiblättrigen Riemannschen Fläche) ist daher eine Abelsche Gruppe mit vier freien Erzeugenden. Die obige Relation ist alsdann trivial.

Man findet so den Satz: die Gruppe der Abelschen Integrale ist die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe von H unter H. Die Abelschen Integrale sind eindeutige Funktionen von τ, aber diese sind nicht mehr automorph unter H, sondern nur noch unter der Kommutatorgruppe von H. Der Bereich der Abelschen Integrale bildet Funktionen, welche zur Kommutatorgruppe gehören, wenn auch einzelne derselben bei umfassenderen Gruppen invariant sein können. Die Riemannsche Fläche der Integrale ist von unendlichem Zusammenhang, trotzdem ist die Abbildung euklidisch. Das einzelne Blatt wird auf ein Sechseck mit der Winkelsumme 360° abgebildet, was nur so möglich ist, daß es zweimal um einen Verzweigungspunkt herumläuft. Auch hier erhält man die ganze Abbildung, indem man dieses Sechseck um die Mittelpunkte seiner Seiten dreht und in dieser Weise fortfährt.

3. Modulfunktionen

Wir beginnen mit der Riemannschen Fläche der Funktion $\lambda(\tau)$. Sie enthält an den Stellen 0,1 und ∞ in allen Blättern logarithmische Verzweigungspunkte. Ihre Gruppe ist daher die freie Gruppe von 2 Erzeugenden, welche man als Drehungen um 0 und 1 deuten kann. In der oberen τ-Ebene erhält man entsprechend die Modulsubstitutionen zweiter Stufe

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \; .$$

Die Zahlen a, b, c, d genügen der Gleichung $ad - bc = 1$. Ferner sind a und d ungerade, b und c gerade. Den Substitutionen kann man die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

zuordnen, wobei zunächst jeder Substitution zwei Matrizen entsprechen, die sich durch eine Vorzeichenänderung aller vier Zahlen unterscheiden. Man kann aber eine derselben ausschalten, indem man verlangt, daß $a \equiv b \equiv 1 \pmod 4$ ist. Diese Matrizen bilden, wie man sich leicht überzeugt, eine Gruppe. Die Erzeugenden sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Modulfunktion $j(\tau)$ bildet die obere τ-Halbebene auf eine Riemannsche Fläche ab, welche bei 0 Verzweigungspunkte zweiter, bei 1 solche erster Ordnung besitzt und bei ∞ logarithmische Verzweigungspunkte aufweist. Um sie kennen zu lernen, ist es am besten, die vorige modulare Fläche von λ in diejenige von j direkt überzuführen. Hierzu bildet man die Punkte 0, 1 und ∞ auf die Punkte 1, ϱ und ϱ^2 ab, wo ϱ eine dritte Einheitswurzel ist, durch die lineare Substitution

$$\mu = \frac{\varrho\lambda + 1}{\varrho^2\lambda + 1} .$$

Hierdurch werden keine neuen Verzweigungspunkte eingeführt. Dies erhebe man in die dritte Potenz. Dadurch fallen alle logarithmischen Verzweigungspunkte in den Punkt 1, dagegen entstehen bei 0 und ∞ je Verzweigungspunkte zweiter Ordnung. Nun bringe man ∞, 0 und 1 nach -1, $+1$, ∞ durch die Substitution:

$$\nu = \frac{1 + \mu^3}{1 - \mu^3} = \frac{2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2}{3(\varrho - \varrho^2)\lambda^2 - 3(\varrho - \varrho^2)\lambda} .$$

Diese quadriere man, dann fallen die beiden Verzweigungspunkte zweiter Ordnung in den Punkt 1 und bei 0 entsteht ein Verzweigungspunkt erster Ordnung. Derjenige bei ∞ verschmilzt mit den dort schon vorhandenen logarithmischen Verzweigungspunkten. Das Resultat wird

$$\frac{(2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2}{-27\lambda^2(1 - \lambda)^2} = -\frac{w}{27} \quad \text{und} \quad j(\tau) = 1 + \frac{w}{27} = \frac{4}{27}\,\frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} .$$

Die Kommutatorgruppe der Modulsubstitutionen zweiter Stufe.

Die Modulgruppe zweiter Stufe ist die freie Gruppe, welche von zwei Elementen A und B erzeugt wird. Man erhält die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe, indem man die Gruppe abelsch macht. Sie ist daher die von zwei Elementen erzeugt freie Abelsche Gruppe. Bezeichnet man das allgemeine Element der Gruppe mit

$$A^{a_1} B^{b_1} \dots A^{a_n} B^{b_n} \quad ,$$

so besteht die Kommutatorgruppe aus denjenigen Elementen, für welche gilt

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \quad \text{und} \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0 \quad .$$

Denn für die Kommutatoren sind diese Gleichungen sicher erfüllt. Umgekehrt folgt aber auch aus ihnen, daß das Element zur Kommutatorgruppe gehört. Denn man darf die einzelnen Faktoren vertauschen, wenn man einen Kommutator rechts hinzufügt. So kann man das obige Element folgendermaßen darstellen

$$A^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \cdot B^{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \cdot C \quad ,$$

wo C ein Element der Kommutatorgruppe bezeichnet. Sind nun die beiden Exponenten von A und B gleich Null, so reduziert sich das Element auf C.

Wir suchen jetzt eine Funktion, welche zur Kommutatorgruppe gehört. Sie muß unter den Substitutionen der ganzen Modulgruppe zweiter Stufe eine freie Abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden erfahren. Dies geschieht mit Hilfe des Logarithmus. Man bildet $\log \lambda$ und $\log (1 - \lambda)$. Umläuft man in der λ-Ebene den Punkt 0, so bleibt die zweite Funktion ungeändert, während die erste den additiven Term $2\pi i$ erfährt. Umläuft man dagegen den Punkt 1, so verhalten sich die beiden Funktionen umgekehrt. Wir wollen die Reihenentwicklungen dieser Funktionen geben. Es sind eindeutige Funktionen von τ.

Wir setzen $h = e^{\pi i \tau}$ und beginnen mit $\log (1 - \lambda)$. Bekanntlich ist

$$1 - \lambda = \frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_3^4} = \frac{\Pi(1 - h^{2\nu-1})^8}{\Pi(1 + h^{2\nu-1})^8} \quad , \quad \nu = 1, 2, \dots \quad .$$

Daher wird

$$\lg(1 - \lambda) = 8\left(\sum \log (1 - h^{2\nu-1}) - \sum \log (1 + h^{2\nu-1})\right) =$$

$$= -16 \sum \left(\frac{h^{2\nu-1}}{1} + \frac{h^{3(2\nu-1)}}{3} + \frac{h^{5(2\nu-1)}}{5} + \cdots\right) .$$

In dieser Potenzreihenentwicklung nach h kommen nur ungerade Potenzen vor und der Koeffizient ist gleich der Summe der reziproken Teiler des Exponenten. Wir wollen für eine beliebige ganze Zahl m die Summe der ungeraden Teiler inklusive 1 (und m) mit $U(m)$ bezeichnen. Alsdann ist für ungerade m die Summe der reziproken Teiler, wie man sich leicht überzeugt, $= \frac{U(m)}{m}$. Damit erhalten wir die Potenzreihenentwicklung

$$\log(1-\lambda) = -16 \sum \frac{U(m)}{m} h^m ,$$

die Summe über alle ungeraden ganzen positiven Zahlen erstreckt.

Gehen wir nun zu $\log \lambda$. Bekanntlich ist

$$\lambda = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} = \frac{16 h \Pi (1+h^{2\nu})^8}{\Pi (1+h^{2\nu-1})^8} .$$

Daher wird

$$\log \lambda = \log 16 + \pi i \tau + 8 \left(\sum \log(1+h^{2\nu}) - \sum \log(1+h^{2\nu-1}) \right) .$$

Entwickeln wir zunächst die Klammer. Man erhält:

$$\sum \left(\frac{h^{2\nu}}{1} - \frac{h^{2\cdot 2\nu}}{2} + \frac{h^{3\cdot 2\nu}}{3} - \cdots \right) +$$
$$+ \sum \left(-\frac{h^{2\nu-1}}{1} + \frac{h^{2(2\nu-1)}}{2} - \frac{h^{3(2\nu-1)}}{3} + \cdots \right) .$$

Ungerade Exponenten kommen nur in den negativen Termen der zweiten Summe vor und liefern, wie oben:

$$- \sum \frac{U(m)}{m} h^m .$$

Die positiven Terme der ersten Reihe liefern für gerade m die reziproken ungeraden Teiler als Koeffizienten. Setzt man $m = 2^b \cdot n$, wo n ungerade ist, so erhält man:

$$\frac{2^b U(m)}{m} h^m .$$

Die negativen Terme erfordern eine Zerlegung von m in zwei gerade Teiler. Man hat also die reziproken Werte der geraden Teiler von $\frac{m}{2} = 2^{b-1} \cdot n$ zu summieren, also zu bilden:

$$h^m \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{b-1}}\right) \cdot \frac{U(n)}{n} = \frac{(2^b - 2)\, U(m)}{m} h^m \ .$$

Dies ist zu subtrahieren.

Die positiven Terme der zweiten Summe erfordern eine Zerlegung von m in einen geraden und einen ungeraden Faktor. Ersterer enthält stets 2^b. Daher erhält man

$$\frac{U(m)}{m} h^m \ .$$

Faßt man alles zusammen, so ergibt sich

$$\frac{3\,U(m)}{m} h^m \ .$$

Hiermit ist die Reihenentwicklung von $\log \lambda$ berechnet. Es ist

$$\log \lambda = \log 16 + \pi i \tau + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots,$$

wo für ungerade m gilt $a_m = -\,8\,\dfrac{U(m)}{m}$, für gerade m aber $a_m = 24\,\dfrac{U(m)}{m}$.

Wir setzen nun $\varphi(\tau) = \dfrac{1}{2\pi i} \log \lambda$ und $\psi(\tau) = \dfrac{1}{2\pi i} \log (1 - \lambda)$ und finden:

$$\varphi(\tau + 2) = \varphi(\tau) + 1\ , \qquad \varphi\left(\frac{\tau}{2\tau + 1}\right) = \varphi(\tau)\ ,$$

$$\psi(\tau + 2) = \psi(\tau)\ , \qquad \psi\left(\frac{\tau}{2\tau + 1}\right) = \psi(\tau) + 1\ .$$

Beide Funktionen sind unter der Kommutatorgruppe invariant, sie gehören aber zu zwei verschiedenen umfassenderen Untergruppen der Modulgruppe zweiter Stufe; $\varphi(\tau)$ bleibt bei B ungeändert, $\psi(\tau)$ bei A. Aus ihnen läßt sich ferner bilden

$$\chi(\tau) = \varphi(\tau) - \psi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{\lambda}{1 - \lambda}\ .$$

Diese Funktion bleibt bei AB und seinen Potenzen ungeändert. Ihre Reihenentwicklung ist dieselbe, wie diejenige von φ, nur haben die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von h ebenfalls das positive Vorzeichen.

Leiten wir $\chi(\tau)$ nach τ ab, so erhalten wir, weil $h' = \pi i h$ ist:

$$\frac{\lambda'}{\lambda(1-\lambda)} = \pi i\Big(1 + 8 \sum_{m\text{ unger.}} U(m)\, h^m + 24 \sum_{m\text{ gerade}} U(m)\, h^m\Big) \;.$$

Diese Reihe ist der Thetanullwert $\pi i\, \vartheta_3^4(\tau)$. Beachtet man ferner die beiden Gleichungen $\lambda = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}$ und $1 - \lambda = \frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_3^4}$, so ergibt sich:

$$\vartheta_0^4 = \frac{1}{i\pi}\,\frac{\lambda'}{\lambda} = 2\varphi'(\tau) \;, \quad \vartheta_2^4 = 2\psi'(\tau) \;, \quad \vartheta_3^4 = 2\chi'(\tau) \;.$$

Hieraus erhält man

$$\varphi(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_0^\tau \vartheta_0^4(\tau)\, d\tau \;, \quad \psi(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_\infty^\tau \vartheta_2^4(\tau)\, d\tau \;, \quad \chi(\tau) = \tfrac{1}{2}\int_i^\tau \vartheta_3^4(\tau)\, d\tau \;.$$

Die Grenzen werden so bestimmt: $\log \lambda$ verschwindet für $\lambda = 1$, also $\tau = 0$; $\log(1-\lambda)$ verschwindet für $\lambda = 0$, also $\tau = \infty$, und $\log \frac{\lambda}{1-\lambda}$ verschwindet für $\lambda = \frac{1}{2}$, also $\tau = i$.

Wir haben gesehen, daß eine Modulsubstitution zweiter Stufe, für welche $a \equiv d \equiv 1 \pmod 4$ ist, auf eine und nur eine Weise sich in der Gestalt $A^{a_1} B^{b_1} A^{a_2} B^{b_2} \ldots A^{a_n} B^{b_n}$ darstellen läßt, wobei die Zahlen a_1 und b_n ganze positive oder negative Zahlen inklusive 0 sind, während $b_1, \ldots, a_n$ ganze positive oder negative von 0 verschiedene Zahlen sind. Man kann nun das Problem stellen, eine Funktion der vier Koeffizienten a, b, c, d der Matrix anzugeben, welche die Summe $a_1 + a_2 + \cdots a_n$, und eine ebensolche, welche die Summe $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ darstellt. Solche Funktionen sind sicher nicht rational in a, b, c, d. Dagegen bilden die beiden Funktionen $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ eine Lösung dieses Interpolationsproblemes. Es ist nämlich

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \varphi\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) - \varphi(i) = \tfrac{1}{2}\int_i^{\frac{ai+b}{ci+d}} \vartheta_0^4(\tau)\, d\tau$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \psi\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) - \psi(i) = \tfrac{1}{2}\int_i^{\frac{ai+b}{ci+d}} \vartheta_2^4(\tau)\, d\tau \;.$$

(Eingegangen den 3. Juli 1943.)