Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Eine Formel für die geodätische Krümmung.
Autor: Scherrer, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15551

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine Formel für die geodätische Krümmung

Von W. Scherrer, Bern

Herrn Constantin Carathéodory zum 70. Geburtstag gewidmet!

Die Herleitung der Integralformel von Gauß und Bonnet

$$\oint x_g \, ds = 2\pi - \iint K \, dv \tag{1}$$

als Resultat der Geometrie auf der Fläche ist bekanntlich mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden, da man zu diesem Zwecke die explizite Bestimmung der Gaußschen Krümmung K und der geodätischen Krümmung x_g als Funktionen der ersten Hauptform benötigt.

Die Genesis der genannten Formel aus der Theorie der im Euklidischen Raum eingebetteten Flächen verdient aber auch noch ein selbständiges Interesse, wie die schönen kinematischen Betrachtungen in „*Thomson und Tait*[1])" zeigen. Angeregt durch diese Betrachtungen habe ich eine Formel für die geodätische Krümmung x_g gewonnen, zu deren Begründung die elementare Vektorrechnung ausreicht und aus der dann die Integralformel leicht gefolgert werden kann.

Es sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$$

die vektorielle Parameterdarstellung einer Fläche im Euklidischen Raum und

$$\mathfrak{x}[u(s), v(s)] = \mathfrak{x}(s)$$

eine Kurve auf dieser Fläche mit der Bogenlänge s. Die Flächennormale $\mathfrak{N}$ — respektive das sphärische Abbild der Fläche — ist dann gegeben durch

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{|[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]|} \, . \tag{2}$$

Die Normale der sphärischen Abbildung ist dann gemäß (2) zu erklären durch

$$\frac{[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v]}{|[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v]|} = \varepsilon \mathfrak{N} \, , \tag{3}$$

wo ε das Vorzeichen der Gaußschen Krümmung ist.

---

[1]) Treatise on Natural Philosophy, 8. Aufl. Cambridge 1923, Bd. I, S. 106 ff.

Die geodätische Krümmung ist bei dem von uns gewählten raumgeometrischen Standpunkt zu definieren durch

$$x_g = \mathfrak{N}\,[\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''], \tag{4}$$

wo der Strich wie üblich die Ableitung nach der Bogenlänge s bedeuten soll. Bezeichnen wir noch mit σ die Bogenlänge des sphärischen Abbildes unserer Kurve, so berechnet sich dessen geodätische Krümmung mit Rücksicht auf (3) nach der Formel

$$x_\gamma = \varepsilon\,\mathfrak{N}\left[\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma}, \frac{d^2\mathfrak{N}}{d\sigma^2}\right],$$

woraus wegen $\sigma' = |\mathfrak{N}'|$ folgt

$$x_\gamma = \varepsilon\,\frac{[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}']\,\mathfrak{N}''}{|\mathfrak{N}'|^3}\,. \tag{5}$$

Nach diesen selbstverständlichen Vorbereitungen kommen wir nun zum charakteristischen Zug der vorliegenden Ableitung: Wir betrachten denjenigen Winkel ω, um den man das Linienelement $\mathfrak{x}'$ in seiner Tangentialebene in positivem Sinne drehen muß, bis es mit der Richtung $\mathfrak{N}'$ zusammenfällt. Dann gilt

$$\mathfrak{N}' = \sigma' \cdot \{\cos\omega\,\mathfrak{x}' + \sin\omega \cdot [\mathfrak{N}, \mathfrak{x}']\}\,. \tag{6}$$

Ohne weiteres findet man

$$[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'] = \sigma' \cdot \{-\sin\omega \cdot \mathfrak{x}' + \cos\omega \cdot [\mathfrak{N}, \mathfrak{x}']\}\,. \tag{7}$$

Nun läßt sich (5) bequem berechnen und es resultiert die Formel

$$\boxed{x_g = -\omega' + \varepsilon x_\gamma \sigma'}\,. \tag{8}$$

Diese Formel kann noch ergänzt werden für den Fall, daß eine Ecke vorhanden ist. Zu dem Zweck betrachten wir diejenige Drehung in der Tangentialebene des Eckpunktes, welche den Tangentenvektor des einlaufenden Bogens in den Tangentenvektor des auslaufenden Bogens überführt. Durchläuft dabei der Tangentenvektor $\mathfrak{x}'$ den Winkel φ_g und sein sphärisches Abbild den Winkel φ_γ, so erfährt der Vektor $\mathfrak{N}'$ in der Tangentialebene des Eckpunktes die Drehung $\varepsilon\varphi_\gamma$ und der Winkel ω zwischen $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{N}'$ einen Zuwachs $\Delta\omega$. Die Betrachtung der genannten Winkel ergibt unmittelbar die der Gleichung (8) entsprechende Relation

$$\boxed{\varphi_g = -\Delta\,\omega + \varepsilon\varphi_\gamma} \quad . \tag{9}$$

Nun können wir leicht die Formel (1) gewinnen. Wir wenden (8) vorerst einmal an auf den positiv zu durchlaufenden Rand eines Elementarflächenstücks, auf dem die Gaußsche Krümmung K überall dasselbe Vorzeichen hat und dessen sphärisches Abbild den Flächeninhalt Ω besitzt. Da der Winkel ω nach einer vollen Durchlaufung modulo 2π in seinen Anfangswert zurückkehren muß, ergibt die Integration von (8)

$$\oint x_g\,ds = 2k\pi + \varepsilon \oint x_\gamma\,d\sigma \quad .$$

Auf der Kugel aber liefert die direkte Berechnung

$$\oint x_\gamma\,d\sigma = 2\pi - \Omega \quad , \tag{10}$$

und außerdem gilt

$$\Omega = \varepsilon \iint K\,d\sigma \quad . \tag{11}$$

Also folgt

$$\oint x_g\,ds = 2(k+\varepsilon)\,\pi - \iint K\,do \quad . \tag{13}$$

Die ganze Zahl k kann man bestimmen, indem man die Randkurve stetig auf einen Punkt im Innern des Elementarflächenstücks zusammenzieht. Man erhält

$$2\pi = 2\,(k+\varepsilon)\,\pi$$

und damit die Formel (1).

Im allgemeinen Falle, wo die Gaußsche Krümmung beide Vorzeichen annimmt, zerlegt man natürlich die Fläche in Gebiete eines Vorzeichens, die voneinander durch Linien $K = 0$ getrennt sind. Die dabei auftretenden Ecken können mit Hilfe von (9), also ohne Abrundung, berücksichtigt werden.

Für gewisse Anwendungen der Formel (8) ist es vorteilhaft, sich vollständig auf einen *Streifen* zu beschränken:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) & ; & \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(s) \\ \mathfrak{N}\mathfrak{x}' = 0 & ; & \mathfrak{N}^2 = 1 \end{array}} \quad . \tag{14}$$

Die Bezugnahme auf die Flächenabbildung gemäß (2) und (3) wird damit gegenstandslos. Der Vektor $\mathfrak{N}$ stellt dann in jedem Falle sowohl das

sphärische Abbild als auch die äußere Normale der Bildkugel dar. In den Formeln (5), (8) und (9) hat man überall $\varepsilon = 1$ zu setzen. Speziell erhält man so durch Integration von (8) über einen geschlossenen zweiseitigen Streifen

$$\boxed{\oint x_g \, ds = 2k\pi + \oint x_\gamma \, d\sigma} \, , \tag{15}$$

wo k eine ganze Zahl ist und $2k\pi$ die Abnahme des Winkels ω bei einer vollen Durchlaufung darstellt.

Die Gleichung (15) enthält als Spezialfall den bekannten Satz von Jacobi[2]), wonach das Hauptnormalenbild einer geschlossenen Raumkurve die Einheitskugel in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Bezeichnet man nämlich Hauptnormale, Krümmung und Torsion einer derartigen Raumkurve mit $\mathfrak{n}$, x und τ, so hat man zu setzen $\mathfrak{N} = \mathfrak{n}$ und erhält dann mit Hilfe der Frenetschen Formeln aus (4) und (6) unmittelbar

$$x_g = 0 \; ; \quad \omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{\tau}{x}\right) .$$

Daher ist die Abnahme von ω bei einer vollen Durchlaufung Null: $2k\pi = 0$, und es folgt

$$\oint x_\gamma \, d\sigma = 0 \, ,$$

welche Gleichung im Sinne von (10) den genannten Satz zum Ausdruck bringt.

---

[2]) *C. G. J. Jacobi*, Werke, Bd. 7, S. 39.

(Eingegangen den 28. Juni 1943.)